Anmerkungen zum Diskussionsbeitrag von Andreas Vohns in MGDM 110

Günter Graumann

Vor wenigen Tagen las ich in den MGDM 110 den Beitrag von Andreas Vohns über Bildung und Digitales mit Interesse und weitgehender Zustimmung. Am Ende habe ich dann erfahren, dass Herr Vohns im Januar verstorben ist, was mich sehr betroffen gemacht hat.

Ich habe Andreas Vohns vor mehr als 10 Jahren im Arbeitskreis Mathematik und Bildung, den ich zusammen mit Karl Röttel von 1993 bis 2011 geleitet habe, kennen gelernt. Die weitere Gestaltung und Leitung konnte ich dann an jüngere Kollegen weitergeben, wobei vor genau 10 Jahren, am 24. 2. 2011 u. a. Andreas Vohns die Leitung übernahm.

Andreas Vohns lernte ich als kompetenten, tiefer schürfenden und kritischen Kollegen kennen. Seine differenzierte und kritische Haltung zeigt sich auch in dem oben genannten Diskussionsbeitrag in MGDM 110. Leider konnte ich an der Online-Herbsttagung 2020 des Arbeitskreises Mathematik und Bildung aus terminlichen Gründen nicht teilnehmen, obgleich ich gerne noch mit Andreas Vohns über seinen Vortrag dort diskutiert hätte. Da das nun leider nicht mehr möglich ist, möchte ich hier einen Punkt ansprechen, was sicherlich im Sinne von Andreas Vohns gewesen wäre.

Im Zusammenhang mit der Erörterung von „critical litaracy" für Digitales und Digitalisierung hat Andreas Vohns das Presse- und Informationsamt der Bundesregierung 2020, S. 10, zitiert und schreibt dazu: „Als *advocatus amicii* will ich hier zunächst festhalten, dass diese Willensbekundung in der Tat Minimalforderungen an ein Bildungskonzept genügt, wenn gefordert wird, dass alle Menschen *den digitalen Wandel selbstbestimmt mitgestalten* und *verantwortungsvoll mit den Risiken* umgehen können sollen." (MGDM 110, S. 50) Und kurz davor schreibt er: „[. . .], dass zur Digitalisierung eben auch alle durch solche Umstellung hervorgerufenen gesellschaftlichen Transformationsprozesse gehören. [. . .] Im Sinne von Roland Fischer (2012) wäre eine *bewusst gestaltete Digitalisierung* automatisch schon ein gesellschaftlicher Bildungsprozess. Was natürlich noch in keiner Weise klärt, was in der Schule oder im Mathematikunterricht zu passieren hat. Und da gehen die Meinungen auch etwas auseinander, ob und wie nämlich Schule auf Digitalisierung außerhalb von Schule und Unterricht durch *bewusst gestaltete Digitalisierung von Schule und Unterricht* reagieren soll." (ebd., S. 49)

Auf den hier angesprochenen Aspekt geht Andreas Vohns dann leider später nicht mehr ein. Ich würde deshalb gern ergänzen, dass Mathematikdidaktiker/innen und Mathematiklehrer/innen nicht nur die Rolle von „Digitalisierung und Mathematikunterricht" diskutieren und im Mathematikunterricht mit Schüler/innen thematisieren sollten. *Auch Umfang und Formen der Digitalisierung im Alltag generell sowie mögliche Grenzen sinnvoller Digitalisierung* gehören dazu, denn Schüler/innen sollten gegenwärtig und vor allem später fundierte Kenntnisse über Digitalisierung in den gesellschaftlichen Prozess der Digitalisierung miteinbringen können.

Günter Graumann, Universität Bielefeld
E-Mail: graumann@mathematik.uni-bielefeld.de

Zur Äquivalenz von Gleichungen und von Ungleichungen

Horst Hischer

1 Vorbemerkung

Im Anschluss an das Erscheinen meines Essays *‚Was ist eine Gleichung?'* (2021) wies mich Reinhard Oldenburg darauf hin, dass ich nicht auf die von ihm betrachtete *Äquivalenz von Gleichungen* (2016) eingegangen sei. Dieser zutreffende Fakt stand jedoch nicht im Fokus meiner zugrunde liegenden *‚Studien zum Gleichungsbegriff'* (2020). Auch war (wohl nicht nur) für mich bis dato eine *solche Äquivalenz* ebenso wenig problembehaftet wie zuvor schon der Umgang mit dem Gleichungsbegriff: Diese Äquivalenz zeigte sich in der *Übereinstimmung der „Lösungsmengen"* zweier Gleichungen (allgemeiner: zweier „numerischer" Aussageformen) bezüglich einer gemeinsamen „Grundmenge“ G, und zwar mit der Konsequenz, dass deren *Lösungsmengen von der jeweiligen Grundmenge abhängen*, was beispielsweise formalisierbar ist durch

$$A_1(x, y, \ldots) \underset{G}{\Leftrightarrow} A_2(x, y, \ldots),$$

wobei „$\Leftrightarrow$“ hier *„logische Äquivalenz“* bedeutet.

Der o. g. Hinweis von Oldenburg war für mich Anlass zu einer vertiefenden Betrachtung: Zunächst war aus dieser didaktischen Motivation heraus zu prüfen, ob es bereits in der Mathematik bezüglich der „Äquivalenz von Gleichungen“ ein stabiles definites Verständnis gibt. Daher bezog ich auch Ulrich Felgner (Univ. Tübingen) in grundlagentheoretische Betrachtungen zur Mathematischen Logik mit ein. Beiden Kollegen habe ich für die somit angeregten weiteren, vertiefenden Reflexionen zu danken, ebenso Wilfried Herget (Univ. Halle-Wittenberg) für kritisch-konstruktive Rückmeldungen während der Entstehung dieser Darstellung.

Nachfolgend wird das Ergebnis skizziert, auch Ungleichungen berücksichtigend. Verallgemeinernd betrifft dies dann die Frage nach möglichen Bedeutungen einer „Äquivalenz numerischer Aussageformen“. Es wird der in (Hischer 2020; 2021) definierte Gleichungsbegriff zugrunde gelegt.

2 Ein kurzer Blick in die Literatur

Zunächst sei exemplarisch ein Blick in das *‚Lexikon der Mathematik‘* (2000) geworfen: Die Wortbestandteile „äquivalent-“ bzw. „äquivalenz-“ tauchen in der Stichwortliste 8-mal bzw. 18-mal in unterschiedlichen Zusammenhängen auf, was deren Bedeutung für die Mathematik betont, zugleich aber auch die vielfältigen Kontexte von „äquival...“ im Sinne von „gleichwertig“. Diese „Gleichwertigkeit“ scheint also in der Mathematik stets einer *kontext-bezogenen* Interpretation zu bedürfen. Andererseits begegnet uns die „Äquivalenz“ im Terminus „Äquivalenzrelation“ ganz offensichtlich auch abstrakt in *kontext-unabhängiger* Bedeutung.

Ulrich Felgner analysierte kürzlich die „Äquivalenz“ gemeinsam mit der „Gleichheit“ und der „Identität“ im Sinne eines grundlegenden Begriffs (Felgner 2020), und zwar schreibt er u. a. zunächst mit Bezug auf die lateinischen Wurzeln (ebd., S. 112):

> Die Relation der *„Äquivalenz“* ist demnach im ursprünglichen Wortsinne eine Relation der *Gleichwertigkeit*, also eine Relation der Gleichheit, die aber nur die Wertigkeit (oder die Größe) betrifft.

Er weist darauf hin, dass Giuseppe Peano den Begriff der *Äquivalenzrelation* 1894 mit den wohlbekannten Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* in die Mathematik eingeführt habe, wobei die Gleichheitsrelation dieselben Eigenschaften habe, beide also *synonym* seien (was „dasselbe benennend“ bedeutet), womit sie zwar dieselbe *Extension* hätten, jedoch nicht dieselbe *Intension* (ebd., S. 117), und er merkt an:

> Niemand würde in einem mathematischen Kontext den Ausdruck *„ist gleich“* durch *„ist äquivalent“* ersetzen – auch nicht umgekehrt. Anders als im Begriff der Gleichheit muß im Begriff der Äquivalenz nicht explizit auf die Übereinstimmung der jeweils relevanten Merkmale Bezug genommen werden.

Zurück zum *‚Lexikon der Mathematik‘*: Unter den dort angegebenen 26 Stichworten zu „äquival...“ kommt *keines* vor, das auf „äquivalente Gleichungen“ oder „Äquivalenz von Gleichungen“ verweist. Jedoch tritt das Stichwort „Äquivalenzumformung“ auf, mit dem Verweis auf die Einträge „Rechnen mit Gleichungen“ und „Rechnen mit Ungleichungen“ .

Der erste dieser beiden letztgenannten lexikographischen Einträge beginnt wie folgt:

> **Rechnen mit Gleichungen**, das Umformen von ↗ Gleichungen in andere Gleichungen, meist mit dem Ziel des Vereinfachens und ↗ Lösens von Gleichungen.

Das *Anliegen* dieses Eintrags – auf den vom Stichwort „Äquivalenzumformung“ aus verwiesen wird! – ist die *Ermittlung aller Lösungen* einer Gleichung bezüglich einer gegebenen Menge, z. T. „Definitionsbereich“ oder auch „Grundmenge“ genannt (s. o.).

In dem Eintrag steht u. a. „meist mit dem Ziel des Vereinfachens“, was nicht zufriedenstellen mag, denn ein „Vereinfachen“ ist kaum objektivierbar (und eher nicht definierbar), obwohl Kenner dafür situativ ein gutes Gefühl haben mögen. Das dann folgende *„Lösen* von Gleichungen“ wird zwar im didaktischen Kontext ein vorrangiges Ziel sein, es sei denn, dass es situativ darum geht, im Sinne von „Fingerübungen“ einen konkreten Term in einen konkreten anderen zu überführen. (Vielleicht erklärt sich damit das vorausgehende „meist“, das grammatisch hierauf zu beziehen ist.) Es folgt eine umfangreiche Darstellung, die wie folgt beginnt:

> Man unterscheidet dabei zwischen äquivalenten Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert, und nichtäquivalenten Umformungen, die die Lösungsmenge möglicherweise ändern. [...]

Es ist anzumerken, dass von „äquivalenten Umformungen“ gesprochen wird, obwohl das vorausgehende Stichwort „Äquivalenzumformung“ ist, das per se nicht dasselbe bedeutet, wobei wir aber für das Weitere wohl unterstellen müssen, dass bei beiden dasselbe gemeint ist.

„Äquivalenzumformungen“ von Gleichungen sind demgemäß durch den *Erhalt ihrer Lösungsmengen* gekennzeichnet, wobei die Existenz einer solchen Lösungsmenge dann das Vorliegen einer konkreten *Grundmenge* einzusetzender Individuen voraussetzen wird! Statt nun zu definieren, was „Äquivalenzumformungen“ sind, wird für zwei Gleichungen G_1 und G_2 folgende (als Definition anzusehende) Kennzeichnung bezüglich einer dort „Definitionsbereich“ genannten Grundmenge D formuliert:

$$G_1 \sim_D G_2 \Leftrightarrow \mathbb{L}_D(G_1) = \mathbb{L}_D(G_2) \qquad (*)$$

Wir können die linke Seite als „G_1 ist bezüglich D äquivalent zu G_2“ lesen, und das wird hier als *gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der beiden dort so genannten „Lösungsmengen“* bezüglich D beschrieben.

Als Relationszeichen wird in (*) die bei (allgemeinen) Äquivalenzrelationen übliche Tilde $\sim$ in der zunächst modifizierten Form $\sim_D$ verwendet, ergänzt um den Hinweis, dass „*man $\sim$ anstelle von $\sim_D$ schreiben*“ kann, falls der „*Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ersichtlich*“ ist.

Es ist noch anzumerken, dass $\sim_D$ in der Tat eine Äquivalenzrelation ist, weil diese Relation hier definitorisch auf die Gleichheitsrelation zurückgeführt wird (s. o.), die bekanntlich eine Äquivalenzrelation ist.

Obiges Zitat dient der Beschreibung „äquivalenter Umformungen“, und die ebenfalls erwähnten „nicht-äquivalenten“ tauchen wohl nur auf, um fehlerhafte Umformungen benennen zu können. Der Terminus „Lösungsmenge“ wird *hier undefiniert* verwendet, aber an anderer Stelle tritt (*dort synonym* zu verstehen) der Eintrag „Erfüllungsmenge“ auf.

Mit Bezug auf den Termbegriff der Mathematischen Logik folgt ein Katalog „zulässiger“ Umformungsregeln, die von einer (aus Termen gebildeten) Gleichung zu einer dazu äquivalenten gemäß (*) führen. Ein *Term* ist dabei eine „*aus Konstanten, Variablen, Operations- und Funktionssymbolen nach den üblichen Regeln des ‚Formelbaus' zusammengesetzte Zeichenreihe*“ (ebd.), die rekursiv erzeugt werden kann. Wir beachten, dass dazu eine konkrete *Struktur* vorliegen muss, über der solche Terme gebildet werden (z. B. ein Körper), dass ferner für die betrachteten Terme ggf. gemeinsame „Definitionsbereiche“ vorauszusetzen sind. Es folgen wichtige Umformungsregeln für die *Äquivalenz je zweier Gleichungen*:

$$(T_1 = T_2) \sim (T_2 = T_1) \qquad \text{(G1)}$$

Diese Regel mag trivial erscheinen, sie ist aber wichtig, denn sie gilt z. B. nicht für Ungleichungen vom Typ „$<$“ bzw. „$>$“. Weitere Regeln betreffen die eigentliche *Termumformung*. Dazu sei T ein weiterer Term, „*dessen Definitionsbereich den der Gleichung $T_1 = T_2$ enthält*“ (ebd.):

$$(T_1 = T_2) \sim (T_1 + T = T_2 + T) \qquad \text{(G2)}$$

$$(T_1 = T_2) \sim (T_1 - T = T_2 - T) \qquad \text{(G3)}$$

Im Sinne von „auf beiden Seiten dasselbe machen“ – z. B. ist bei (G2) die „Addition von T“ die zu betrachtende „Termumformung“ – folgen *Regeln für die Multiplikation*, die *eingeschränkte Division* und die *Funktionswertbildung*, und schließlich enthält ein analoger weiterer Eintrag Regeln für die *Äquivalenzumformung von Ungleichungen*.

3 Äquivalenz von Gleichungen vs. Äquivalenzumformung

Oldenburg weist in seiner Untersuchung darauf hin, dass man in der didaktischen Literatur (und auch in Schulbüchern) unterschiedliche, inkonsistente Auffassungen von „Äquivalenz“ in Bezug auf Gleichungen findet, und er stellt eingangs in diesem Kontext die nahe liegende Frage, ob denn z. B. die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ äquivalent seien. Dazu bezieht er sich auf *zwei* von Arnold Kirsch 1997 aufgeführte Auffassungen einer solchen Äquivalenz: nämlich auf eine *Lösungsmengenäquivalenz* und auf eine *variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz*.

Falls man nun unterstellen würde, dass in beiden Gleichungen jeweils nur die Einsetzung 0 eine wahre Aussage liefert und diese also die Gleichungen „löst“, könnte man meinen, dass beide dieselbe Lösungsmenge haben und also *in diesem Sinn äquivalent* seien. Da andererseits aber beide Gleichungen verschiedene Variablen enthalten, wären sie *im Sinne der zweiten Auffassung nicht äquivalent*, obwohl sie dieselbe Lösungsmenge zu haben scheinen. Beide Beispiele sind jedoch unvollständig, weil die Existenz einer *Lösungsmenge* sich auf eine vorgegebene *Grundmenge* bezieht, eine solche aber hier gar nicht genannt wurde. Das könnte man zwar in beiden Fällen scheinbar retten, indem man eine Menge G mit $0 \in G$ als Grundmenge voraussetzt, jedoch löst das dieses Problem keineswegs: *Das alles ist subtil und wird noch genauer zu betrachten sein!*

Oldenburg merkt ferner an, dass die „*Äquivalenz von Gleichungen* [. . .] *ein zentraler Begriff in der Mathematik der Sekundarstufe I*“ sei und dass Auffassungen im Sinne der „Lösungsmengenäquivalenz“ in den Schulbüchern dominieren würden, und er ergänzt, dass eine kleine Umfrage unter Kollegen ergeben habe, dass keine einheitlichen Auffassungen vorlägen, die „Lösungsmengenäquivalenz“ jedoch dominieren würde.

Hier ist nun zu fragen, ob und warum im Mathematikunterricht die „Äquivalenz von Gleichungen“ (und von Ungleichungen) von Bedeutung sein kann, wo es doch neben diesem interessanten, eher philosophischen Aspekt vor allem darum geht, Gleichungen und Ungleichungen *korrekt zu lösen*, ferner zu erkennen und zu erlernen, mit welchen „Äquivalenzumformungen" dieses Ziel *technisch* erreicht werden kann, die Frage nach der „Lösbarkeit" je nach Gleichungstyp eingeschlossen.

Das so angedeutete Problem der „Äquivalenz von Gleichungen" habe ich Ulrich Felgner vorgelegt, der mir dazu wie folgt geantwortet hat (wobei in Abschnitt 5 die letzten Teile von (1) und (4) und der letzte Satz *„Hier sollte man ..."* vertiefend erläutert werden):

> (1) Die Frage, wann zwei Gleichungen „äquivalent" sind (oder sein sollen), fällt nach meinem Verständnis unter die allgemeinere Frage, wann zwei Formeln (einer formalen Sprache $\mathcal{L}$) im Sinne der Logik äquivalent sind: Wenn $A(x, y, \ldots)$ und $B(u, v, \ldots)$ zwei $\mathcal{L}$-Formeln sind und M eine Struktur zu derselben Sprache $\mathcal{L}$ ist, dann sind
>
> $A(x, y, \ldots)$ und $B(u, v, \ldots)$ *„in M logisch äquivalent"*, wenn die Aussage
>
> $$(\forall x)(\forall y)(\forall u) \ldots A(x, y, \ldots) \Leftrightarrow B(u, \ldots)$$
>
> in M gilt.
>
> Die Formeln $A(x, \ldots)$ und $B(u, \ldots)$ sind *logisch äquivalent*, wenn sie in allen $\mathcal{L}$-Strukturen äquivalent sind. Das heißt beispielsweise, daß die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ nicht logisch äquivalent sind, denn wenn in einer Struktur M die Variable x mit 0 belegt wird, muß y nicht auch mit 0 belegt werden.
>
> (2) Man wird daher von *Äquivalenz zweier Gleichungen* (mit freien Variablen) nur dann sprechen, wenn sie genau dieselben freien Variablen haben.
>
> (3) Natürlich besagen $x = 0$ und $y = 0$ irgendwie dasselbe, aber dabei erlaubt man, die Funktion, die die Variablen mit Elementen der Struktur M belegt, zu verändern.
> Also: „dasselbe zu besagen" ist nicht logische Äquivalenz. Streng genommen besagt $x = 0$ gar nichts, denn $x = 0$ besagt erst dann etwas, wenn man eine Belegung der Variablen x mit einem Element einer Struktur angibt.
>
> (4) Gleichungen können in verschiedenen $\mathcal{L}$-Strukturen (oder Rechenbereichen) unterschiedliche Lösungsmengen (d. h. Belegungen, die die Gleichungen wahr machen) haben. Es ist daher nicht ausreichend, zwei Gleichungen äquivalent zu nennen, wenn sie dieselben Lösungsmengen haben (wo? in welchem Rechenbereich?). Der Äquivalenzbegriff kann so nur relativ zu einer zugrunde gelegten Struktur eingeführt werden.
>
> Ich würde den Begriff der *Äquivalenz von Gleichungen nicht in die Schulmathematik einführen*, denn sie bringt keine Erhellung und ist, wenn man ihn genau definiert, *viel zu kompliziert* und langweilt die Schüler und Schülerinnen nur. *Worauf es ankommt, sind die Umformungen von Gleichungen, wobei aber Gleichheit erhalten bleiben soll*. Dazu hatte schon Alchwoarismi die Regeln, die die Addition betreffen: „al-djabr" (einrenken), „al-mukabala" (ausgleichen), und die beiden analogen Regeln, die Multiplikation betreffend: „al-ikmal" und „al-radd" angegeben. Hier sollte man aber nicht den viel zu allgemeinen, theoretischen Äquivalenzbegriff einführen.

4 Vorläufige Bilanz

Oldenburg hat auf eine mathematisch und logisch nicht haltbare terminologische Inkonsistenz in Schulbüchern aufmerksam gemacht, die wohl auch im Unterricht ihren Niederschlag gefunden hat und findet.

Vorstehende Betrachtungen und die Kommentierung von Felgner sollen in den Blick rücken, dass eine „Äquivalenz" von Gleichungen bzw. von Ungleichungen im Mathematikunterricht kaum im Mittelpunkt des Interesses stehen kann. Vielmehr wird es vorrangig und auch primär darum gehen, bei vorliegenden Gleichungen bzw. Ungleichungen nach *allen Lösungen* zu suchen, also deren *Lösungsmenge* zu ermitteln, und das in Bezug auf eine gegebene bzw. gewählte *Grundmenge*. Das leisten bekanntlich genau solche *Umformungen*, bei denen sich die Lösungsmenge jeweils nicht ändert. Das ideale Ziel ist dabei die *unmittelbare Ablesbarkeit der Lösungsmenge* (was jedoch nicht immer möglich ist).

Eine solche oft „Äquivalenzumformung" genannte Umformung einer gegebenen Gleichung oder Ungleichung ist somit durch die *Invarianz der Lösungsmenge bei dieser Umformung in Bezug auf eine vorliegende Grundmenge* gekennzeichnet. So gilt es, zu erarbeiten und zu erkennen, welche Umformungen bezüglich des Erhalts der Lösungsmenge zulässig sind, wobei diese auf der *zugrunde liegenden algebraischen Struktur* basieren: Im Mathematikunterricht wird das eine der *numerischen Strukturen* $\langle \mathbb{N}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, oder $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq \rangle$ sein.

In diesem Sinn pflegt man *dann* (!) im Unterricht zu sagen, dass zwei durch eine Äquivalenz-Umformung in Beziehung stehende Gleichungen bzw. Ungleichungen *bezüglich einer gegebenen Grundmenge äquivalent* seien. Verallgemeinert gelten solche Betrachtungen sinngemäß auch für *Systeme* aus Gleichungen oder aus Ungleichungen oder aus beiden.

Wir sind also mit dem Fakt konfrontiert, dass der Terminus „Äquivalenz" im Kontext der Betrachtung numerischer Aussageformen – speziell also bei Gleichungen und Ungleichungen – in zwei grundlegend verschiedenen Bedeutungen auftritt: einerseits in dem Betrachten ihrer möglicher „Äquivalenz" (s. o.), andererseits in einer so genannten „Äquivalenzumformung". Die bisherige Analyse lässt nun bereits erkennen, dass diese beiden „Äquivalenzen" jedoch *nicht dasselbe bedeuten*!

Eine solche Situation ist zwar auf einer höheren Warte der Wissenschaft normal und auch nicht zwingend zu vermeiden, wenn sie jeweils präzise benannt wird – für den Mathematikunterricht ist sie jedoch nicht zumutbar und damit untragbar. „Äquivalenz" sollte und darf hier nicht missverständlich und nicht doppeldeutig verwendet werden.

Wie kann eine mögliche Lösung aus diesem Dilemma aussehen?

Im Prinzip geht es darum, neben den in Abschnitt 2 angedeuteten „Äquivalenzumformungen" (von Gleichungen bzw. Ungleichungen bzw. Systemen aus diesen) auch zu erfassen, wie man z. B. mit nebeneinander auftretenden Gleichungen wie $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ umgeht.

Hier ist man möglicherweise geneigt, beide Gleichungen als „gleichwertig" oder „äquivalent" anzusehen (was man wohl auch im Unterricht so macht), jedoch kann man sie *nicht* mittels der erwähnten „Äquivalenzumformungen" ineinander überführen! Ein hierfür erforderlicher systematischer Variablenaustausch – quasi als eine *Äquivalenzumformung anderer Art* – ist diffizil zu handhaben und durchaus fehleranfällig.

Eine profunde Betrachtung dieser Situation erfordert schul-inadäquate Mittel der Mathematischen Logik, wie es Felgner in seinen in Abschnitt 3 zitierten Anmerkungen andeutet, und das führte bereits zu der o. a. Einschätzung, im Unterricht nur dann von der *Äquivalenz zweier Aussageformen* zu sprechen, wenn sie (ohne Variablenaustausch!) durch zugelassene „Äquivalenzumformungen" (nämlich bei Erhalt der Lösungsmenge bezüglich einer gegebenen Grundmenge) ineinander überführbar sind.

Gleichwohl sind aber solche, auf systematischem Variablenaustausch basierenden, bereits angedeuteten *Äquivalenzumformungen anderer Art* auch im elementaren Rahmen des Mathematikunterrichts (zumindest gelegentlich) angebracht. In welchem Sinne sind aber nun z. B. die beiden oben aufgeführten quadratischen Gleichungen als „gleichwertig" oder gar „gleich" anzusehen, etwa im Sinne von „austauschbar"? So könnten *beide* ein bestimmtes Problem mittels einer aus Variablen, Konstanten (bzw. Parametern) bestehenden Gleichung *gleichermaßen* oder *gleichberechtigt* beschreiben! Und eine solche „Offenheit" gegenüber der konkreten Verwendung von Variablen und Parametern beim Modellieren von Sachverhalten wird im Mathematikunterricht gewiss zu vermitteln sein!

5 Zum Begriff der „Lösungsmenge"

Die im dritten Abschnitt eingangs genannten Beispiele $x = 0$ und $y = 0$ (ebenso die Beispiele $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ aus dem letzten Abschnitt) sind allerdings im Kontext der „Äquivalenz von Gleichungen" weniger trivial, als möglicherweise zunächst zu vermuten ist, auch wenn man etwa $\mathbb{Z}$ als mögliche „Grundmenge" voraussetzt. Das bedarf einer Erläuterung, beginnend mit einer vielleicht überraschenden Feststellung:

Die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ könnten in der erweiterten Gestalt $x + 0 \cdot y = 0$ und $0 \cdot x + y = 0$ ad hoc als gleichbedeutend angesehen werden. Wir wählen nun konkrete Einsetzungen für x und y, unterscheiden dann folgende Fälle und notieren die Einsetzungsergebnisse daneben:

$$0 \text{ für } x,\ 0 \text{ für } y{:} \quad 0 = 0, \quad 0 = 0. \tag{1}$$

$$0 \text{ für } x,\ 1 \text{ für } y{:} \quad 0 = 0, \quad 1 = 0. \tag{2}$$

$$1 \text{ für } x,\ 0 \text{ für } y{:} \quad 1 = 0, \quad 0 = 0. \tag{3}$$

Bereits damit ist erkennbar, dass diese beiden Gleichungen *nicht dieselbe Lösungsmenge* haben und somit *nicht als äquivalent* im beschriebenen Sinn aufgefasst werden können. Dabei haben wir uns jedoch zunächst noch um die Festlegung einer Grundmenge herumgedrückt, was fatal ist.

So ist zu beachten, dass hier *zwei Variablen* vorliegen, x und y. Wir benötigen also als Grundmenge keine Zahlenmenge, sondern eine Paarmenge $M \times N$, z. B. $M \times N \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sobald nur eine dieser beiden Mengen M oder N, die jene Paarmenge als „Grundmenge" konstituieren, außer 0 noch eine andere Zahl enthält, können die beiden gegebenen Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ also *nicht als äquivalent* angesehen werden (s. o.)! Entsprechend sind damit auch $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ *als nicht äquivalent* anzusehen, was genauer zu untersuchen ist.

Dazu dienen weitere detaillierende Aspekte aus Sicht der Mathematischen Logik, die das Zitat von Felgner aus Abschnitt 3 vertiefen und ergänzen: In $\mathcal{L}$ als einer formalen „Sprache 1. Stufe" (es wird nur über Elemente von M quantifiziert) bezeichne $\mathfrak{M}$ eine „Struktur" $\langle M, \ldots \rangle$, also $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$. (Entsprechend wird die mit den reellen Zahlen gebildete Struktur mit $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq \rangle$ bezeichnet.) Bezeichnet man mit *Var* die Menge aller in $\mathcal{L}$ vorkommenden bzw. benutzten Variablen, so ist M^{Var} „die Menge aller Abbildungen von *Var* in M".

Wenn nun $\phi \in M^{Var}$ beliebig gewählt wird, dann wird jedem x mit $x \in Var$ (also jeder in $\mathcal{L}$

vorkommenden Variablen) eindeutig ein Funktionswert $\phi(x)$ aus M zugeordnet (also z. B. eine Zahl, falls M dann als ein so genannter „Rechenbereich" eine Menge von Zahlen ist), und das gilt also für *jede* Abbildung ϕ aus M^{Var}. Was bedeutet das?

Hier wird jede in der Sprache $\mathcal{L}$ aktuell betrachtete o. g. Variable in Abhängigkeit von einer gewählten oder gegebenen Abbildung ϕ aus M^{Var} durch ein Element aus M (ggf. eine Zahl, s. o.) *ersetzt*, also das, was man eine *Belegung* nennt. (Diese ist jedoch nicht notwendig injektiv, d. h. verschiedenen Variablen aus *Var* kann via ϕ durchaus dasselbe Element aus M zugeordnet werden.)

Dass jede solche Abbildung ϕ nun eine Belegung ist, bedeutet speziell bei endlich vielen verwendeten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dass jedem geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus Var^n genau ein geordnetes n-Tupel $(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n))$ aus M^n zugeordnet wird, nämlich die erwähnte Belegung der Variablen, was man auch so zu beschreiben pflegt, dass bei jeder Variablen jeweils genau ein bestimmtes Element aus M *eingesetzt* wird. Das führt zur sog. *Erfüllungsmenge* einer in der Mathematischen Logik betrachteten *Formel* $\Phi(x, y, \ldots)$, wobei wir hier speziell nur Gleichungen oder Ungleichungen oder ein *System* aus beiden betrachten, das mit $S(x, y, \ldots)$ abgekürzt sei. Die so erklärte Erfüllungsmenge des Systems in der Struktur $\mathfrak{M}$ sei dann mit $\mathrm{E}_{\mathfrak{M}}(S(x, y, \ldots))$ bezeichnet: Sie besteht aus allen Belegungen ϕ aus $\mathbb{R}^{Var}$, deren Funktionswerte $\phi(x), \phi(y), \ldots$ aus $\mathbb{R}$ bei Einsetzungen in $S(x, y, \ldots)$ eine wahre Aussage liefern. Bei den hier betrachteten Systemen wie z. B. über der Struktur $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ (bzw. über Unterstrukturen) nennt man sie dann *Lösungsmenge* des Systems.

Das Wort „Lösung" basiert auf „lösen" für „los lassen", und es tritt beim *Problemlösen* auf. Damit ist eine „Lösung" all das, von dem man meint, ein Problem zu lösen: So sind z. B. sowohl die Entknotung des Gordischen Knotens als auch dessen Trennung mit dem Schwert durch Alexander (verschiedene) *Lösungen* des zuvor gestellten „Problems". Eine *Grundmenge kann sich also durch das Lösen nachträglich ändern!*

Hierin zeigt sich eine recht allgemeine Deutung von „Lösung". Man beachte darüber hinaus, dass „Lösung" linguistisch sowohl einen Prozess als auch das Ergebnis eines solchen meint – ebenso wie bei „Gleichung".

6 Fazit

Die erwähnten *Äquivalenzumformungen anderer Art* könnte man nun gemäß einem während der Entstehung dieses Essays gemachten Vorschlag von Reinhard Oldenburg durch eine „Strukturäquivalenz" genannte *Eigenschaft* von Aussageformen kennzeichnen, die eine *Äquivalenz der Struktur der Terme* (bzw. deren Gleichwertigkeit) meint, aus denen eine Gleichung bzw. Ungleichung besteht, also kurz: deren *Termstruktur.* Das wäre dann einer *Umformungsäquivalenz* gegenüberzustellen, also einer durch Äquivalenzumformung gekennzeichneten *Handlung*.

Im wissenschaftlichen Umfeld wäre das eine sinnvolle und treffende Kennzeichnung, sie birgt aber für den Mathematikunterricht die Gefahr einer vermeidbaren recht fehlerträchtigen Überforderung der Schülerinnen und Schüler, weil der Terminus „Äquivalenz" dann in zwei grundverschiedenen Kontexten auftritt: einerseits in „Äquivalenzumformung" als einer Umformungstechnik, andererseits in „Termstruktur" als einer Eigenschaft, die per se nichts mit einer Umformung zu tun hat. Deshalb spricht aus didaktischer Perspektive viel dafür, den Terminus „Äquivalenz" *in nur einem Kontext* zu verwenden, vorzugsweise für „Äquivalenzumformung" (wozu man auch „gleichwertige Umformung" sagen könnte).

Nun ist noch eine sinnvolle alternative Benennung der oben angesprochenen „Strukturäquivalenz" zu finden. Dazu betrachten wir exemplarisch wieder die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$, die in einer konkreten Situation jeweils *dasselbe Problem oder Phänomen gleichbedeutend* modellieren *können*. Und genau das bietet sich im didaktischen Kontext als sinnfällige Bezeichnungsalternative anstelle von „Strukturäquivalenz" an: es liegen *gleichbedeutende Aussageformen* vor.

Hans Schupp gewidmet, 1935–2021.

Literatur

Felgner, Ulrich: Die Begriffe der Äquivalenz, der Gleichheit und der Identität. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, (2020)122: 109–129. DOI:10.1365/s13291-020-00214-0

Hischer, Horst: *Studien zum Gleichungsbegriff*. Hildesheim: Franzbecker, 2020.

Hischer, Horst: Was ist eine Gleichung? In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (2021)110: 65–72.

Oldenburg, Reinhard: Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (2016)101: 10–12.

Lexikon der Mathematik. Mannheim/Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de