Beweisakzeptanz von Lehramtsstudierenden der Mathematik

Generierung von neuen Hypothesen anhand einer Fallstudie

Kinga Szűcs

Problemstellung: Die Kluft zwischen dem Stellenwert von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik und im Mathematikunterricht

Beweise gelten in der Fachwissenschaft Mathematik als wesentlicher, unerlässlicher Bestandteil, sie sind das Herzstück der Mathematik (Rav, 1999), der ultimative Weg, um einerseits mathematisches Wissen formal-axiomatisch zu sichern und andererseits neues Wissen zu generieren. Wenn man auf die Historie schaut, stellt man fest, dass die Mathematik erst durch die axiomatische Grundlegung und durch die Beweise, also durch die Ableitung neuen Wissens aus bereits vorhandenen Inhalten – Letztere gesichert durch Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze –, nach vereinbarten Regeln der Logik, zu einer *Wissenschaft* im antiken Griechenland wird. Dieser axiomatische Aufbau ist bis heute die vorherrschende Methode der Wissenssicherung, somit haben Beweise nach wie vor einen sehr hohen Stellenwert in der Fachwissenschaft Mathematik. Dieser hohe Stellenwert spiegelt sich zwar auch in diversen aktuellen unterrichtsregulierenden Dokumenten wie Bildungsstandards, Curricula und Lehrpläne wider, die heutige Unterrichtspraxis ist allerdings dadurch charakterisiert, dass dort bis auf die Satzgruppe des Pythagoras kaum Beweise thematisiert werden (Brunner, 2014, S. 2). Während Beweise lange, etwa bis in die 1990er Jahre hinein, einen zwar schwierigen, aber wesentlichen Bestandteil der Unterrichtspraxis darstellten, schrumpfte ihr Stellenwert in den letzten zwei Jahrzehnten deutlich. Brunner (2014, S. 2) formuliert überdies: „Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass beim Thema »Beweisen« eine größere Diskrepanz besteht zwischen dem Anspruch, wie er sich beispielsweise in Bildungsstandards manifestiert, und der Wirklichkeit, realisiert als alltägliche Praxis des Mathematikunterrichts [. . .].“ Sie verdeutlicht hierdurch die aktuelle Kluft zwischen dem Stellenwert von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik beziehungsweise den daraus für die Unterrichtspraxis abgeleiteten Ansprüchen und dem tatsächlichen Mathematikunterricht. Um diesem Problem effektiv und langfristig entgegenwirken zu können braucht es unter anderem zukünftige Lehrpersonen, die den hohen Stellenwert von Beweisen in der Mathematik nicht nur akzeptieren und wertschätzen, sondern diesen in der Unterrichtspraxis auch aktiv an ihre Lernenden vermitteln. Dies kann erst erfolgen, wenn die zukünftigen Lehrpersonen selbst über ausgeprägtes fachliches sowie fachdidaktisches Wissen und Können bezüglich der Beweise verfügen. Mit der vorliegenden Arbeit wird somit das Ziel verfolgt, bei Lehramtsstudierenden am Ende ihrer Ausbildung zu untersuchen, welches einschlägige, schulrelevante Wissen zum Beweisen bei ihnen vorhanden ist.

Theoretischer Hintergrund: Wann gilt ein Beweis als Beweis?

In diesem Abschnitt wird kurz angerissen, was in der Fachwissenschaft Mathematik unter einem Beweis verstanden wird sowie welche Abweichungen hiervon im Mathematikunterricht erlaubt und sogar erwünscht sind. Überdies wird in Anlehnung an Heinze und Reiss (2003) auf Wissenskomponenten eingegangen, die unerlässlich für die selbstständige Beweisführung sind. Diese Wissenskomponenten können auch als Kriterien aufgefasst werden, an denen festgehalten werden kann, ob ein bestimmtes Beweisprodukt – beispielsweise eine Argumentationskette, die ein/e Lernende/r erstellt hat – in der Tat einen Beweis darstellt. Zum Schluss werden bisherige Ergebnisse zur Beweisakzeptanz – also zur Anerkennung von vorgelegten Beweisprodukten als gültige Beweise – kurz zusammengefasst.

Beweis in der Fachwissenschaft Mathematik – Beweis im Mathematikunterricht

In der Mathematik als Wissenschaft wird unter einem Beweis die deduktive und formale Herleitung einer Aussage aus Axiomen, Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen unter Beachtung der Regeln der Logik verstanden. Durch den Beweis wird aus der Aussage ein Satz, da gezeigt wurde, dass die Aussage wahr ist. Auch wenn diese Beschreibung ein Idealbild eines Beweises darstellt, und vollständige mathematische Strenge nicht realisiert werden kann (Jahnke & Ufer, 2015, S. 332), herrschen eine hohe Kohärenz und breiter Konsens in der mathematischen Gemeinschaft vor, wann eine Kette von Argumenten als Beweis akzeptiert wird (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 31). Mathematikerinnen und Mathematiker ergänzen nämlich fortschreitend die vorliegende Argumentationskette anhand ihrer sogenannten allgemein geteilten Wissensbasis und beurteilen derart ihre Gültigkeit. Ist ein formaler Beweis durch dieses Lückenschließen zumindest theoretisch erreichbar, so wird die Argumentationskette als ein gültiger Beweis akzeptiert. Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) gehen zudem darauf ein, dass diese allgemein geteilte Wissensbasis in der Schule von der in der Wissenschaft abweicht. Hieraus folgt, dass im Mathematikunterricht bestimmte Reduktionen, was insbesondere die formale Strenge betrifft, erlaubt und sogar erwünscht sind. So sollte zwar der „inhaltliche Kern" eines Beweises nicht aufgegeben werden, Abweichungen kann es jedoch bei der Notation geben. So „sollte ein Beweis aus einer Kette deduktiver Schlüsse bestehen, die von den Voraussetzungen zur Behauptung führt und dabei nur bekannte bzw. zuvor gezeigte Aussagen als Argumente in den deduktiven Schlüssen verwendet." (Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 32). Eine weitere Abweichung betrifft die axiomatische Basis: Da diese in der Schule nicht vorhanden ist und hierdurch darauf nicht zurückgegriffen werden kann, kann im Mathematikunterricht ein sogenanntes lokales Ordnen angestrebt werden. Hierbei werden bestimmte Aussagen nicht axiomatisch, sondern aus der Anschauung heraus als gültig angenommen sowie Begriffe nicht definiert, sondern ebenfalls aus der Anschauung heraus begründet (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 32). Diese Aussagen und Begriffe bilden dann die Grundlage, anhand derer weitere Aussagen deduktiv und unter Beachtung der logischen Schlussregeln abgeleitet, also bewiesen werden können.

Beweisschema, Beweisstruktur und Beweiskette

Wie anfangs bereits erwähnt, haben Heinze und Reiss (2003) Wissenskomponenten identifiziert, die notwendig für die Kompetenz sind, Beweise selbst zu führen sowie jene auf ihre Gültigkeit hin zu beurteilen. Diese Wissenskomponenten stellen gleichzeitig Entscheidungskriterien für das Vorliegen eines Beweises dar. Da dieses Modell an Wissenskomponenten in der einschlägigen fachdidaktischen Literatur oft zur Überprüfung der Beweisakzeptanz herangezogen wird – wie der nächste Abschnitt zeigt –, wird das Modell an dieser Stelle kurz vorgestellt. Die Autoren gehen davon aus, dass begriffliches Wissen sowie Kenntnisse über Regeln nicht ausreichen, um Beweise selbst führen zu können. Lernende brauchen zudem auch Verständnis für und Wissen über korrekte Beweisprozesse (Heinze & Reiss, 2003, S. 2). Dieses Wissen wird Methodenwissen genannt, da es um ein Wissen geht, dass die Methodik der Beweisführung betrifft. Die Bezeichnung wird allerdings von der Autorin der vorliegenden Arbeit für einen nicht gelungenen Ausdruck gehalten, da im fachdidaktischen Kontext Methodenwissen auch methodisches Wissen über die Vermittlung von Beweisen bezeichnen kann. Es soll nochmals betont werden, dass Letzteres hier nicht gemeint ist. Das Modell besteht aus folgenden drei, voneinander unabhängigen Komponenten:

- *Beweisschema*: Diese Komponente beschreibt das Wissen darüber, dass ein Beweis eine Kette deduktiver Schlüsse ist. Andere Arten des Begründens[1] wie Berufung auf eine Autorität oder empirisch-induktives Schließen sind nicht erlaubt. Überdies ist von Bedeutung, dass die formale Darstellung der Argumentation nicht verlangt wird, der Fokus liegt auf der Korrektheit der Schlüsse, nicht auf der verwendeten Darstellungsebene.
- *Beweisstruktur*: Hierbei geht es um das Wissen, dass ein Beweis von einer Voraussetzung oder mehreren Voraussetzungen lückenlos zur Behauptung führt. Hervorgehoben werden soll, dass die Behauptung nicht als Argument verwendet werden darf, Zirkelschlüsse also nicht zulässig sind.
- *Beweiskette*: Diese Komponente umfasst das Wissen darüber, dass jede Aussage aus der vorherigen Aussage folgt, wodurch eine logische Kette aus Beweisschritten entsteht. Eventuell ist hierzu die zusätzliche Berufung auf bereits gesichertes Wissen notwendig. (vgl. Heinze & Reiss, 2003, S. 2 und Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 36).

Ein Beweis ist also eine Argumentation, bei der nur bestimmte Schlüsse zulässig sind (Beweisschema), welche auf eine bestimmte Art und Weise zusammengefügt werden dürfen (Beweiskette) und deren Anfang und Ende gegeben sind (Beweisstruktur).

Bisherige Erhebungen und deren Ergebnisse zur Beweisakzeptanz

Im Weiteren wird kurz thematisiert, welche Argumentationen Lernende sowie Studierende als Beweise akzeptieren beziehungsweise über welche Wissenskomponenten sie dabei verfügen. Zusammenfassungen der wenigen einschlägigen, empirischen Studien findet man bei Jahnke und Ufer (2015), Heinze und Reiss (2003) sowie bei Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009).

[1] Eine Zusammenfassung der Arten des Begründens findet man in Fischer & Malle (1989, S. 178–179).

Bezogen auf die Sekundarstufe I kann anhand der Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) festgehalten werden, dass Lernende korrekte Beweise als solche zwar erkennen, dennoch formalsprachlich dargestellte Beweise eher akzeptieren als narrative. Überdies erkannten die meisten Lernenden zwar eine Argumentation mit empirischen Argumenten nicht als Beweis an (Beweisschema), sie waren aber überwiegend nicht fähig, dies auch zu begründen. Zudem konnten in dieser Studie etwa nur ein Drittel der Probanden einen Zirkelschluss (Beweisstruktur) erkennen, noch weniger konnten dies auch adäquat begründen. Lernende stuften darüber hinaus einen formal dargestellten, korrekten Beweis als einen solchen ein, den eine Lehrperson mit der besten Note bewerten, der einem selbst konstruierten Beweis nahekommen, der auch sowohl einen Schulkameraden als auch sie selbst am ehesten überzeugen würde. Es ist also insgesamt eine Tendenz bei den Lernenden zu verzeichnen, Formalismus als Kriterium anzuwenden sowie über ein intuitives, aber kein reflektiertes Wissen bezogen auf das Beweisschema und die Beweisstruktur zu verfügen.

Etwas mehr weiß man über die Beweisakzeptanz von Studierenden: Kempen (2016) hat gefunden, dass bereits Studienanfänger formal aufgeschriebene Beweise gegenüber beispielgebundenen, aber korrekten Argumentationen bevorzugen. Im Umkehrschluss bedeutet dieser Befund, dass die Erfülltheit des Kriteriums Beweiskette weniger eingesehen wird, wenn die Darstellung der Argumentation nicht formal ist. Formalismus gilt auch in der Studie von Füllgrabe und Eichler (2017) als wichtigstes Kriterium bei der Beweisakzeptanz für Studierende des Grundschullehramts. Die Autoren stellen zudem fest, dass zwar ein Wissen über die Beweisstruktur vorhanden ist, die Erfülltheit des Kriteriums die Studierenden allerdings nur auf einer oberflächlichen Ebene einfordern. In einer weiteren Studie formulieren sie die Hypothese (Füllgrabe & Eichler, 2018), dass Lehramtsstudierende mit ausgeprägter Beweiskompetenz – diese Studierenden sind fähig, Beweise, die die Kriterien Beweisschema, -struktur und -kette erfüllen, in einem vertrauten Kontext selbst zu führen – Argumentationen nach diesen Kriterien, also nach der logischen Struktur bewerten und als Beweise einstufen, wenn diese Kriterien erfüllt sind, während Studierende mit weniger ausgeprägter Beweiskompetenz dies eher entlang oberflächlichen, formalen Kriterien wie Nennung von „q.e.d." etc. tun.

Forschungsfragen

Wie anfangs bereits formuliert, wird in der vorliegenden Arbeit das Ziel verfolgt, das einschlägige Wissen von Studierenden des Lehramts zu untersuchen, weil dies eine Voraussetzung für die erfolgreiche Vermittlung des hohen Stellenwertes von Beweisen in der Mathematik und somit eines authentischen Bildes von der Mathematik darstellt. Die bisherigen Befunde stammen aus Studien, in denen (Lehramts-)studierende im universitären Kontext – z. B. im Rahmen einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung – befragt wurden. Man kann unterstellen, dass in diesem Kontext die Studierenden die an sie gestellten Fragen und Aufgaben zu Beweisen vor dem Hintergrund der an Universitäten vorherrschenden Beweiskultur beantworten. Es stellt sich aber die Frage, inwieweit die gleichen Kriterien für Studierende des Lehramts in einem schulischen Kontext eine Rolle spielen, sprich, das, was sie als Beweis an der Universität akzeptieren, muss nicht zwangsläufig damit übereinstimmen, was sie in einem schulischen Kontext als Beweis akzeptieren, Letzteres würde eine zukünftige Unterrichtspraxis eher voraussagen. Somit waren anhand der oben dargestellten Theorie folgende Forschungsfragen leitend für die vorliegende Fallstudie:

- *Forschungsfrage 1:* Inwieweit akzeptieren Studierende des Lehramts die genannten möglichen und erwünschten Abweichungen von einem wissenschaftlichen Beweis in der Schule (formale Darstellung sowie axiomatische Basis), wenn der schulische Kontext explizit hervorgehoben wird?
- *Forschungsfrage 2:* Beurteilen Studierende des Lehramts vorgelegte Argumentationen entlang der genannten Komponenten des Methodenwissens oder entlang oberflächlicher Kriterien, wenn der schulische Kontext explizit hervorgehoben wird?
- *Forschungsfrage 3:* Welche weiteren Hypothesen können anhand der Beurteilung von vorgelegten, schulischen Argumentationen für Studierende des Lehramts abgeleitet werden?

Um diese Fragen zu beantworten wurde eine Fallstudie an der Universität Erfurt durchgeführt, über die nachfolgend detailliert berichtet wird.

Fallstudie an der Universität Erfurt

An der Universität Erfurt werden Lehrpersonen für die Grundschule, Regelschule, Förderschule und für berufsbildende Schulen im Bachelor/Master ausgebildet. Da hierdurch ein breites Spektrum an Schulformen abgedeckt wird, eignet sich der Standort insbesondere, Einblicke in das einschlägige Wissen über Beweise von zukünftigen Lehrpersonen zu gewinnen.

Forschungsdesign

Die Studie wurde in starker Anlehnung an die Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) konzipiert. Zur Erfassung des Methodenwissens wurden die dort veröffentlichten vier fiktiven Schülerlösungen von Achtklässlern Studierenden des Lehramts digital vorgelegt. Es geht um den Beweis des Satzes, dass die Seitenmittelpunkte einer Raute ein Rechteck bilden (Spezialfall des Satzes von Varignon). Die ersten beiden Schülerlösungen sind fehlerhafte Argumentationsbeispiele, da in der ersten Lösung empirische Argumente (Messen) verwendet werden und die zweite Lösung einen Zirkelschluss enthält. Während Erstere eine Lösung im narrativen Stil darstellt, ist Letztere ein eher formal verfasstes Argumentationsbeispiel. Die dritte und die vierte Lösung sind korrekte Beweise, von denen die dritte eher formalsprachlich, die vierte eher narrativ verfasst ist (vgl. auch Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 39). Die Probanden hatten die Aufgabe, einerseits zu entscheiden, ob es jeweils um einen korrekten Beweis geht, andererseits bei einer Ablehnung als Beweis diese Entscheidung auch zu begründen. Überdies wurden die Probanden aufgefordert – ebenfalls in Anlehnung an die Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) –, die Schülerlösungen nach verschiedenen Kriterien zu bewerten. Sie mussten auswählen, welche Argumentation ihrer Meinung nach eine Lehrperson mit der besten Note bewerten, eine/n Lernende/n in der Klassenstufe 8 am ehesten überzeugen, sie selbst am ehesten überzeugen sowie ihrer eigenen Lösung am ehesten nahekommen würde. Die Antworten wurden allerdings im Gegensatz zur Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) nicht quantitativ, sondern qualitativ ausgewertet, lediglich Anzahlen wurden bestimmt. Bei der Bewertung der Schülerlösungen nach verschiedenen Kriterien wurde nicht nach präferierter Lösung je nach Kriterium, sondern nach Konsistenz in den Antworten Ausschau gehalten. Wie dies konkret erfolgte, wird im Abschnitt Kodierung näher erleuchtet. Die Beweiskompetenz der Probanden an sich wurde nicht ermittelt.

Durchführung

Die Fallstudie wurde Ende des Sommersemesters 2020 und Anfang des Wintersemesters 2020/21 mit Lehramtsstudierenden der oben genannten Schulformen im Rahmen zweier Master-Lehrveranstaltungen durchgeführt. Studierende in diesen Kursen haben bereits einen Großteil ihrer fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Ausbildung hinter sich. Wegen der aktuellen Bedingungen fanden die Lehrveranstaltungen online statt, sodass auch die Befragung mit Hilfe eines digitalen Fragebogens erfolgte. Dies hatte allerdings zur Folge, dass die freiwillige Teilnahme sehr gering ausfiel, nur elf Studierende haben die letzte Seite der Befragung erreicht. Ein Grund hierfür sieht die Autorin im digitalen Format: Während Studierende am Ende einer Präsenzveranstaltung eher dazu neigen, einer Bitte der persönlich anwesenden Lehrperson zur Teilnahme an der Befragung nachzukommen, reduziert sich der Wille zum Tun durch die Distanz enorm. Überdies soll angemerkt werden, dass die verwendete Plattform (Moodle) zwar auch persönliche Daten erfasste, die Antworten wurden aber nach dem Abschluss der Befragung anonymisiert. Zudem gilt, dass einige Studierenden auch bei Schülerlösungen, die als Beweis eingestuft wurden, eine Begründung ihrer Entscheidung verfasst haben. Diese Begründungen – da sie wertvolle Argumente enthalten –, wurden in die Analyse ebenfalls aufgenommen, somit lagen insgesamt 20 Begründungen in Textform vor.

Kodierung

Um die Forschungsfrage 1 zu beantworten wurde die Akzeptanz von narrativen (Schülerlösung 1 und 4) und formalen (Schülerlösung 2 und 3) Argumentationsbeispielen festgehalten und durch einfaches Auszählen miteinander verglichen. Zudem wurden die von den Probanden formulierten Begründungen auf Textstellen hin überprüft, die sich auf Formalismus bzw. auf die axiomatische Basis beziehen. Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen: Gegen das Vorliegen eines Beweises wird an der folgenden Textstelle argumentiert, da formale Kriterien nicht erfüllt werden: „...und er hat auch keine (ebenso wenig *halb-)formale* Argumentation niedergeschrieben“ (Proband 4); während an der Textstelle „Die Gültigkeit begründet er somit *aus der Anschauung heraus*“ (Proband 8) für das Vorliegen eines Beweises ein Argument herangezogen wird, bei dem die Verwendung einer axiomatischen Basis in den Hintergrund gerät.

Bezogen auf die Forschungsfrage 2 wurde eine Zuordnung der gelieferten Begründungen zu den Kategorien „Beweisschema“, „Beweisstruktur“, „Beweiskette“ sowie „oberflächliche Kriterien“ vorgenommen. Auch dieser Prozess soll an Beispielen verdeutlicht werden. Die richtige Entscheidung, dass es bei der Schülerlösung 2 um keinen Beweis geht, wurde mit Hilfe von Argumenten bezogen auf die Beweisstruktur an der folgenden Textstelle begründet: ′′ Christian hat *nicht zwischen Voraussetzung und Behauptung unterschieden*. Er hat Winkel im Rechteck als *Begründung, somit als vorgegebenen Fakt* gewählt, *anstatt genau dies zu beweisen*“ (Proband 5). Diese Begründung wurde als „Beweisstruktur“ kodiert. Ein richtiges Argumentationsbeispiel (Schülerlösung 3) wurde fälschlicherweise als kein Beweis in der folgenden Begründung eingestuft: „*Schlussfolgerung* alle 4 Innenwinkel von EFGH sind kongruent ist *nicht nachvollziehbar*.“ (Proband 5). Da hier offensichtlich ein Fehler in der Beweiskette vermutet wurde – Aussage folgt nicht oder nicht ersichtlich aus den vorherigen Aussagen –, wurde diese Begründung der Kategorie „Beweiskette“ zugeordnet.

Weitere Hypothesen (Forschungsfrage 3) wurden aus einer quantitativen Analyse der Konsistenz der Antworten bei der Beurteilung der Schülerlösungen nach vorgegebenen Kriterien abgeleitet. Hierzu wurden die Antworten jedes einzelnen Probanden untereinander verglichen und Übereinstimmungen sowie Abweichungen notiert. Aus den vier genannten Bewertungskriterien (Argumentationsbeispiel bewertet mit der besten Note durch die Lehrperson; Argumentationsbeispiel, das eine/n /r Lernende/n in der Klassenstufe 8 überzeugt; Argumentationsbeispiel, das sich selbst überzeugt; Argumentationsbeispiel, das der eigenen Lösung nahekommt) können insgesamt sechs Paare gebildet werden, die jeweiligen Antworten der Probanden können bezogen auf diese Paare übereinstimmen oder eben nicht (vgl. Tabelle 3). Beispielsweise wurden die Antworten des Probanden 2: *Schülerlösung 3 – Schülerlösung 3 – Schülerlösung 4 – Schülerlösung 4* als Übereinstimmung bezogen auf die Paare „Lehrperson – SuS in der 8. Klasse“ und „sich selbst – eigener Beweis“, aber als Nicht-Übereinstimmung bezogen auf alle weiteren vier Paare kodiert. Anschließend wurde die Anzahl der Übereinstimmungen pro Paar bestimmt und daraus – auch wenn dies wegen der geringen Anzahl an Gesamtantworten nur beschränkt möglich ist –, wurden Tendenzen abgelesen.

Ergebnisse

Bezogen auf die Forschungsfrage 1 liegen folgende Befunde vor: Tabelle 1 enthält, wie viele Argumentationsbeispiele von den Probanden in der Tat als Beweis akzeptiert wurden. Beispielsweise bedeutet die Zahl 2 in der linken oberen Ecke, dass zwei Probanden das unzureichende Argumentationsbeispiel in narrativem Stil (Schülerlösung 1) als Beweis einstuften.

Wegen der kleinen Stichprobenzahl ist zwar keine aussagekräftige Interpretation der Daten möglich, man kann den Daten dennoch entnehmen und festhalten, dass bei korrekten Argumentationsbeispielen formale Kriterien keine Rolle spielten: Die Probanden haben sowohl narrative als auch formal verfasste Schülerlösungen als Beweis akzeptiert. Dahingegen ist bei inkorrekten Argumentationsbeispielen eine leichte Tendenz zu beobachten, formal aufgeschriebene Lösungen als Beweis anzuerkennen. Die qualitative Auswertung der Begründungen ergab, dass lediglich ein Proband – allerdings an drei verschiedenen Stellen – den Formalismus als ein Kriterium für einen Beweis explizit ansprach. Umgekehrt kann dieser Fakt auch so interpretiert werden, dass die Mehrheit der Probanden formale Kriterien für das Vorliegen eines Beweises für nicht notwendig hielt. Hinzu kommt, dass an insgesamt vier Stellen das lokale Ordnen von Inhalten, also eine Abkehr von der axiomatischen Basis für richtig gehalten wurde. Insgesamt zeigt sich somit ein positives Bild mit Bezug zur Forschungsfrage 1: Die Probanden, also Lehramtsstudierende am Ende ihrer Ausbildung setzen zulässige und sogar erwünschte Abweichungen von einem wissenschaftlichen Beweis als geeignete Kriterien im schulischen Kontext adäquat ein.

Bezogen auf die Forschungsfrage 2 sind die Befunde in der Tabelle 2 zu finden. Dieser kann man insbesondere entnehmen, dass Lehramtsstudierende in der vorliegenden Fallstudie keine oberflächlichen Kriterien bei der Beweisakzeptanz genannt haben. Das fehlerhafte Argumentationsbeispiel wurde mit Hilfe von Argumenten bezogen auf das Be-

Tabelle 1. Von Lehramtsstudierenden als Beweis akzeptierte Argumentationsbeispiele im schulischen Kontext

Stil	fehlerhaftes Argumentationsbeispiel	korrektes Argumentationsbeispiel
narrativ	2	9
formal	4	9

Tabelle 2. Bezug der Argumente in den Begründungen der Lehramtsstudierenden

Argument in der Begründung	fehlerhaftes Argumentationsbeispiel		Korrektes Argumentationsbeispiel	
	narrativ	formal	narrativ	formal
Beweisschema	7	0	0	0
Beweisstruktur	0	2	0	1
Beweiskette	0	5	2	3
Oberflächliche Kriterien	0	0	0	0

Tabelle 3. Konsistenz der Bewertungen in der Fallstudie mit Lehramtsstudierenden

Paar von Bewertungskriterien	Übereinstimmung	Abweichung
Beste Note von der Lehrperson – Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse	6	3
Beste Note von der Lehrperson – Überzeugung von sich selbst	3	6
Beste Note von der Lehrperson – eigener Beweis	2	7
Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse – Überzeugung von sich selbst	3	6
Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse – eigener Beweis	3	6
Überzeugung von sich selbst – eigener Beweis	3	6

weisschema bewertet: Sechsmal bemängelten die Probanden, dass durch das Überprüfen einzelner Beispiele keine Allgemeingültigkeit erreicht wurde. Leider gingen diese Probanden auf die Unzulässigkeit von empirischen Argumenten (Zeichnen, Messen) nicht ein, ein weiterer Proband sprach dies sogar als Pro-Argument für einen Beweis an. Dies kann man so deuten, dass für die Probanden die Deduktion an sich kein Kriterium darstellt, sie hätten auch ein induktives Vorgehen akzeptiert, vermissen aber den Schritt vom Konkreten zum Allgemeinen. Da die Deduktion nicht als notwendiges Kriterium für die Probanden gilt, lassen diese auch empirische Argumente wie Zeichnen und Nachmessen zu. Die weiteren drei Argumentationsbeispiele wurden mit Hilfe von Argumenten bezogen auf die Beweisstruktur – interessanterweise nur bei den beiden formalen Beispielen – beziehungsweise auf die Beweiskette bewertet. Interpretiert werden können diese Ergebnisse derart, dass die Probanden die Kategorien „Beweisschema", „Beweisstruktur" und „Beweiskette" hierarchisch einsetzen: Zuallererst wird die Allgemeingültigkeit einer Argumentation überprüft, wobei sowohl induktive als auch deduktive Schlüsse erlaubt sind. Ist eine Allgemeingültigkeit gewährleistet, so wird die Argumentation – falls diese formal vorliegt – auf ihre Struktur hin, unabhängig aber von ihrem formalen oder narrativen Stil auf ihre Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit hin überprüft. Diese Interpretation stellt zunächst eine Hypothese (Hypothese 1) dar, sollten allerdings weitere empirische Befunde diese verstärken, so geht es hier um eine Ausdifferenzierung des Modells von Heinze und Reiss (2003), zumal sie von der Gleichstellung der drei Wissensbereiche (Beweisschema, -struktur – und kette) ausgingen.

Neun Probanden äußerten sich zu den weiterführenden Kriterien und ordneten diesen Schülerlösungen zu. Die Übereinstimmungen bei dieser Zuordnung sind in Tabelle 3 zu finden.

Auch wenn wegen der kleinen Teilnehmerzahl in der Fallstudie lediglich mögliche Tendenzen erkannt werden können, lohnt es sich dennoch, diese Tendenzen aus der Tabelle abzulesen und als Hypothesen für die zukünftige empirische Forschung zu formulieren. Die erste Zeile der Tabelle legt nahe, dass Lehramtsstudierende denken, dass derselbe Beweis eine/n Lernende/n in der 8. Klasse überzeugen und die Lehrperson mit der besten Note bewerten würde. Der bestbewertete Beweis, der meines Erachtens das Idealbild eines Beweises im schulischen Kontext darstellt, ist also auch einleuchtend für eine/n Lernende/n (Hypothese 2). Etwas Gegensätzliches liest man allerdings aus der zweiten Zeile heraus: Der Beweis, den die Lehrperson mit der besten Note bewerten würde, ist nicht zwangsläufig mit dem Beweis identisch, der einen selbst überzeugt (Hypothese 3). Interessant ist auch die Tendenz, die die dritte Zeile nahelegt, nämlich, dass die Lehramtsstudierenden – obwohl sie angehende Lehrpersonen sind –, sich nicht imstande fühlen einen Beweis selbst zu führen, der den Erwartungen einer Lehrperson, sprich dem Idealbild eines schulischen Beweises entspricht (Hypothese 4). Zudem können die Hypothesen formuliert werden (Zeile 4 und 5), dass die Lernenden in der 8. Klasse einerseits ein anderer Beweis überzeugen würde als die Lehramtsstudierenden (Hypothese 5), Ersterer aber andererseits von dem Beweis abweicht, den Lehramtsstudierende selbst liefern würden (Hypothese 6). Beide Hypothesen können möglicherweise mit der unterschiedlichen geteilten Wissensbasis in der Schule beziehungsweise in der Hochschule begründet werden. Hinzu kommt der äußerst überraschende Befund (Zeile 6), dass Lehramtsstudierende nicht unbedingt den Beweis, den sie selbst führen würden, als sich überzeugend empfinden (Hypothese 7). Hinter dieser Hypothese können Zweifel an den eigenen Fähigkeiten oder mangelnde Motivation liegen.

Fazit und Ausblick

In der hier präsentierten Fallstudie wurden teilweise abweichende Befunde gegenüber bisherigen einschlägigen empirischen Studien mit Lehramtsstudierenden ermittelt, Grund hierfür kann der explizit hervorgehobene schulische Kontext sein. So wurde gefunden, dass formale Kriterien bei der Beurteilung von Schülerlösungen durch Lehramtsstudierende kaum eine Rolle spielen und dass Letztere im schulischen Kontext adäquate Abweichungen vom wissenschaftlichen Beweis befürworten. Die Schülerlösungen wurden zudem – wiederum abweichend von den bisherigen empirischen Befunden – nicht entlang oberflächlicher Kriterien, sondern entlang der Wissenskomponenten nach Heinze und Reiss (2003) bewertet, die durchgeführte Analyse lässt eine hierarchische Struktur der Wissenskomponenten vermuten, die es noch zu belegen gilt. Überdies konnten mit Hilfe einer Konsistenzanalyse weitere sechs Hypothesen abgeleitet werden, die verschiedene Sichtweisen auf Beweise – so die Lehrersicht, - die Schülersicht und das Selbstbild von angehenden Lehramtsstudierenden –, miteinander verbinden. Die Ergebnisse wurden im Rahmen einer Fallstudie mit geringer Teilnehmerzahl ermittelt, sodass die Schlussfolgerungen vor diesem Hintergrund einzuordnen sind. Eine Überprüfung der ermittelten Ergebnisse sowie der abgeleiteten Hypothesen im Rahmen einer groß angelegten Untersuchung wird daher angestrebt.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Grundlagen, Befunde und Konzepte. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. DOI:10.1007/978-3-642-41864-8

Fischer, R., & Malle, G. (1989). *Mensch und Mathematik*. Zürich: Bibliographisches Institut.

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2017). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2018). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 4–6. www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf (7. 12. 2020)

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica 7*(1), 5–41.

Kempen, L. (2016). Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. Münster: WTM-Verlag.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematikdidaktik, 30*(1), 30–54.

Kinga Szűcs, Universität Erfurt
E-Mail: kinga.szuecs@uni-erfurt.de