„Grenzwertfreie Analysis" in der Schule via „Nonstandard Analysis"?

Horst Hischer

In Heft 102 der GDM-Mitteilungen bedauern Peter Baumann und Thomas Kirski in ihrem Beitrag „Analysis ohne Grenzwert!" eine zu geringe Resonanz bezüglich ihres zuvor in Heft 100 unter dem Titel „Analysis mit hyperreellen Zahlen" erschienenen Basisartikels. Zugleich bitten sie darum, jenen noch einmal zu lesen. Dieses Anliegen ist gerechtfertigt, denn in den *Mitteilungen der GDM* ist eine konstruktive Diskussion und Reaktion auf Beiträge wünschenswert und angebracht.

Zunächst ist hervorzuheben, dass mit diesem Beitrag in der Fülle aktueller mathematikdidaktischer Publikationen ein weiterer erschienen ist, der in Richtung der oft abfällig „stoffdidaktisch" genannten Aspekte des Mathematikunterrichts zeigt: So stellen die Autoren in ihrem Basisartikel – didaktisch motiviert – ein wohl für den bisherigen Mathematikunterricht ungewöhnliches bzw. meist unbekanntes Thema vor, das erst vor rund 50 Jahren Einzug in die Mathematik gehalten hat.

Der zugrundeliegende mathematisch-didaktische Ansatz sei kurz kritisch-konstruktiv betrachtet. Der Basisartikel kann dabei jedoch in diesem Rahmen nur marginal herangezogen werden.

Ausgangslage

> *Die Schwierigkeit der Analysis kommt von den Quantoren, deren Gebrauch sie erzwingt.*
> Georges Papy, 1970

Die Autoren legen ihrem Vorschlag zur Behandlung der Analysis in der Schule via „Nonstandard Analysis" u. a. folgende Feststellung zugrunde (siehe Baumann & Kirski 2017, 15):

> Nun wissen alle Mathematiklehrerinnen und -lehrer aus eigener Erfahrung, welche Mühe es bereitet, jungen Menschen im Alter von 16 Jahren den Grenzwert zu vermitteln.

Das „alle" mag stören, weil es wohl auch andere, positive Erfahrungen gibt, jedoch liegt der Grund dieser Feststellung spekulativ in Folgendem:

Begriffe der Analysis wie etwa Grenzwert, Stetigkeit und Konvergenz *nur durch verbale Beschreibungen* erfassen und präzisieren zu wollen, ist wohl nicht nur in dieser Altersgruppe ein gewagtes (oder hier gar zum Scheitern verurteiltes?) Unterfangen, sondern auch im Studium. Und das zeigt sich ähnlich bei typisch mathematischen Floskeln wie „hinreichend" und „notwendig" – während sich hier überall der Schleier schlagartig zu lüften vermag, sobald man grundlegende Elemente der Logik eingeübt hat und sie verwendet.

So wird bei der Verwendung von Quantoren (endlich) klar, was etwa der Unterschied zwischen „Konvergenz" und „gleichmäßiger Konvergenz" ist: Die *Reihenfolge der Quantoren* macht's!

Zugleich schreiben die Autoren zuvor a. a. O.:

> Wir wollten deutlich machen, *dass die Analysis völlig ohne Grenzwert auskommt*.

In der Tat ist dies möglich, und so hat bereits 1973 Detlef Laugwitz analysiert,

> inwieweit für die Analysis des Schulunterrichts der Grenzwertbegriff wirklich erforderlich ist.

Die didaktisch bedeutsame Frage ist nun aber keinesfalls nur, ob im Analysisunterricht der Grenzwertbegriff *erforderlich* und damit eine „grenzwertfreie" Behandlung der Analysis im Mathematikunterricht *möglich* ist, sondern vielmehr ist zu erörtern, ob ein solcher Weg *sinnvoll* oder gar *wünschenswert* ist.

Von „New Math" in den 1970ern zu „No Math"

> *… so kann man nun eher von einer No-Math Bewegung sprechen, die ihr Heil in antididaktischen Omissionen sucht.*
> Rainer Kaenders, 2006

Einer der Schwerpunkte mathematikdidaktischer Diskussionen und Publikationen war seit 1968 vor allem und zunächst die *Präzisierung* unterrichtsrelevanter mathematischer Begriffe, Verfahren, Sätze und Beweise und deren Veranschaulichung. Die „Strukturmathematik" war für diese Ende der 1960er Jahre einsetzende Entwicklung mit ihren grundlegenden Säulen aus Logik und Mengenlehre zugleich ein wichtiger Motor.

Dabei ist zu betonen, dass für den Mathematikunterricht niemals „Mengenlehre" als Leitfaden angesagt war (was auch heute für das Studium leider oft nur marginal gilt), sondern dass es nur um eine präzisierende „Mengensprache" ging, allenfalls um „Mengenalgebra" – und das in Verbindung mit Elementen der formalen Logik. Das führte dann u. a. auch zu einer neuen Gleichungslehre mit „Grundmenge" und „Lösungsmenge".

Bei der Umsetzung dieser „mengensprachlich" und „logisch" orientierten Entwicklung „vor Ort" mögen – bedingt durch manche Lehrkräfte – Fehler gemacht worden sein, jedoch vermag ich diesen Weg weiterhin nicht zu verurteilen, und ein später hastig erfolgtes administratives Verbot von „Mengenlehre im Mathematikunterricht" habe ich nie verstehen können. So begann der Weg von der „New Math" zur „No Math" als *„antididaktische Omission"* gemäß Kaenders (2006, 48) als

> ... Lösung mathematikdidaktischer Probleme durch Weglassen der damit verbundenen Lehrinhalte.

Rainer Kaenders präzisiert dies auf S. 48 f.:

> Über den Zahlbegriff hinaus gibt es weitere antididaktische Omissionen bei grundlegenden Konzepten: Aussagenlogik, elementare Sprache von Strukturen und Mengen, Abbildungsbegriff, lineare Algebra, Definitheit, Monotonie, infinitesimale Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit, Asymptote, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit etc. wie auch echte Anwendungen, die ohne mathematisches Grundgerüst nicht zu behandeln sind. Mathematische Konzepte selbst, mit entsprechenden Definitionen, werden in den großen Schulbuchserien nicht mehr entwickelt oder als solche betrachtet.

Als persönliche Erfahrung aus den 1970ern bis in die 1980er hinein, die ich mit manchen meiner damaligen Kollegen teile, kann ich über die damalige unterrichtliche Einbettung der von Kaenders angedeuteten Konzepte einschließlich der konsequenten Verwendung von Quantoren positiv berichten – schon für die mittleren Jahrgangsstufen, jedoch auch und insbesondere für den Analysisunterricht, der konsequent und behutsam über einen Einstieg mit Folgen und Reihen und entsprechenden Konvergenzfragen aufgebaut wurde. Das damals vielfach nicht vorhandene Zentralabitur und eine somit noch nicht vorhandene Omission durch ein „Teaching to the Test" machten dies möglich. Damit zeigt sich, dass ein solcher Unterricht nicht an sich nicht möglich ist, sondern dass die Rahmenbedingungen hinreichend *offen* sein müssen (was sie heute leider nicht mehr sind).

Der Feststellung im erstgenannten Zitat von Baumann und Kirski vermag ich somit nicht grundsätzlich zuzustimmen.

Verzicht auf „Grenzwert"?

In ihrem Artikel von 2017 begründen die Autoren ihren Vorschlag zum Verzicht auf die Betrachtung von Grenzwerten u. a. wie folgt (siehe dort S. 15):

> Zum Beispiel sah der frühere Berliner Lehrplan [...] ein Vierteljahr allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte" vor [...]. Trotzdem haben viele Schülerinnen und Schüler das Wesen des Grenzwertes nicht verstanden, was sich aber kaum als nachteilig erwies, da man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte [...].

Das mag so sein, aber dann ist zunächst zu fragen, warum es denn nicht gelungen sei, das „Wesen des Grenzwerts" in einem Vierteljahr zu vermitteln. Meine oben angedeuteten Erfahrungen zeigen hingegen, dass dies möglich ist.

Nachdenklich stimmen sollte dann aber vor allem der Hinweis, dass *„man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte"*. Kann denn dies ein triftiger Grund dafür sein, den Grenzwertbegriff *nicht* mehr zu behandeln? Immerhin würde ein solches Argument an den Fundamenten des Mathematikunterrichts rütteln, und vieles Nichtkalkülhafte würde konsequenterweise inhaltlich obsolet werden, so z. B. Irrationalität oder Intervallschachtelungen. Und selbst Kalküle müsste man in ihrer Funktionsweise nicht mehr verstehen, sondern diese nur noch beherrschen.

Dass jedoch sogar die Autoren selber derartige Konsequenzen für den Mathematikunterricht nicht goutieren, machen sie anschließend deutlich:

> Mit der Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur an den Gymnasien gibt es nun keine Zeit mehr, den Grenzwert zu behandeln. In Mathematik-Grundkursen soll man sich sogar damit begnügen, mittels dreier Testeinsetzungen den Grenzwert zu vermuten. Was solches Vorgehen noch mit Mathematik zu tun haben soll, erschließt sich uns jedoch nicht, denn Mathematik bzw. mathematisches Denken wird auf diese Weise gerade nicht vermittelt.

Und ähnlich schreiben sie schon 2016 auf S. 6:

> Überhaupt scheint es angesichts der Verkürzung der Schulzeit eine Tendenz zu geben, auf Begründungen zu verzichten. Dagegen finden wir, dass im Mathematikunterricht – und nicht nur dort – Begründen gelernt werden muss, um studierfähig zu werden.

Den beiden letztgenannten Resümees der Autoren ist gewiss voll zuzustimmen, jedoch weisen diese Resümees zugleich auf eine (latent vorhandene?) didaktische Bankrotterklärung hin, der seitens der Fachdidaktiken und ihrer Verbände deutlich zu begegnen ist: Administrativ verordnete, sowohl fachlich als auch fachdidaktisch unsinnige *antididaktische Omissionen* sind nicht akzeptabel!

(Vielleicht tragen auch manche Aktivitäten der Mathematikdidaktik eine Mitschuld an solchen Entwicklungen, wenn etwa neue thematische Bereiche im Curriculum verankert worden sind? Waren bzw. sind dann derartige thematische Neuerungen nur um den Preis einer antididaktischen Omission zu haben?)

Die Autoren führen allerdings noch eine weitere, ihnen wohl wesentlich erscheinende Begründung für den Verzicht auf eine Behandlung des Grenzwertbegriffs an, indem sie nämlich vorschlagen, im Mathematikunterricht anstelle der üblichen „Reellen Analysis" (von ihnen „Grenzwertanalysis" genannt) die auf „hyperreellen Zahlen" beruhende „Nonstandard Analysis" zu verwenden (siehe Baumann & Kirski 2017, 15):

> Im Gegensatz zur Grenzwertanalysis kann man wirklich Regeln errechnen. Man braucht sie nicht mehr zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzprozess zu bestätigen.

Das „braucht sie nicht mehr" ist ein „unterrichtsökonomisches" Argument, das aber ihrem Petitum in obigen Zitaten zu „mathematischem Denken" und „Lernen des Begründens" widerspricht:

Denn das „Vermuten" wird hier indirekt didaktisch abgewertet, jedoch ist es nicht nur im Mathematikunterricht wesentlich für kreatives Handeln, sondern es ist und war dies schon immer auch in der Wissenschaft Mathematik: Im Mathematikunterricht ist es wesentlich und vor allem unverzichtbar für „entdeckendes Lernen".

Grenzwert vs. Nonstandard Analysis?

Anstelle einer „Grenzwertanalysis" schlagen die Autoren also einen Weg über die von Abraham Robinson 1966 in seinem Lehrbuch vorgestellte „Nonstandard Analysis" vor, in der die von Leibniz „intuitiv" verwendeten (aber nicht streng definierten infinitesimalen) Größen wie z. B. dx als „infinitesimale Zahlen" auftreten, mit denen konkret *gerechnet* werden kann, so dass die Bezeichnung „Infinitesimal*rechnung*" auch ihre didaktische Berechtigung erfährt – was erfreulich ist![1]

In dieser Theorie – und damit in der zugrunde liegenden Modellvorstellung – sind die Beträge „infinitesimaler Zahlen" größer als Null und dennoch kleiner als jede positive reelle Zahl (wie die negativen reellen Zahlen „finite Zahlen" genannt), und die Beträge der Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind „infinite Zahlen": Die „hyperreellen Zahlen" bestehen aus allen finiten (also reellen) und allen infinitesimalen und infiniten Zahlen.

Bereits 1973, also sechs Jahre nach Erscheinen von Robinsons Buch, hat Detlef Laugwitz in den *Jahresberichten der DMV* – und damit adressiert an die Community der Mathematiker! – unter dem Titel „Ein Weg zur Nonstandard-Analysis" eine Beschreibung dieser neuen Theorie und ihrer Wurzeln und einen Ausblick zur Weiterentwicklung skizziert, die er – ganz im Sinne von Baumann und Kirski – wie folgt beginnt:[2]

> Die Nonstandard-Analysis ist eine Theorie, welche die Infinitesimalrechnung und andere Gebiete der Mathematik unter Verwendung von unendlichen großen und unendlich kleinen Zahlen behandelt. Das kommt den intuitiven Ideen der Begründer der Infinitesimalrechnung nahe.

Im Basisartikel Baumann & Kirski (2016) wird gezeigt, wie man auf diese Weise z. B. durch Vergrößerung mit einem „infinitesimalen Faktor" lokale Tangentensteigungen (und damit Ableitungen) ohne einen Grenzwertprozess *errechnen* kann (also durch einen Kalkül [2]). Doch um welchen Preis wird dies möglich? Zwar deuten die Autoren an, dass dies erfolgreich im Unterricht möglich sei, belegen dies aber leider nicht. So beginnen sie diesen Artikel im Vorwort wie folgt:

> *Hyperreelle Zahlen werden seit Jahrzehnten erfolgreich eingesetzt.*

Und auf derselben Seite liest man später:

> Manche Lehrkraft wird sich fragen, wie Studierende der Mathematik, die in der Schule Analysis mit hyperreellen Zahlen gelernt haben, damit an der Universität klar kommen, wenn dort

[1] Der Leibniz'sche „Differentialkalkül" wird exemplarisch z. B. in Hischer (2016a, 337 ff.) dargestellt.

[2] Siehe dazu Laugwitz (1973b, 66). Laugwitz geht auf S. 68 darauf ein, dass W. A. J. Luxemburg schon seit 1961 vor Robinson versucht habe, eine „Nonstandard Analysis" mit Hilfe von Ultrafiltern und Ultraprodukten zu beschreiben, dass aber die Modelle von sowohl Luxemburg als auch Robinson nichtkonstruktiv seien, er sich aber erhoffe, *„daß jemand zu einer konstruktiven Nonstandard-Analysis angeregt wird"*, denn *„Erst ein Kalkül macht ein mathematisches Gebiet für den Praktiker brauchbar"*.

> Grenzwert-Analysis betrieben wird. Alle bisherigen Rückmeldungen haben klar gezeigt, dass dies kein Problem darstellt.

Zu beiden Zitaten würde man gerne Belege sehen.

So bleibt hier vorläufig nur die Möglichkeit einer spekulativen Antwort, die sich auf die bereits erwähnte grundsätzliche Kritik der Autoren an der „Grenzwert-Problematik" und auf ihren Vorschlag zur alternativen grundlegenden Behandlung „hyperreeller Zahlen" bezieht.

Schon auf S. 6 ihres Artikels von 2016 verkünden die Autoren mit einem Paukenschlag:

> Um es klar zu sagen: Der Grenzwertbegriff ist für die Schule ungeeignet, er war schon immer zu schwierig.

Es sei dahingestellt, ob dies mit überwältigender Mehrheit empirischer Erhebungen belegbar ist, jedoch sind Zweifel bezüglich dieser Feststellung angebracht,[3] die dann im Übrigen durch Einbeziehung weiterer Themen des Mathematikunterrichts spekulativ ergänzt werden könnten. Und insbesondere galt bekanntlich die Analysis selber bei ihrer Etablierung im Mathematikunterricht Anfang des 20. Jhs. noch als *viel zu schwer für den Unterricht*.

Gleichwohl muss es der Anspruch mathematikdidaktischer Konzepte sein, die jeweiligen Themen altersgerecht behandeln zu können: sowohl gemäß Arnold Kirsch stets „intellektuell ehrlich" als auch gemäß Jerome S. Bruner „spiralig" im Sinne der von ihm so genannten „basalen Ideen"!

Und schließlich ist anzumerken, dass die in der Mathematikdidaktik diskutierten „fundamentalen Ideen" neben anderen als ein wichtiges Kriterium die „Historizität" aufweisen:[4]

So wurde zwar der Grenzwertbegriff erst Anfang des 19. Jhs. im Rahmen der „exakten Grundlegung der Analysis" durch Cauchy eingeführt, denn seine

> Geheimwaffe [. . .] zur Grundlegung der Analysis waren Grenzwerte [. . .]. (Sonar 2011, 507)

Doch gleichwohl vermögen wir die *Idee* eines Grenzwerts vorläuferhaft und schemenhaft bereits in der griechischen Antike zu sehen, so insbesondere bei Archimedes mit seiner „Exhaustionsmethode" zur Berechnung des Flächeninhalts unter einer Parabel oder der Approximation von π über die ersten Glieder zweier Folgen ein- und umbeschriebener regelmäßiger Polygone, die den Umfang eines Kreises approximieren.[5]

Und bereits weit vor der Präzisierung des Grenzwertbegriffs durch Cauchy finden wir bei dem schottischen Mathematiker und Astronomen James Gregory (1638–1675) die *Idee eines Grenzwerts*: Er definiert für einen Kreis (sogar allgemein für Kegelschnitte) mittels zweier verschachtelter Folgen um- und einbeschriebener regulärer Polygone einen genialen Algorithmus, mit dem der Flächeninhalt dieses Kreises erfasst wird. Er prägt dafür in diesem Zusammenhang erstmalig in der Mathematik den Terminus „Konvergenz":

> Series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus. (Zitiert nach: Hischer 2016b, 1)

Der Mathematikhistoriker Moritz Cantor schreibt hierzu:

> Der Kreis ist also die Grenze, welcher beide Vielecksreihen zustreben, und zwar unter Anwendung eines Namens unserer Neuzeit als harmonisch-geometrisches Mittel. (Cantor 1892, 655 f.)

Die Ideen „Grenzwert" und „Konvergenz" gehören also ideengeschichtlich organisch zusammen. Ihren Ursprung finden wir in der *Idee der Approximation zunehmender Güte*, die in die griechische Antike zurückreicht. Die Entstehung der Analysis ist also unmittelbar mit den Ideen der sich historisch zunehmend entfaltenden Begriffe von „Grenzwert" und „Konvergenz" verbunden, und hiermit wird der o. g. Aspekt der „Historizität" einer fundamentalen Idee angesprochen.

Rettet die Ideen!

Dieser eindringliche Appell Hans-Joachim Vollraths von 1978 sei in diesem Kontext in Erinnerung gerufen. So schreibt er u. a. (konträr zum Plädoyer von Baumann und Kirski, Grenzwerte in der Reellen Analysis nicht zu vermuten, sondern diese stattdessen mit Hilfe der Nonstandard Analysis mittels eines Kalküls direkt zu berechnen):

> Nach wie vor besteht die Gefahr, daß der Kalkül die Ideen im Mathematikunterricht überwuchert. Unser Bemühen sollte daher auf die unmittelbare Erschließung bedeutender mathematischer Ideen für den Unterricht gerichtet sein. (Vollrath 1978, 452) [. . .]

[3] Vgl. dazu auch meine zuvor angedeuteten dazu konträren subjektiven „Erfahrungen". Insgesamt wären konkrete empirische Erhebungen zu Rate zu ziehen.

[4] Siehe z. B. Hischer (2012, 19 ff.) und Hischer (2016a, 138 f.).

[5] Siehe z. B. die Darstellungen in (Hischer & Scheid 1995).

> Das Schicksal vieler mathematischer Inhalte besteht darin, daß sie zunächst im Unterricht ihrer Ideen beraubt werden, dann als bloßer Kalkül einige Schülergenerationen zermürben, um schließlich bei einer Reform aufgegeben zu werden. (Vollrath 1978, 454)

Dem Plädoyer bezüglich eines Verzichts auf die Behandlung des mit „Grenzwert“ verbundenen Begriffs im Mathematikunterricht zugunsten einer Priorisierung der Nonstandard Analysis vermag ich daher mit Blick auf die grundlegende Bedeutung der *Idee „Grenzwert“* nicht zu folgen.

Reelle Zahlen vs. Hyperreelle Zahlen?

Der Basisartikel (Baumann und Kirski 2016) mag vielleicht zunächst den Eindruck erwecken, dass die Autoren für eine Behandlung der hyperreellen Zahlen im Unterricht anstelle der reellen Zahlen plädieren, jedoch geschieht dies nirgends explizit. Es wäre im Sinne eines (zumindest anzudeutenden) Aufbaus des Zahlensystems auch didaktisch abwegig.

Ganz in diesem Sinn hat Helmut Wunderling 1992 in einem Vortrag an einem Beispiel deutlich gemacht, wie hyperreelle Zahlen im Unterricht behandelt werden können (siehe Wunderling (1993, 55) im letzten „Konstruktion hyperreeller Zahlen“ überschriebenen Abschnitt):

> Auf Leistungskursniveau ist es möglich, nicht nur eine brauchbare Vorstellungswelt und eine verständliche Arbeitsweise hinsichtlich der hyperreellen Zahlen zu erreichen, sondern auch weitere Einblicke zu erarbeiten. Dabei ziehe ich eine konstruktive einer axiomatisch fordernden vor.
> Zu den unverzichtbaren Dingen des Mathematikunterrichts (gerade im Zeitalter von Algebrasystemen) gehört der Zahlbegriff. Wenn auch derzeitige Lehrpläne auf den „Aufbau des Zahlsystems“ verzichten, ist es eine Bereicherung, wenn die Konstruktion hyperreeller Zahlen eingebettet wird in die davor liegenden Stufen.

Dem ist zuzustimmen, denn der „Aufbau des Zahlensystems“[6] ist besser zu würdigen, wenn deutlich wird, dass mit den reellen Zahlen (als eine die Zahlengerade füllende Punktmenge) nicht „Schluss“ ist (obwohl in der Schule nur ein sehr oberflächlicher Einblick in das „Wesen“ der reellen Zahlen möglich und sinnvoll ist):

So kann einerseits eine mögliche Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bis hin zu den komplexen Zahlen unter *Preisgabe der Anordnung* angedeutet werden, verbunden mit dem Hinweis, dass auch damit nicht Schluss sein muss, weil z. B. die Quaternionen folgen können.[7]

Oder man betrachte (unter Beibehaltung der Ordnungsrelation und bei *Preisgabe der Archimedizität*) eine Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zu den hyperreellen Zahlen. Ein einfaches Modell entsteht z. B. bereits aus dem Körper $(\mathbb{Q}(x), +, \cdot)$ aller rationalen Polynomquotienten, in dem man eine geeignete Ordnungsrelation als Fortsetzung der Ordnungsrelation in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$definiert. Dieser einfach vorzustellende Körper ist dann nicht archimedisch angeordnet und besitzt deshalb sowohl infinitesimale als auch infinite Elemente, und das geht entsprechend auch für $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.[8]

Die *Idee hyperreeller Zahlen* ist so auch ohne Bezug auf die Nonstandard-Analysis vermittelbar.

Schluss

Die von den Autoren dargestellte, auf den hyperreellen Zahlen basierende Nonstandard Analysis scheint *kein geeigneter Ersatz* für die auf den reellen Zahlen basierende, explizit den Cauchyschen Grenzwertbegriff einbeziehende Standard-Analysis zu sein. Konkrete, von den Autoren nicht referierte bzw. noch ausstehende empirische Untersuchungen mögen ggf. das Gegenteil belegen.

Gleichwohl ist es – u. a. im Sinne des Historizitätsaspekts fundamentaler Ideen – geboten, eine Behandlung des Grenzwertbegriffs im Unterricht (in welchem Umfang auch immer) fest zu verorten, weil mit ihm ein für die Analysis und die gesamte Mathematik ideengeschichtlich wesentlicher Begriff vorliegt.

Jedoch könnte der (grenzwertfreien) Nonstandard Analysis durchaus ein Platz im Lehramtsstudium eingeräumt werden, damit künftige Lehrkräfte deutlich über den Tellerrand der Lehrpläne hinausschauen können. Hierzu gehören auch die oben angedeuteten Möglichkeiten unterschiedlicher Erweiterungen des (archimedisch angeordneten) Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ – nicht nur zum (nicht angeordneten) Körper der komplexen Zahlen, sondern auch zu dem (nicht archimedisch angeordneten) auf den hyperreellen Zahlen basierenden Körper oder zu dem z. B. aus $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ gebildeten (s. o.).

Schon in den 1970er Jahren wurde auch ohne Bezug zur Nonstandard Analysis untersucht, in

[6] Nicht „Zahlsystem“, was in den Bereich der Waren-Wirtschaftssysteme gehören würde.
[7] Andeutungen dazu in Hischer (2012, 360 ff.)
[8] Siehe die Darstellung in Hischer (2012, 324 ff.).

welchem Umfang im Unterricht auf den Grenzwertbegriff verzichtet werden kann. So sei daran erinnert, dass Hermann Karcher (parallel zu (Laugwitz 1973a)) im ersten Heft der neuen Zeitschrift „Didaktik der Mathematik“ ein auf der (globalen) Lipschitz-Stetigkeit beruhendes (an der Hochschul-Mathematik orientiertes) Analysis-Konzept präsentierte. Er schreibt zu Beginn:

> Wir geben im folgenden einen detaillierten Aufbau der Analysis bis hin zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir gehen von einem Grundbegriff aus, der wesentlich einfacher ist als der klassische Cauchysche Stetigkeits- bzw. Grenzwertbegriff. Wir arbeiten dann mit einer entsprechend eingeschränkten Funktionenklasse, genannt gutartige Funktionen. Diese Klasse enthält alle bisher auf der Schule behandelten Funktionen, ebenso alle in Anwendungen der Mathematik auf Nachbarwissenschaften vorkommenden Funktionen. Die Analysis kann auf diese Weise mit wesentlich einfacheren Beweisen behandelt werden als bisher; gleichzeitig haben die gutartigen Funktionen der Anschauung zugänglichere Eigenschaften als die (Cauchy-)stetigen Funktionen. Daher kann man mehr Schülern als bisher verständlich machen, worum es in der Analysis geht; wegen der kürzeren Beweise treten die Grundideen besser hervor – z. B. daß differenzierbare Funktionen im kleinen als linear vorgestellt werden können. (Karcher 1973, 46)

Leider ist z. B. $x \mapsto \sqrt{x}$ im Intervall nicht gutartig (wegen senkrechter Tangente bei $x = 0$). Mein Vorschlag „(lokaler!) Differenzierbarkeit als (Lipschitz-)Stetigkeit der Sekantensteigungsfunktion“ von 1975 scheint unterrichtsnäher zu sein als Karchers Ansatz mittels „globaler“ Stetigkeit.

Wenn auch die Nonstandard Analysis als Alternative zur Reellen Analysis unterrichtsfern erscheinen mag, so könnte sie im Lehramtsstudium – so etwa in Seminaren oder Studienarbeiten – einen Platz finden, um den Blick öffnen zu helfen.

Literatur

Baumann, Peter & Kirski, Thomas (2016): Analysis mit hyperreellen Zahlen. *In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 100/2016, 6–16.

— (2017): Analysis ohne Grenzwert! *In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 102/2017, 15–16.

Hischer, Horst (1975): Differenzierbarkeit als (Lipschitz-)Stetigkeit der Sekantensteigungsfunktion. In: *Praxis der Mathematik*, **17**(1975)7, 177–184.

— (2012): *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2012.

— (2016a): *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

URL hat sich leider kürzlich geändert, bitte jetzt:

— (2016b): *James Gregory und „Konvergenz“ – auf den Spuren zu seinem Algorithmus.* Als „Preprint Nr. 379“ erschienen in: www.math.uni-sb.de/CMS/index.php/preprint-list. Druckausgabe in: Krohn, Th. & Schöneburg, S. (Hrsg.): Mathematik von einst für jetzt. Hildesheim: Franzbecker 2016, 61–86.

Hischer, Horst & Scheid, Harald (1995): *Grundbegriffe der Analysis. Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht*. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1995. (Neubearbeitung von *„Materialien zum Analysisunterricht“*, Freiburg: Herder, 1982.)

Kaenders, Rainer (2006): Zahlbegriff, zwischen dem Teufel und der tiefen See. In: *Der Mathematikunterricht*, **52**(2006)5, 46–60.

Karcher, Hermann (1973): Analysis auf der Schule. In: *Didaktik der Mathematik*, **1**(1973)1, 46–69.

Laugwitz, Detlef (1973a): Ist Differentialrechnung ohne Grenzwertbegriff möglich? In: *Mathematisch Physikalische Semesterberichte*, **20**(1973), 189–201.

— (1973b): Ein Weg zur Nonstandard-Analysis. In: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **75**(1973), 66–93.

Papy, Georges (1970): *Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts*. Erschienen in der Reihe: Kirsch, Arnold & Steiner, Hans-Georg (Hrsg.): Moderne Mathematik in elementarer Darstellung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1970. (Übersetzung des 1968 erschienenen französischen Originals «Le premier enseignement de l'analyse» durch Joseph Hallé und Helmut Wunderling.)

Robinson, Abraham (1966): *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1966.

Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen.* Berlin / Heidelberg: Springer, 2011.

Vollrath, Hans-Joachim (1978): Rettet die Ideen! In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **31**(1978), 449–455.

Wagenschein, Martin (1976): Rettet die Phänomene! (Der Vorrang des Unmittelbaren). In: *Scheidewege*, **6**(1976)1, 76–93. Gekürzter und ergänzter Nachdruck in: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **30**(1977), 129–137.

Wunderling, Helmut (1993): *Der Begriff „Standardanteil einer hyperreellen Zahl“ und DERIVE*. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? (Tagungsband 1992: Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 25. bis 27 September 1992 in Wolfenbüttel.). Hildesheim: Franzbecker, 1993, 52–56.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
Email: hischer@math.uni-sb.de