Ein Vorschlag zur Güte

Erich Ch. Wittmann

Als ich in MGDM 99/2015 die Replik des geschätzten Kollegen Rudolf Sträßer auf meinen Artikel im gleichen Heft gelesen habe, fiel mir spontan der Disput eines Pärchens ein, den ich im Zug unfreiwillig mitbekommen habe:

> Er: „Könnten wir nicht ab und zu auch Fleisch essen?"
> Sie: „Du willst immer nur Fleisch!"

Wenn Rudolf Sträßer in seine Replik nicht das Diagramm aus meinen „Grundfragen" aus dem Jahr 1974 sondern das erweiterte Diagramm aus meinem Artikel über die Mathematikdidaktik als design science von 1992 eingebaut hätte, wäre auf einen Blick zu sehen gewesen, dass mein Verständnis dieser Disziplin keineswegs nur den „Kern" einschließt, sondern ausdrücklich auch „Bezugsbereiche", die Beziehungen zu anderen Disziplinen stiften. Zu diesem umfassenden Konzept von Mathematikdidaktik stehe ich nach wie vor. Meine Interventionen in den MGDM sind daher keineswegs von der Absicht getragen, diese Bezüge zu reduzieren, wie in der Replik insinuiert wird. Vielmehr plädiere ich dafür, diesen Rahmen voll auszufüllen. Dazu gehört aber, dass die m. E. geschwächten Bezüge der Mathematikdidaktik sowohl zur Bezugswissenschaft Mathematik als auch zur Praxis wieder gestärkt werden und zwar so, dass gleichzeitig die Relevanz der Fachwissenschaft für die Praxis deutlich wird (die keineswegs durch das „Fach" per se gewährleistet ist, wie naive Mathematiker annehmen).

Man kann zur Ausrichtung der Mathematikdidaktik im Einzelnen sicherlich geteilter Meinung sein. Aber auch wer den Schwerpunkt der Mathematikdidaktik in ihre Bezugsbereiche verlegt, wie es nach meiner Einschätzung in der Forschung heute weithin geschieht, darf sich der Verpflichtung, die wir als Mathematikdidaktiker gegenüber der Praxis und der Lehrerbildung haben, nicht entziehen. M. E. muss in die Diskussion über die praktische Bedeutung der heutigen Veröffentlichungen im JMD auch die breite Lehrerschaft einbezogen werden. Es liegt mir zwar fern, Äußerungen aus der Praxis für bare Münze zu nehmen und die Praxis alleine über den Nutzen der Mathematikdidaktik entscheiden zu lassen. Aber ernst nehmen muss man die Rückmeldungen aus der Praxis schon.

Ich möchte dazu folgenden Vorschlag unterbreiten:

Für die gleiche Gruppe von (ca. 100) Lehrerinnen und Lehrern werden zwei je 8-teilige Fortbildungskurse mit gleicher Zielsetzung angeboten. Der eine Kurs wird schwerpunktmäßig unter Bezug auf Ergebnisse von Forschungen durchgeführt, wie sie momentan im JMD dominieren, der andere schwerpunktmäßig nach den Vorstellungen von Mathematikdidaktik als design science. Mit Methoden der empirischen Forschung (zweiter Art) wird ein Fragebogen erstellt, in dem die beiden Kurse von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern nach verschiedenen Gesichtspunkten bewertet werden.

Für die weitere Diskussion innerhalb der community dürften die Ergebnisse des vorgeschlagenen Projekts hilfreich sein. Aber vielleicht täusche ich mich. Das heutige System „Mathematikdidaktik" könnte im Verbund mit anderen Disziplinen, insbesondere der Bildungsforschung und der Kognitionspsychologie, bereits ein solches Maß an Selbstreferenz erreicht haben, dass es seine Ziele und Zwecke im Wesentlichen aus sich heraus definiert und die Frage nach der Praxisrelevanz allein dadurch suspendiert wird, dass die gleichen Personen in der Lehrerbildung unter Zurücklassung ihrer „Forschungsdidaktik" praxisnahe Angebote machen (bei denen sie sich bei der konstruktiven Entwicklungsforschung kräftig bedienen).

Erich Ch. Wittmann, TU Dortmund, IEEM, 44221 Dortmund, Email: wittmann@math.tu-dortmund.de

Seiten – *Spiel* und *Anwendung* – *gemeinsam* kennzeichnend für die Mathematik.

Bandelt geht in seinem o. g. Beitrag u. a. auf den „Heiratssatz" und die „Eulertour" (also das Königsberger Brückenproblem) ein und weist ausdrücklich darauf hin, dass dies *keine* Beispiele für reale Anwendungen und schon gar nicht für „Modellierung" sind. – Vielmehr liegen hier Gedankenspiele im Sinne von „Mathematik als Spiel des Geistes" vor, die vorzüglich sowohl der Förderung und dem *Entwickeln mathematischen Denkens* als auch der *Freude an der Mathematik* dienen.

Unterstellt man gemäß Wittenberg als ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts die *Vermittlung eines gültigen Bildes der Mathematik*, so sind demgemäß bei dessen Inszenierung diese *beiden* Aspekte („Anwendung" und „Spiel") zu berücksichtigen. Konsequenterweise sollte man vermeiden, dem utilitaristischen Zeitgeist folgend den Mathematikunterricht damit *rechtfertigen* zu wollen, dass Mathematik doch nützlich und anwendbar sei. Odo Marquard kritisiert darüber hinaus grundsätzlich eine solche „allgegenwärtige" Haltung als „Ubiquisierung des Rechtfertigungsverlangens":[2]

> Denn heute bedarf offenbar alles der Rechtfertigung: [. . .] nur eines bedarf – warum eigentlich? – keiner Rechtfertigung: die Notwendigkeit der Rechtfertigung vor allem und jedem.

Das sei durch folgende Auffassung flankiert:

> *Mathematik bedarf ebenso wenig einer Rechtfertigung wie Dichtung, Literatur, Kunst und Musik!*

Die nachfolgenden Betrachtungen gehen von dem Fakt aus, dass „Modellieren" im außerschulischen Bereich in aller Regel *keine rein mathematische Tätigkeit* ist, sondern meist einer *transdisziplinären Kooperation* mit Experten aus den zu modellierenden Gebieten bedarf. Das führt dazu, dass im Mathematikunterricht – wenn man der proklamierten Idee eines Modellierens folgt – in nur beschränkter Weise ernsthaft modelliert werden kann. Zwar sind fächerübergreifende Strukturen wie Projekte dafür geeignet, jedoch sind diese im Schulalltag aus vielerlei Gründen nur selten umsetzbar.

Nun gibt es bekanntlich im *Mathematikstudium* auch Lehrveranstaltungen zum „Modellieren", worauf Bandelt in seinem Beitrag kritisch-konstruktiv eingeht. Solche Lehrveranstaltungen dienen dann aber genau genommen oft nur dem sog. „Mathematischen Modellieren".

Als Fazit zielt dieser Essay auf folgende Aussage: Das eigentlich „Mathematische" am Modellieren ist das *Mathematisieren*, das aber in seiner *technischen* und *handelnden* mathematischen Bedeutung im Wesentlichen ein *Axiomatisieren* ist.

1 Zum mathematischen Modellbegriff

Neben dem seit vielen Jahren engagiert propagierten Ziel eines „Modellierens im Mathematikunterricht" – in Verbindung mit der Bildung von „Modellen" – scheint in der Schule und auch im Studium zunehmend aus dem Blick zu geraten oder schon geraten zu sein, dass seit gut einem Jahrhundert mit „Modell" ein grundlegender Begriff der Mathematik bezeichnet wird, der fern jeder außermathematischen Anwendung zu sehen ist:

Im Rahmen der (in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begonnenen und dann in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts weitergeführten) Bemühungen um eine axiomatische Grundlegung der Mathematik, basierend auf der zugleich entwickelten axiomatischen Mengenlehre und der formalen Logik, spielen „Modelle" eine wesentliche Rolle. Doch was ist hierbei eigentlich unter einem „Modell" zu verstehen?

Oliver Deiser bietet in seinem aktuellen Werk eine *intuitive Eingangsdefinition* an: [3]

> Ein Modell ist intuitiv eine Welt für ein mathematisches Axiomensystem, ein Bereich von Objekten, innerhalb dessen die Axiome gelten, oder etwas weniger hochgestochen, ein konkretes Beispiel.

So ist z. B. $(M, \cdot)$ mit $M := \{-1, 1\}$ und der normalen Multiplikation eine (wenn auch recht triviale) Gruppe, denn *alle Gruppenaxiome* werden *„erfüllt"* (sie gelten ohne Ausnahme). $(M, \cdot)$ ist somit ein *Modell* für das Axiomensystem einer Gruppe. Damit können sich die Gruppenaxiome logisch nicht widersprechen: Ein solches Axiomensystem heißt daher *widerspruchsfrei*.

Andererseits gilt bekanntlich: Wird ein *neues Axiomensystem* (wie auch immer) gebildet, und gelingt es ohne Konstruktion eines Modells, zu beweisen, dass dieses System widerspruchsfrei ist, so weiß man, dass ein Modell existiert, auch wenn noch kein einziges konkret gefunden wurde.

Beispielsweise führt etwa die Vorstellung eines „Kettenmodells"

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

für die „Struktur" der – wie auf einer nicht ab-

[2] [Marquard 1986, 11]
[3] [Deiser 2010, 153]

brechenden Perlenkette aufgefädelt gedachten – natürlichen Zahlen zu den Dedekind-Peano-Axiomen.[4]

Ist dieses Axiomensystem widerspruchsfrei? Falls man zu akzeptieren bereit ist, obige Visualisierung des Aufeinanderfolgens als ein konkretes *Modell* aufzufassen, so ist man fertig.

Alternativ kann man versuchen, *auf gesicherter Grundlage ein Modell zu konstruieren*. So erzeugte z. B. 1923 John von Neumann (1903–1957) iterativ die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$,[5] die erkennbar und beweisbar alle Dedekind-Peano-Axiome erfüllt, wobei sich die Möglichkeit dieser Konstruktion auf die axiomatische Mengenlehre stützt. Sofern diese widerspruchsfrei ist, würde also ein Modell für das Dedekind-Peano-Axiomensystem existieren, das damit ebenfalls widerspruchsfrei wäre. Leider lässt sich die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre nach einem grundlegenen Satz von Kurt Gödel aus dem Jahre 1931 nicht mit den Mitteln der Mengenlehre beweisen – obwohl die bekanntesten Axiomensysteme der Mengenlehre heute als widerspruchsfrei gelten.[6]

Die Widerspruchsfreiheit der Dedekind-Peano-Axiome stützt sich also auf die – nicht beweisbare – Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems der Mengenlehre, wobei diese Axiome lediglich *plausibel* sind. Immerhin lässt sich (aufwendig) beweisen, dass je zwei Modelle für das System der Dedekind-Peano-Axiome *isomorph* sind,[7] was bedeutet, dass sie sich nur in der Schreibweise unterscheiden.

Die natürlichen Zahlen sind also einzigartig, und Entsprechendes gilt z. B. für die *reellen Zahlen*. Solche Axiomensysteme, bei denen je zwei Modelle isomorph sind, heißen *monomorph* oder *kategorisch*. David Hilbert bewies 1899 erstmalig, dass das *Axiomensystem der euklidischen Geometrie monomorph* ist, und auch die Axiomensysteme für die reellen Zahlen sind monomorph. Hingegen sind z. B. die Axiomensysteme für Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume nicht monomorph.

Was ist ein *Axiomensystem*? Man unterscheidet heute vielfach nicht mehr zwischen Axiomen und Postulaten: Vereinfacht gesehen sind *Axiome* quantifizierte Aussageformen, die als *Grundsätze* am Beginn einer axiomatisch begründeten mathematischen Theorie stehen und die man *akzeptiert*, um sie für deduktive Beweise so nutzen zu können, als wären es wahre Aussagen. Das (Er-)Finden und Aufstellen eines sinnvollen widerspruchsfreien Systems von Axiomen als *Grundlage einer mathematischen Theorie* nennt man „Axiomatisieren“, so wie man z. B. eine konkrete Geometrie axiomatisiert.

Ergänzend sei angemerkt, dass ein Axiomensystem *vollständig* heißt, wenn es bei Hinzufügung eines weiteren Axioms, das mit den bereits vorhandenen nicht beweisbar (also nicht „deduzierbar“) ist, *widerspruchsvoll* wird und damit also kein Modell mehr besitzt. Beispiele hierfür sind die Axiomensysteme für die *reellen Zahlen* und für die *euklidische Geometrie*.

2 Modellierung in der Mathematik

„Modell“ und „Modellierung“ sind aktuelle und etablierte Termini in der Didaktik der Mathematik. Jedoch scheint beides nichts mit dem zu tun haben, was in der Mathematik unter einem *Modell eines Axiomensystems* verstanden wird. Oder etwa doch? Wird *innerhalb* der Mathematik *modelliert*?

So zeigt sich zunächst, dass in Bezug auf Axiomensysteme *Modelle* in der Mathematik unter den folgenden beiden Aspekten auftreten:

(1) *Axiomatisierung*: „Modell“ als axiomatisch zu beschreibende vorhandene *Leitstruktur*.
Ziel: Entwicklung *eines (widerspruchsfreien) Axiomensystems*, dem diese Leitstruktur genügt.

(2) *Verifizierung*: „Modell“ als (zu findende oder zu konstruierende) konkrete *Teststruktur*,
die ein vorliegendes Axiomensystem erfüllt.
Ziel: *Überprüfung eines gegebenen Axiomensystems* auf Widerspruchsfreiheit.

Ein Beispiel für (1) ist das o. g. *Kettenmodell* der natürlichen Zahlen (das dann zum Dedekind-Peano-Axiomensystem führt), hingegen ist das *von-Neumann-Modell* $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ ein Beispiel für (2).

Und was wäre nun *in der Mathematik* unter „Modellieren“ zu verstehen? – Sprachlich ist das zunächst eindeutig: *Modellieren ist die Herstellung eines Modells*. Aber „Modell wovon“?

Wenn man im Fall (2) zu einem vorliegenden Axiomensystem ein Modell konstruiert oder dieses findet, so hat man damit wohl im Wortsinn etwas *modelliert*. Im Fall (1) hingegen liegt bereits ein Modell vor, das nun *axiomatisiert* worden ist.

Wenn dann auf diese Weise ein so entstandenes Axiomensystem auf die Existenz weiterer (und möglichst nicht-isomorpher) Modelle unter-

[4] Ausführlich dargestellt in [Hischer 2012, 209 ff.].
[5] [Ebbinghaus 1983, 303]
[6] [Ebbinghaus 1983, 306]
[7] Beweis z. B. in [Hischer 2012, 226], eine Definition dieser „Isomorphie“ findet sich dort zuvor.

sucht wird und solche gefunden werden, so hat man aber auch hier *modelliert* (Modelle erzeugt). Und hat man dabei tatsächlich nicht-isomorphe Modelle gefunden, die nicht den Erwartungen entsprechen, so kann man versuchen, dem durch Modifikation dieses Axiomensystems abzuhelfen: Es wird dann wieder *axiomatisiert*. Diese Aktionen des *Modellierens* und *Axiomatisierens* können *aufeinander folgen*, was Assoziationen an den „Modellierungskreislauf" wecken mag, den Bandelt aber als „Ablauf" bezeichnet, denn der „Kreislauf"

> hatte eigentlich einen engeren Kontext und wurde von den Mathematikdidaktikern verabsolutiert. Ich würde selbst nie von einem Kreislauf sprechen wollen. Und ein „Ablauf" kann je nach Gebiet etwas anders sein.[8]

Nun geht es in der Axiomatik nicht um „Anwendung der Mathematik auf den Rest der Welt", denn so ein *Modellierungsablauf* ist hier (zumindest zunächst) nur innermathematisch relevant. Dieser *Aspekt des Modellierens* spielt aktuell in der Didaktik der Mathematik expressis verbis keine Rolle.

Vielmehr geht es dann *dort* meist um die Untersuchung von außermathematischen Phänomenen und Situationen usw. *mit Hilfe der Mathematik:* Man macht sich ein erstes „Bild" von einem bestimmten Ausschnitt der „Realität", bildet sich also ein gedachtes *Modell* von diesem *Ausschnitt* (einem „Realmodell"), um dieses dann mathematisch zu beschreiben, was also ein *Mathematisieren* ist – und zunächst als *Umkehrung* und dann sogar als *Erweiterung* von „Anwendung" auffassbar ist. Das so gebildete *mathematische Modell* besteht dann i. d. R. aus einem System von Gleichungen, Ungleichungen, Differentialgleichungen, . . . , ergänzt um Anfangs- und Randbedingungen – und das sind *quantifizierte Aussageformen*.

Ein solches System quantifizierter Aussageformen ist damit strukturell *wie ein Axiomensystem aufzufassen*, das sich im Modellierungsablauf bei der *Verifikation* mit Bezug auf die „Realität" entweder als *widerspruchsfrei* oder *widerspruchsvoll* (also „unangemessen" im Sinne von „nicht passend") zu erweisen hat, um dann ggf. bedarfsweise angepasst und „verbessert" zu werden.

Da das „Mathematisieren" (also das *mathematische Modellieren*) in der außerschulischen Praxis *nur ein Teil* des (umfassenderen!) dort praktizierten „Modellierens" ist, kann festgestellt werden:

These 1: „Mathematisches Modellieren" entspricht in technisch-formaler und handelnder Hinsicht dem *„Axiomatisieren"*.
These 2: „Modellieren" ist jedoch in der Regel *allein aus der Mathematik heraus nicht leistbar*.

These 1 wurde bereits ausführlich begründet. These 2 wird schon dadurch einleuchten, dass einerseits zwingend solide Fachkenntnisse aus dem Fachgebiet oder den Fachgebieten des zu „modellierenden" Phänomens erforderlich sind, was in der Praxis in aller Regel eine *transdisziplinäre Zusammenarbeit* erfordert (s. o.), weil Mathematiker nur selten über eine je notwendige solide situative Expertise verfügen (können). Und andererseits verfügen Experten aus dem zu modellierenden Themenbereich meist nicht über erforderliche umfangreiche mathematische Kenntnisse.

Liegt jedoch z. B. ein Phänomen oder eine Situation aus der Physik vor, so ist eine Modellierung meist ohne Beteiligung von Mathematiker(inne)n zu bewerkstelligen, weil in der (forschenden) Physik die dazu erforderliche Mathematik zum Alltagswerkzeug gehört bzw. dort erst entwickelt wird – die Physik hat sogar wesentlich zur (Weiter-)Entwicklung der Mathematik beigetragen: So führte etwa die in der Physik erfundene Diracsche Deltafunktion zur Entwicklung der nunmehr mathematischen Theorie der Distributionen, und Ähnliches gilt für andere mathematische Gebiete wie z. B. für die Differentialgleichungen.

3 Modellierung in der Physik

Die *Physik* ist diejenige Disziplin, in der „aus eigener Kraft" par excellence *modelliert* (und zwar nicht nur mathematisch modelliert!) wird und werden kann, und der *Modellierungsablauf* wird in der Physik wie selbstverständlich praktiziert. So sind die in der Physik üblichen und typischen *Idealisierungen* physikalischer Situationen (wie z. B. *Massenpunkt* und *Fadenpendel*) stets *Modellierungen*.

Auch z. B. der elektrische Widerstand und der elektrische Strom sind über Modellvorstellungen zu erfassen, die sich erst bewähren mussten (oder auch nicht). Ferner denke man an erste „Atommodelle" (Demokrit, Dalton, Bohr) und (zunächst) gegensätzliche Modellvorstellungen von „Licht" („Teilchen vs. Welle"), die erst später „versöhnt" werden konnten. Und die im 19. Jahrhundert gängige Modellvorstellung eines fiktiven „Äthers" musste später komplett verabschiedet werden.

Hervorhebenswert sind ferner interpretierende und weiterführende Theorien wie die Relati-

[8] Hans-Jürgen Bandelt, Universität Hamburg, in einer Mitteilung an mich vom 23. 9. 2015.

vitätstheorie (mittels Modellvorstellung und vor allem mit wesentlicher mathematischer Modellierung), die bis dahin ungeahnte Vorhersagen möglich machte – und zuletzt die Theorie von Peter Higgs, der in seiner Theorie in den 1960er Jahren das nach ihm benannte neue „Teilchen" („Higgs-Boson") vorhersagte, dessen Existenz dann 2013 endlich experimentell bestätigt werden konnte, wofür er im selben Jahr den Nobelpreis erhielt.

Modellierungen sind wesentliche Triebfedern zur Weiterentwicklung der Physik!

Ohne Mathematik wären viele wichtige physikalische Phänomene nicht modellierbar gewesen, allerdings hätten viele mathematische Modelle auch nicht allein aus der Mathematik heraus entstehen können – denn hier liegen Realmodell und Mathematisierung fachlich quasi „in einer Hand".

Es ist noch anzumerken, dass bis in die zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts hinein eine enge (auch personal repräsentierte) Verwandtschaft zwischen Mathematik und Physik bestand, was sich auch darin zeigte, dass beide Disziplinen universitär zur selben Fakultät oder zum selben Fachbereich gehörten, was heute nicht mehr der Normalfall ist – und entsprechend gehört es heute nicht mehr zum Normalfall, dass Physik ein übliches Zweitfach für Mathematiklehrkräfte ist (und vice versa).

4 Heinrich Hertz: Modellieren als Axiomatisieren

Das Bewusstsein für Modellierung in der Physik wird dem genialen, früh verstorbenen Physiker Heinrich Hertz (1857–1894) mit seinem 1894 posthum erschienenen fundamentalen Werk *„Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt"* zugeschrieben. Er spricht allerdings nur selten expressis verbis von „Modell": zweimal in der 49 Seiten umfassenden Einleitung, dann allerdings 29-mal im „Zweiten Buch" beim drei Seiten umfassenden Thema „Dynamische Modelle", und sonst nirgends explizit, sondern nur implizit.

Gemäß Hertz machen wir uns *„(Schein-)Bilder"* von den *„äußeren Gegenständen"* als *„unsere Vorstellungen von den Dingen"*, die *„wie Modelle"* anzusehen sind, so dass wir daraus *„Folgen"* vorhersagen können. „Modell" ist hier offenbar zunächst als konkretes, fassbares Objekt (wie z. B. ein *Flugzeugmodell*) anzusehen, das beispielhaft und *anschaubar* für etwas anderes „Reales" (bzw. auch für etwas „Gedachtes") steht, wodurch aber *„Modell" schließlich zur Metapher* auch für etwas nicht Greifbares wird.

Hertz' Darstellung ist streng mathematisch aufgebaut und erscheint wie eine axiomatisch aufgebaute Theorie. Dazu passen insbesondere seine lesenswerten Ausführungen beispielsweise zu „Dynamischen Modellen".[9]

5 Fazit

Eine Analyse sowohl des für die *Wissenschaft* Mathematik *innermathematisch* typischen Axiomatisierens als auch des für *Anwendungen der Mathematik* auf außermathematische Fragestellungen zunehmenden *mathematischen Modellierens* (durch „Mathematisierung der Wissenschaften", s. o.) zeigt, dass zwischen beiden Vorgehensweisen *kein grundsätzlicher technischer Unterschied* besteht, dass jedoch bei der Anwendung dieses Modellierens auf den „Rest der Welt" meist nicht-mathematische Fachkenntnisse erforderlich sind, die *in der außerschulischen Praxis vornehmlich über transdisziplinäre Zusammenarbeit einzubringen* sind.

Im Mathematik*unterricht* ist für das *Modellieren realer Situationen* dementsprechend prinzipiell eine *fachübergreifende projektartige Zusammenarbeit erforderlich*, die oft nur schwer realisierbar sein wird. Nur bei günstigen personellen und thematischen Situationen wird ein solches „Modellieren" im Mathematikunterricht gelegentlich auch ohne einen solchen Fachübergriff redlich möglich sein. Dies ist z. B. bei geometrienahen oder manchen stochastischen Situationen denkbar.[10]

Für einen kreativen, die individuellen Fähigkeiten und Interessen der Schülerinnen und Schüler *fördernden und fordernden* gymnasialen Mathematikunterricht benötigen wir aber auch *Freiheit im Bildungsprozess* in Verbindung mit dem Vertrauen auf fachliche Expertise der Lehrkräfte, um es zu ermöglichen, ein Thema wie „Modellieren" ggf. anders als über „Realbezug" zu behandeln und damit nicht nur die Nützlichkeit der Mathematik zu betonen, sondern auch deren Schönheit.

So wird hier abschließend die These vertreten, dass die *Technik des mathematischen (!) Modellierens* (also das *Mathematisieren* auf der Basis eines vorliegenden „Realmodells" wie z. B. des erwähnten *Kettenmodells* für die natürlichen Zahlen) im Mathematikunterricht *auch* durch *Erfahrung und Übung im Axiomatisieren* (als einem tastenden, nicht aber starr und geradlinig ablaufenden Prozess) erlernbar ist. Bereits in den 1960er und 1970er Jah-

[9] [Hertz 1894, 197]
[10] So z. B. endliche Geometrien wie die „Mühlegeometrie" in [Schupp 2002, 331–339].