

Forschungsstand Mathematisches Argumentieren und Beweisen vom Elementar- bis zum Hochschulbereich

Eine Synthese aus drei Expert*innenpodiumsdiskussionen

Daniel Sommerhoff und Esther Brunner

Dass mathematisches Argumentieren und Beweisen zentrale Aktivitäten innerhalb der Mathematik sind (vgl. Heintz, 2000) und ein Aufbau entsprechender Kompetenzen ein wichtiges Ziel der mathematischen Ausbildung ist, dürfte für die Leser*innen der MGDGM keine Überraschung darstellen. Dass das Forschungsfeld in den letzten 10-15 Jahren deutlich an Breite und damit auch an Relevanz zugenommen hat, mag hingegen für einige neu sein. Die mathematikdidaktische Forschung zum Argumentieren und Beweisen im deutschsprachigen Raum hat sich bis zu den 2000er Jahren zum einen wesentlich auf interpretative und rekonstruktive Studien in der Primarstufe (z. B. Krummheuer, 2001; Meyer & Voigt, 2009) und zum anderen im Bereich quantitativer Arbeiten auf die Sekundarstufe fokussiert (z. B. Heinze et al., 2008; Reiss & Renkl, 2002) und dort entweder die Konstruktion von Beweisen selbst oder einen engeren Argumentationsbegriff – im Sinne eines Vorläufers von Beweisen – untersucht. Dem gegenüber steht ein breiter Argumentationsbegriff und integrierende Sichtweisen, die in der internationalen Forschung seit längerem diskutiert werden (Balacheff, 1999; Boero et al., 1996; Inglis & Mejía-Ramos, 2008; Pedemonte, 2007; Reid & Knipping, 2010). Eine solche Fokussierung hat sich nicht zuletzt aufgrund der folgenden Entwicklungen in den letzten Jahren deutlich ausgeweitet:

- Im Rahmen der Bildungsstandards Mathematik wurde ein vergleichsweise allgemeiner Argumentationsbegriff in den Fokus der didaktischen Bemühungen gestellt (Kultusministerkonferenz, 2003) – und das nicht nur in der Sekundarstufe, sondern auch im Elementar- und Primarbereich (Kultusministerkonferenz, 2004).
 - Unter anderem angeregt durch die Qualitätsoffensive Lehrerbildung und die großen Schwierigkeiten von Studienanfänger*innen im Bereich Mathematik (Studienabbruchsquoten von etwa 40 %; Heublein & Schmelzer, 2018), haben der Übergang Schule–Hochschule sowie damit einhergehend auch (quasi-)longitudinale Untersuchungen von Beweiskompetenzen und Argumentationskulturen ein hohes Forschungsinteresse erfahren (Hoppenbrock et al., 2016; Kempen, 2019; Roth et al., 2015).
 - Neben der Konstruktion von Beweisen sind auch andere Aktivitäten, wie das Verstehen, Validieren oder Präsentieren von Beweisen (Giacquinto, 2005; Mejía-Ramos & Inglis, 2009), aber auch das Entwickeln von Hypothesen („Conjecturing“) (Lin et al., 2011) oder das Erstellen von Definitionen („Defining“) (Alcock & Simpson, 2016; Dawkins, 2014; Zandieh & Rasmussen, 2010) und deren Rechtfertigen (Jahnke & Krömer, 2020) in den Fokus der Forschung gelangt.
 - Parallel zu Entwicklungen in der sogenannten (*experimental*) *Philosophy of Mathematical Practice* (Hamami & Morris, 2020), welche nicht auf einen idealen Beweisbegriff fokussiert, sondern (unter anderem) mathematisches Beweisen in der Praxis untersucht (vgl. auch Brunner, 2014; Heintz, 2000), entwickelte sich ein zunehmendes Interesse an Argumentationskulturen (für einen frühen Beitrag siehe Chazan, 1993), sozio-mathematischen Normen (Yackel & Cobb, 1996), der Akzeptanz von Beweisen innerhalb verschiedener Communities (Sommerhoff & Ufer, 2019) sowie damit einhergehend ein stärkeres Interesse an didaktischen Beweiskonzeptionen (Kempen, 2018).
- Um diese Entwicklungen und deren Einfluss auf die Forschung in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Community zu diskutieren, wurden im Rahmen des GDM Monats 2021 drei Podiumsdiskussionen mit insgesamt zwölf Expert*innen zum mathematischen Argumentieren und Beweisen aus dem deutschsprachigen Raum durchgeführt: Für die Elementar-/Primarstufe waren dies Esther Brunner, Hedwig Gasteiger, Kathleen Philipp und Silke Ruwisch, für die Sekundarstufe Aiso Heinze, Christine Knipping, Sebastian Kuntze und Michael Meyer und für den Hochschulbereich Rolf Biehler, Jürg Kramer, Stefanie Rach und Stefan Ufer. Die Expert*innenpodiumsdiskussionen waren entsprechend der drei Bildungsbereiche Elementar-/Primarbereich, Sekundarbereich sowie Hochschule (& Übergang) getrennt aufgebaut, jedoch entlang derselben drei Fragen strukturiert:
- (1) Was ist der aus Ihrer Sicht zentrale Forschungsbefund im Kontext mathematischen Argumentierens der letzten fünf Jahre?

- (2) Wie schätzen Sie den Stellenwert des Experimentellen bzw. Exemplarischen beim mathematischen Argumentieren in Praxis, Theorie oder Forschung ein?
- (3) Was ist Ihrer Meinung nach der Stellenwert von (inhaltlichem) mathematischem Wissen im Vergleich zu allgemeinen logischen Argumentationskompetenzen (im Sinne des Schlussfolgerns) beim mathematischen Argumentieren?

An dieser Stelle wollen wir zentrale Punkte, die im Rahmen der Expert*innenpodiumsdiskussionen angesprochen und diskutiert wurden, aufgreifen, wesentliche Aspekte skizzieren und zentrale Desiderate für die Forschung entwickeln. Damit wollen wir die Ergebnisse der Expert*innenpodiumsdiskussionen (i) für alle sichtbar und greifbar machen, (ii) dem Bereich innerhalb der deutschsprachigen Forschung zusätzlich Struktur geben sowie (iii) für interessierte Forschende zentrale Ideen aufzeigen, mit denen diese wichtige Beiträge zum Forschungsstand liefern können. Die Darstellung orientiert sich dabei zunächst an den drei übergreifenden Fragen und integriert diese zum Abschluss.

Zentrale Forschungsbefunde der zurückliegenden fünf Jahre

Gerade im Elementar-/Primarbereich zeigte sich eine deutliche Weiterentwicklung der Forschung sowie ein substanzieller Fortschritt. Gleichzeitig wurde aber auch deutlich, dass in diesem Bereich zwar zahlreiche, insbesondere qualitative Arbeiten vorliegen (z.B. Fetzer, 2011; Krummheuer, 2008; Meyer, 2007; Schwarzkopf, 2000), die Forschung aber bisher noch wenig breit erfolgt. So wurde zwar hervorgehoben, dass sich mathematisches Argumentieren auch im Elementar- und Primarbereich valide erfassen lässt (bspw. Lindmeier et al., 2018; Nunes et al., 2015), das Forschungsfeld an sich jedoch noch nicht ausreichend klar umrissen ist. Ebenso wie im Sekundarbereich die Begriffe Argumentieren, Begründen und Beweisen einer klaren Abgrenzung bedürfen (vgl. bspw. Brunner, 2014; Jahnke & Ufer, 2015; Reid & Knipping, 2010; Sommerhoff & Ufer, 2019), ist eine klarere Beschreibung des mathematischen Begründens und Argumentierens auch in dieser Altersstufe notwendig. Obwohl dies entlang von einzelnen Kompetenzmodellen und Assessment Frameworks (Bezold, 2009; Lindmeier et al., 2018; Neumann et al., 2014) bereits geschehen ist, wird deutlicher Nachholbedarf in der spezifischen, den unterschiedlichen Altersstufen angemessenen Beschreibung gesehen.

Neben diesen fundamentalen Gesichtspunkten wurde auch über Stellenwert und Perspektive des Argumentierens diskutiert. Potenziell kann Argu-

mentieren gerade im Primarbereich auch als Methode eingesetzt werden – quasi als „Fenster“ zum mathematischen Denken der Schülerinnen und Schüler – um mathematische Denk- und Verstehensprozesse genauer zu untersuchen. Der Aspekt spiegelt die Unterscheidung von „arguing to learn“ vs. „learning to argue“ wider (Andriessen et al., 2003; Andriessen, 2005).

Jenseits dieser eher konzeptuellen Fragen, wurde als zentrales Problem über die Ausbildung von Lehrkräften und Pädagog*innen gesprochen, welche diese aktuell nicht ausreichend befähigt, Anlässe für mathematische Argumentationen und Begründungen überhaupt zu identifizieren. In diesem Kontext zeigte auch eine kürzlich erschienene, langfristig angelegte Studie (Melhuish et al., 2020), dass selbst eine spezifische Förderung nur wenig effektiv war. Die Forschungslage ist hier bis dato als eher heterogen anzusehen, zumal einzelne Studien auch zeigen, dass Lehrpersonen durchaus auch in der frühen Bildungsstufe einen reichhaltigen Unterricht zum mathematischen Argumentieren gestalten können (z. B. Brunner, 2019). Für die weitere Forschung sind also sowohl vielversprechende Förderansätze sowie entsprechende Evidenz nötig.

Im Gegensatz zu den Entwicklungen im Elementar-/Primarbereich, attestierten die Expert*innen dem Sekundarbereich nur wenig Fortschritt in den letzten Jahren. Ein großer Teil der dargestellten zentralen Befunde war bereits älter als fünf Jahre (z. B. Healy & Hoyles, 2000; Heintz, 2000; Heinze & Reiss, 2004). Als neuere Facette, welche allerdings aktuell noch nicht ausreichend bedient ist, wurden Argumentationskulturen und sozio-mathematische Normen hervorgehoben. Gerade auch in Verbindung zum Primarbereich bzw. beim Übergang zur Hochschule wurde entsprechende Forschung, bspw. basierend auf den Arbeiten von von Chazan (1993), Krummheuer (1995) oder Yackel und Cobb (1996), als zentrales Puzzlestück zum Verständnis von Argumentieren und Beweisen in der Sekundarstufe dargestellt. Parallel zu den Diskussionen im Primarbereich wurden auch im Sekundarbereich die Rolle der Lehrkräfte sowie die Rolle individueller Charakteristika diskutiert (z.B. Meyer & Schnell, 2020). Dabei wurden neuere Befunde zur Metakognition im Kontext von selbst-reguliertem Lernen hervorgehoben (bspw. Desoete & De Craene, 2019; Dignath & Büttner, 2018; Shilo & Kramarski, 2019), gleichzeitig aber auch in den Kontext früherer Forschung gesetzt (vgl. Schneider & Artelt, 2010) und der tatsächliche Mehrwert entsprechender Interventionen dialektisch diskutiert. Auch aufbauend auf dem GDM Hauptvortrag (Ufer, 2021) wurde hier attestiert, dass es zwar vermehrt Befunde dazu gäbe, welche Charakteristika erfolgreiche Beweisende ausmachen, auf der Ebene

der Lehrkraft jedoch nur unzureichend Informationen vorlägen (Sommerhoff et al., 2019, in Vorbereitung). Im Kontext von Argumentations- und Beweiskompetenzen sowie verschiedenen Anforderungssituationen (Mejía-Ramos & Inglis, 2009) wurde schließlich auch die Rolle digitaler Werkzeuge (auch jenseits von digitalen Geometriesystemen wie *Geogebra*) in Argumentationskulturen und als Mittel für die Auseinandersetzung mit Beweisen erwähnt (z. B. Baccaglini-Frank & Antonini, 2016; Sümmerrmann et al., 2021).

Der Stellenwert der Argumentationskulturen im Sekundarbereich sowie die (anscheinend) hohe Varianz ebendieser wurde auch im Hochschulbereich diskutiert, wo insbesondere die geringen und inkohärenten Vorerfahrungen von Studienanfänger*innen diskutiert wurden (vgl. Kempen, 2019). Ergebnisse zum Einsatz verschiedener didaktischer Beweiskonzepte zeigten beispielsweise, dass auch inhaltlich-anschauliche Beweise bzw. generische Beispiele für Studierende nicht trivial waren, trotz der im Vergleich zu einem formal-deduktiven Beweis verringerten Ansprüche hinsichtlich formeller Aspekte (Biehler & Kempen, 2016; Kempen, 2018, 2019). Die Ergebnisse unterstreichen, dass Schwierigkeiten nicht nur durch diese Aspekte erzeugt werden, sondern Argumentieren und Argumentationskulturen noch deutlich ganzheitlicher betrachtet werden müssen. In diesem Kontext wurde auch die Konzeptualisierung von Beweis als „Cluster Concept/Category“ (Czocher & Weber, 2020) sowie das notwendige Mitdenken anderer Aktivitäten als Anforderungssituationen diskutiert. Offen sind hier Fragen zum Stellenwert der anderen Aktivitäten als genuine mathematische Aktivitäten einerseits und als mögliche „einfachere Vorläufer“ für das Konstruieren von Beweisen andererseits. Empirische Evidenzen zu entsprechenden Verbindungen sind jedoch rar.

Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen

Dass dem Experimentellen und Exemplarischen im Elementar-/Primarbereich ein großer Wert zu kommt, wurde bereits in einer Vielzahl mathematikdidaktischer Publikationen festgehalten (bspw. Schwarzkopf, 2000). Entsprechend wenig verwunderlich war die von den Expert*innen festgestellte hohe Relevanz. Die darauf aufbauenden Diskussionen zeigten jedoch einerseits, wie vielfältig experimentelles und exemplarisches Arbeiten sein kann, andererseits aber auch, dass beide Begrifflichkeiten noch nicht abschließend konzeptualisiert sind. So wurde beispielsweise zwischen Experimentieren als Tätigkeit im Unterricht und Expe-

perimentieren im Sinne eines (Gedanken)Experiments als grundlegendes mathematisches Denkprinzip unterschieden (z.B. Philipp, 2012). Während der Charakter des (Gedanken)Experiments im Verlauf der mathematischen Ausbildung als weitgehend konstant gesehen wurde, wurden dem Charakter des Experimentierens bereits im Elementar- und Primarbereich verschiedene Stufen und Entwicklungen attestiert. Genannt wurde dabei zum Beispiel das materialbasierte Argumentieren (Welsing, 2017), welches zwar zunächst auf die Darstellung einzelner Beispiele fokussiert, schnell aber auch zur Ablösung von den Materialien und der Entwicklung generischer Repräsentationen von Objekten führt. Dort schließen sich im Kontext des Argumentierens generische Beispiele und inhaltlich-anschauliche Beweise an, welche klar über rein experimentelle Beweise hinaus gehen (Wittmann & Müller, 1988). Der Übergang von Beispielen und realen Handlungen zu Denkobjekten, im Sinne einer Systematisierung und Abstraktion, wurde dabei als zentrales Lernziel hervorgehoben, welches wiederum einer typisch mathematischen Tätigkeit entspricht. Exemplarität wurde aber auch thematisch ausgelegt und beispielsweise auf begriffliches Argumentieren im Bereich Form und Raum (Unterhauser & Gasteiger, 2017) oder datenbasiertes Argumentieren (Krummenauer & Kuntze, 2018) hingewiesen.

Obwohl der Wert des Exemplarischen und Experimentellen auch von den Expert*innen im Sekundarbereich gesehen wurde, zeigten sich hier deutlich andere Diskussionspunkte. Im Sinne einer systematischen Betrachtung verschiedener (didaktischer) Argumentations- bzw. Beweisformen (Biehler & Kempen, 2016) wurde dabei insbesondere aufgezeigt, dass den Schüler*innen der epistemologische Status einzelner Argumentations- bzw. Beweisformen bekannt sein muss, um diese später als mehr oder weniger tragfähig für die Annahme oder Ablehnung von Aussagen bewerten zu können (Healy & Hoyles, 2000). Der Erforschung von sozio-mathematischen Normen und Meta-Wissen über Argumentieren und Beweisen sowie der Entwicklung tragfähiger Konzepte für deren Aufbau wurde entsprechend viel Wert für die Mathematikdidaktik zugesprochen. Neben dem Erwerb dieses Meta-Wissens wurde aber auch betont, dass experimentelles Vorgehen und beispielsweise der Umgang mit generischen Beispielen, ikonischen Repräsentationen für Beweise oder die Verwendung von Diagrammen beim Experimentieren im Sinne eines materialbasierten Argumentierens selbst für Studienanfänger*innen nicht einfach ist (Healy & Hoyles, 2000; Kempen, 2018, 2019) und ebenso erworben werden muss, wie abstraktere oder formellere Argumentationskompetenzen.

Schließlich diskutierten auch die Expert*innen im Sekundarbereich über die konkrete Bedeutung des Begriffs „Exemplarisch“, welcher sich auf die exemplarische Bedeutung von Zahlen für Argumentationsmuster, aber auch die Durchführung eines spezifischen Beweises als exemplarische Darstellung einer Beweismethode beziehen kann. So sind zwar der Satz von Thales und dessen Umkehrung bereits in sich wichtige Aussagen, werden darüber hinaus jedoch oft auch als zentrales Beispiel für die Begriffe Satz, Umkehrung und Äquivalenz gesehen (im Sinne des „learning to argue“), welche dann bspw. im Kontext des Satzes von Pythagoras erneut exemplarisch vertieft werden. Die Verwendung von Beispielen und die anschließende Abstraktion auf eine allgemeinere Aussage bzw. ein allgemeineres Vorgehen wurde hier erneut als typisch mathematische Tätigkeit gesehen, wenn auch teils auf einer anderen Ebene als im Rahmen der Elementar-/Primarbereich-Expert*innenpodiumsdiskussion. Inwieweit der Erwerb dieser Tätigkeit in beiden Bereichen aneinander angebunden ist und im Sekundarbereich auf gemachte Erfahrungen und Begriffe aufbaut wird, ist bisher nicht untersucht.

Hervorgehoben wurde der Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen auch im Bereich der Hochschule, wobei dafür insbesondere die Unterscheidung von Beweisprozess und Beweisprodukt zentral war. Zwar wurde festgehalten, dass Beweisprodukte in der Hochschule, welche sich an einem idealen Beweiskonzept orientieren (Hamami & Morris, 2020; Hilbert, 1931), wenig Raum für Experimentelles oder Exemplarisches beinhalten – höchstens im Sinne eines vorangehenden Beispiels oder einer Motivation des Beweises in eher didaktisch orientierten Darstellungen von Beweisen. Beweisprozesse wurden jedoch als teils „chaotisches Arbeiten“ charakterisiert. Sie beruhen oft auf Beispielen oder anschaulichen Ideen, sind hochgradig nichtlinear und beinhalten regelmäßig Fehler und „Sackgassen“. Empirisch wurde der Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen für Forschungs- und Verstehensprozesse bspw. von Wilkerson-Jerde und Wilensky (2011) festgestellt und auch Knuth et al. (2017) oder Lockwood et al. (2016) berichten über den Stellenwert von Beispielen im Kontext der Konstruktion von Beweisen. Exemplarität als Lernprinzip im Hochschulkontext könnte beispielsweise bedeuten, sich die Frage zu stellen, welche Typen von Argumentationen, welche Aussagetypen und letztlich auch welche Inhalte als Beispiele geeignet sind, um ein ausreichendes Verständnis für mathematisches Arbeiten mit Beweisen zu vermitteln bzw. zu erwerben.

Stellenwert mathematischen Wissens und allgemeiner (logischer) Argumentationskompetenzen

Dass mathematisches Argumentieren und Beweisen wissensbasierte Prozesse sind, für die Einblicke in die jeweiligen Themengebiete, insbesondere bzgl. Definitionen, Sätzen, und bekannten Beispielen, sowie Meta-Wissen, bspw. über die lokalen Akzeptanzkriterien von Beweisen oder gängige Beweismethoden, benötigt werden, wurde auch vor dem Hintergrund des Hauptvortrags von Stefan Ufer (2021) und entsprechenden Forschungsbefunden (vgl. Chinnappan et al., 2012; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008) in allen drei Podiumsdiskussionen klar hervorgehoben. Die mögliche Relevanz allgemeiner (logischer) Argumentationskompetenzen wurde hingegen sehr viel differenzierter diskutiert.

Im Kontext des Elementar- und Primarbereichs wurde dabei zunächst erneut aufgegriffen, welchen Zweck Argumentieren in diesem Bereich erfüllt und ob eher von *arguing to learn*, als ein Argumentieren um des mathematischen Inhalts willen, oder *learning to argue*, also ein Lernen des Argumentierens, im Sinne von Andriessen et al. (2003) im Vordergrund steht. Auch wurde diskutiert, was genau unter allgemeinen Argumentationskompetenzen in dem Altersbereich bzw. der Bildungsstufe überhaupt zu verstehen wäre (vgl. Markovits, 2000; Markovits & Thompson, 2008; Sodian & Mayer, 2013). Wissen über die Bedeutung und Aussagekraft von Beispielen zur Stützung einer These sowie Gegenbeispielen zur Ablehnung einer These wurden als ein Baustein logischer Argumentationskompetenzen zwar als wichtig angesehen, inwieweit diese inhaltsunabhängig erworben und gleichzeitig in fachspezifischen Kontexten erfolgreich angewendet werden können (Transfer), ist aktuell jedoch weitgehend unklar. Die Expert*innen sprachen sich im Gegenteil eher für fachlich authentische Argumentationsanlässe aus, aus denen allgemeinere logische Aspekte abgeleitet werden könnten. Fachliche Argumentationsanlässe und deren Beantwortung könnten dann bspw. auch in fächerübergreifendem Unterricht thematisiert werden, um so unterschiedliche Normen in Bezug auf Evidenz und Evidenzgewinnung in verschiedenen Fachbereichen zu thematisieren. Im Kontext der eigentlichen Fragestellung wurde schließlich auch die Rolle von allgemeinen sprachlichen Kompetenzen (Götze, 2019; Ufer et al., 2020), deren Beziehung zu Argumentationskompetenzen sowie deren Einfluss auf die sprachliche Realisierung von Begründungen diskutiert, welcher sich im Elementar- und Primarbereich als bedeutsam erwiesen hat (Neumann et al., 2014).

Ähnlich der Diskussion im Elementar- und Primarbereich zum Einfluss von sprachlichen Fä-

higkeiten, wurden im Sekundarbereich zusätzlich diskursive Kompetenzen (vgl. Cramer, 2018; Knipping, 2019), insbesondere auf Seiten der Lehrkräfte, als wichtiger Aspekt angesprochen. Allerdings zeigte auch die Diskussion im Sekundarbereich ein uneinheitliches Bild, obwohl hier bereits verschiedene Untersuchungen zum Stellenwert von allgemeinen Argumentationskompetenzen für mathematisches Argumentieren und Beweisen bzw. zur Domänen-Spezifität von Argumentationskompetenz existieren (vgl. bspw. Budke & Meyer, 2015; Fischer et al., 2018). So wurde zwar im direkten Vergleich von allen Expert*innen mathematisches Wissen als zentrale Voraussetzung angesehen, der Status von allgemeinen Argumentationskompetenzen je nach genauem Verständnis jedoch unterschiedlich eingeschätzt. Zum einen wurde festgestellt, dass bisherige Ergebnisse bei Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden eher einen geringen Einfluss nahelegen (vgl. Ufer, 2021) und „inhaltsbezogene Argumentationen“ als wesentlicher im Vergleich zu eher formal-logischen Argumentation gesehen wurden (vgl. auch Unterscheidung syntactic & semantic reasoning; Easdown, 2009). Zum anderen wurde Meta-Wissen zu Formen des Argumentierens und deren Gültigkeit (Evans et al., 1993; Heinze & Reiss, 2003; Inglis & Simpson, 2007; Johnson-Laird & Byrne, 2002; Sporn et al., 2021) durchaus als wesentlich gesehen, auch wenn unklar war, inwiefern dies nun als mathematisch oder allgemein logisch zu interpretieren sei. Auch wurde eine Fähigkeit zum Verallgemeinern im Sinne allgemeiner logischer Argumentationskompetenz als sehr wichtig herausgestellt und bspw. auch (sicherlich wichtiges) Wissen über den Stellenwert von Beispielen und Gegenbeispielen als Teil allgemeiner logischer Argumentationskompetenzen gesehen. Schließlich wurde auch auf die teilweise gegebene fächerübergreifende Vergleichbarkeit von Argumentationen bzw. Argumentationskompetenzen verwiesen, obschon sich diese durch verschiedene Arten von Argumenten (faktisch und normativ) unterscheiden (vgl. auch Budke & Meyer, 2015).

Um Moderations- bzw. Mediationseffekte ging es dann im Kontext der Hochschule. Dort wurde zunächst hinterfragt, inwieweit der Einfluss von logischen Argumentationskompetenzen und mathematisches Wissen überhaupt direkt betrachtet werden können oder ob deren Einfluss als Dispositionen auf spezifische mediiierende Tätigkeiten wie das Lesen oder Konstruieren von Beweisen (potentiell im Sinne der situation-specific skills nach Blömeke et al., 2015) und schließlich auf die Performanz in diesen Tätigkeiten deutlich differenzierter diskutiert und untersucht werden müsste. Auch wurde die Frage aufgeworfen, ob sich angesichts der hohen Komplexität mathematischer Argumen-

tationsanforderungen, welche bspw. über konditionale bzw. syllogistische Inferenzen (Bronkhorst et al., 2020; Leighton, 2006) deutlich hinausgehen, eine Trennung von Logik und mathematischem (Vor-) Wissen überhaupt ausreichend möglich sei. So ist die Messung von Argumentations- und Beweiskompetenzen, bspw. im Sinne der Konstruktion von Beweisen oder dem Lesen von Beweisen, im Allgemeinen durch Vorwissen konfundiert und eine separate Messung methodisch aufwendig (vgl. Sommerhoff, 2017).

Schließlich wurde auch im Hochschulkontext über den Stellenwert allgemeiner logischer Argumentationskompetenzen im Vergleich zu domänenspezifischem Vorwissen zu Beweisstrategien bzw. Beweismustern als Elementen eines mathematisch-strategischen Wissens oder noch allgemeineren Beweisverständnisses (Sporn et al., 2021) diskutiert.

Zusammenfassung und Desiderata

So gerne wir „fertige Antworten“ zu den drei übergeordneten Fragen präsentiert hätten, so sehr zeigen die obigen Ausführungen doch, dass es national wie international noch keinen einheitlichen Forschungsstand zum Argumentieren und Beweisen von Elementarbereich bis Hochschule gibt und viele Fragen derzeit noch unbeantwortet, teils sogar noch unbearbeitet sind. So war im Vergleich der drei Bildungsstufen eine deutlich unterschiedlich dynamische und intensive Forschungstätigkeit in den letzten Jahren erkennbar. Über alle Bildungsstufen hinweg zeigte sich zwar, dass der Stellenwert des Experimentellen bzw. Exemplarischen unumstritten ist. Wie diese Aspekte jedoch anschlussfähig in den verschiedenen Bildungsstufen integriert werden können und bspw. universitäre Veranstaltungen weniger produktorientiert gestaltet werden können, ist aktuell weitgehend offen. Schließlich deutete sich im Hinblick auf den Stellenwert von logischen Kompetenzen an, dass diese in den verschiedenen Bildungsstufen bisher nicht ausreichend klar konzeptualisiert sind, um über deren Einfluss empirisch fundierte Aussagen machen zu können.

Die drei Expert*innenpodiumsdiskussionen verdeutlichten jedoch auch, dass die Diskurse in der Forschung zu den drei betrachteten Bildungsstufen an vielen Stellen durchaus ähnliche Fragestellungen untersuchen und die Forschung in den drei Bildungsstufen vor ähnlichen Herausforderungen steht. Gerade im Sinne der Etablierung von Argumentationskulturen und deren Veränderung bzw. Adaptation im Laufe der schulischen Ausbildung (sowie auch der Lehramtsausbildung und dem Wiedereintritt in den Schulkontext) stellt sich in der Zusammenschau der Diskussionen die Frage, ob Unterricht bzw. Forschung in den drei Bildungs-

stufen noch stärker verzahnt sein müssten. Selbst im Kontext des Übergangs Schule-Hochschule, welcher in den letzten Jahren ein hohes Forschungsinteresse erfahren hat, gibt es bisher nur wenige Untersuchungen, die beide Seiten des Übergangs (also Schule und Hochschule) empirisch erfassen und die konstruktive Passung beider Seiten untersuchen. Ebenso ist unklar, inwieweit beispielsweise am Übergang Primarstufe-Sekundarstufe überhaupt konstruktiv auf die Argumentationskulturen im Primarbereich eingegangen wird und dortige Erfahrungen zu (generischen) Beispielen genutzt werden bzw. genutzt werden könnten.

Zusammenfassend lässt sich ein deutlicher Forschungsbedarf auf theoretischer und empirischer Ebene konstatieren. Dabei lassen sich basierend auf den Gesprächen eine Reihe besonders interessanter und relevanter Themenbereiche für die Forschung in den nächsten Jahren identifizieren. So scheinen Argumentationskulturen bisher nicht ausreichend theoretisch beschrieben und empirisch untersucht zu sein. Dies wäre zusätzlich auch im Hinblick auf Übergänge zwischen Elementarbereich, Primarbereich, Sekundarbereich und Hochschule wichtig, um so weitere Hinweise zu deren konstruktiven Gestaltung zu erhalten. Hier wäre insbesondere spannend, wie Erfahrungen aus dem Elementar-/Primarbereich, bspw. mit materialgebundenen Argumentationen oder zum Stellenwert von Beispielen und generischen Beispielen, gewinnbringend in der Sekundarstufe 1 genutzt werden könnten, um auf den bereits etablierten Argumentationskulturen und den gemachten Erfahrungen aufzubauen, anstatt eine neue, teils alternative Argumentationskultur aufzuzeigen. Schließlich wäre in dem Kontext zu erforschen, wie sich Argumentationskulturen (auch jenseits spezieller Argumentations- und Beweisaufgaben) etablieren und aufrechterhalten lassen, um ein „argumentatives Klima“ zu schaffen. Ein zweiter zentraler Forschungsbereich scheinen individuelle Charakteristika von Lehrkräften bzw. Pädagog*innen und deren Auswirkung auf die Argumentationskulturen in deren Klassen bzw. Gruppen und letztlich natürlich auf die Argumentationskompetenz der Lernenden zu sein. Ergebnisse könnten Möglichkeiten für die weitere Professionalisierung in der Lehrkräfteaus- und -weiterbildung aufzeigen. Ein dritter, paralleler Forschungsbereich fokussiert die individuellen Charakteristika der Lernenden, welche im Kontext von Meta-Wissen zu Beweisen oder dem Einfluss mathematisch-strategischen Wissens nach wie vor nicht ausreichend erforscht sind. Als vierter Bereich ist schließlich die Betrachtung unterschiedlicher argumentativer Aktivitäten wie das Konstruieren, Validieren oder Verstehen von Beweisen zu nennen, welche bisher innerhalb der mathematik-

didaktischen Forschung sowie der Lehre an Schule und Hochschule nicht ausreichend explizit berücksichtigt wurden. Insbesondere ist unklar, inwieweit diese Aktivitäten im Kontext von Argumentations- bzw. Beweiskompetenzen trennbar sind bzw. getrennt werden müssen, inwieweit eine explizite Berücksichtigung der Aktivitäten lernförderlich sein kann und welche Wissensfacetten sich beispielsweise besonders effektiv durch einzelne Aktivitäten thematisieren bzw. aufbauen lassen.

Die Expert*innenpodiumsdiskussionen waren gut besucht und die Resonanz der Zuhörer*innen, welche oft alle drei Veranstaltungen besuchten, klar positiv. Basierend auf dieser Erfahrung, wäre es wünschenswert, entsprechende Veranstaltungsformate regelmäßig auch auf GDM-Tagungen anzubieten.

Dank. Ein herzlicher Dank geht an die Expert*Innen, die im Rahmen der Podiumsdiskussionen ihre Expertise und ihre Einschätzungen zur Verfügung gestellt haben. Besonders möchten wir uns darüber hinaus bei Michael Meyer bedanken, welcher diesen Beitrag aus Sicht der Experten kommentiert hat.

Literatur

- Alcock, L., & Simpson, A. (2016). Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 5–19. DOI:10.1007/s10649-016-9709-4
- Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (2003). Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In *Arguing to learn* (pp. 1–25). Springer.
- Andriessen, J. E. B. (2005). Arguing to Learn. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 443–459). Cambridge, Cambridge University Press.
- Baccaglioni-Frank, A., & Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. [arXiv:1605.02583](https://arxiv.org/abs/1605.02583).
- Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate ...* www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html
- Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule*. Kovac.
- Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 141–179. DOI:10.1007/s13138-016-0097-1
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13. DOI:10.1027/2151-2604/a000194

- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 2–113). PME.
- Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C., & Goedhart, M. (2020). Logical Reasoning in Formal and Everyday Reasoning Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(8), 1673–1694. DOI:10.1007/s10763-019-10039-8
- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Springer.
- Brunner, E. (2019). Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten: Erste Erkenntnisse aus einer Pilotstudie [journal article]. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(2), 323–356. DOI:10.1007/s13138-019-00146-y
- Budke, A., & Meyer, M. (2015). Fachlich argumentieren lernen - Die Bedeutung der Argumentation in den unterschiedlichen Schulfächern. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Eds.), *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (pp. 9–30). Waxmann.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359–387. DOI:10.1007/bfo1273371
- Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2012). Knowledge Use in the Construction of Geometry Proof by Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 865–887. DOI:10.1007/s10763-011-9298-8
- Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs: Eine theoretische und empirische Betrachtung diskursiver Hindernisse*. Springer.
- Czocher, & Weber. (2020). Proof as a Cluster Category. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(1), 50–74. DOI:10.5951/jresmetheduc.2019.0007
- Dawkins, P. C. (2014). How students interpret and enact inquiry-oriented defining practices in undergraduate real analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 88–105. DOI:10.1016/j.jmathb.2013.10.002
- Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: an overview. *ZDM*, 1–11.
- Dignath, C., & Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition and Learning*, 13(2), 127–157.
- Easdown, D. (2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(7), 941–949. DOI:10.1080/00207390903205488
- Evans, J. S. B. T., Newstead, S. E., & Byrne, R. M. (1993). *Human reasoning: The psychology of deduction*. Psychology Press.
- Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschul Kinder im Mathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1), 27–51. DOI:10.1007/s13138-010-0021-z
- Fischer, F., Chinn, C. A., Engelmann, K., & Osborne, J. (Eds.). (2018). *Scientific reasoning and argumentation: The roles of domain-specific and domain-general knowledge*. Taylor & Francis.
- Giaquinto, M. (2005). Mathematical Activity. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen, & S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (Vol. 327, pp. 75–87). Springer Netherlands. DOI:10.1007/1-4020-3335-4_5
- Götze, D. (2019). Schriftliches Erklären operativer Muster fördern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 95–121. DOI:10.1007/s13138-018-00138-4
- Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM*. DOI:10.1007/s11858-020-01159-5
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 396–428. www.jstor.org/stable/749651
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Springer.
- Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, 40(3), 443–453. DOI:10.1007/s11858-008-0092-1
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1–10).
- Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(3), 98–104. DOI:10.1007/bfo2652777
- Heublein, U., & Schmelzer, R. (2018). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. In *Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012 (Forum Hochschule 4/2014)*. DZHW.
- Hilbert, D. (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre [journal article]. *Mathematische Annalen*, 104(1), 485–494. DOI:10.1007/bfo1457953
- Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze*. Springer Fachmedien.
- Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2008). Theoretical and methodological implications of a broader perspective on mathematical argumentation. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 107–119.
- Inglis, M., & Simpson, A. (2007). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 187–204. DOI:10.1007/s10649-007-9098-9
- Jahnke, H. N., & Krömer, R. (2020). Rechtfertigen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 459–484. DOI:10.1007/s13138-019-00157-9
- Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 331–355). Springer.

- Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychol Rev*, 109(4), 646–678. DOI:10.1037/0033-295X.109.4.646
- Kempen, L. (2018). How Do Pre-service Teachers Rate the Conviction, Verification and Explanatory Power of Different Kinds of Proofs? In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 225–237). Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-70996-3_16
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. Springer.
- Knipping, C. (2019). Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht - diskursive und epistemologische Herausforderungen. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (pp. 11–18). WTM-Verlag.
- Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2017). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*.
- Krummenauer, J., & Kuntze, S. (2018). Primary student's data-based argumentation – an empirical reanalysis. In E. Bergquist, M. Österholm, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of PME42* (Vol. 3, pp. 251–258). PME.
- Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Krummheuer, G. (2001). *Narrative Elements of Children's Argumentations in Primary Mathematics Classrooms*. Franzbecker, Hildesheim.
- Krummheuer, G. (2008). Inskription, Narration und diagrammatisch basierte Argumentation. Narrative Rationalisierungspraxen im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Eds.), *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht* (Vol. 2, pp. 7–37). Waxmann.
- Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).
- Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).
- Leighton, J. P. (2006). Teaching and Assessing Deductive Reasoning Skills. *The Journal of Experimental Education*, 74(2), 109–136. DOI:10.3200/JEXE.74.2.107-136
- Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2011). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer Netherlands. DOI:10.1007/978-94-007-2129-6_13
- Lindmeier, A., Brunner, E., & Grüssing, M. (2018). Early mathematical reasoning—Theoretical foundations and possible assessment. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,
- and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165–196. DOI:10.1007/s40753-016-0025-2
- Markovits, H. (2000). A mental model analysis of young children's conditional reasoning with meaningful premises. *Thinking & Reasoning*, 6(4), 335–347.
- Markovits, H., & Thompson, V. (2008). Different developmental patterns of simple deductive and probabilistic inferential reasoning. *Memory & cognition*, 36(6), 1066–1078. DOI:10.3758/MC.36.6.1066
- Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93).
- Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 35–67. DOI:10.1007/s10857-018-9408-4
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: von der Abduktion zum Argument*. Franzbecker.
- Meyer, M., & Schnell, S. (2020). What counts as a “good” argument in school?—how teachers grade students' mathematical arguments. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 35–51.
- Meyer, M., & Voigt, J. (2009). Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. *Mathematica didactica*, 32, 31–66.
- Neumann, A., Beier, F., & Ruwisch, S. (2014). Schriftliches Begründen im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 113–125.
- Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Barros, R. (2015). Assessing Quantitative Reasoning in Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2–3), 178–196. DOI:10.1080/10986065.2015.1016815
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41. DOI:10.1007/s10649-006-9057-x
- Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken: theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Springer Spektrum.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), 29–35.
- Roth, J., Bauer, T., Koch, H., & Prediger, S. (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten*. Springer.
- Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM*, 42(2), 149–161. DOI:10.1007/s11858-010-0240-2
- Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Franzbecker.
- Shilo, A., & Kramarski, B. (2019). Mathematical-metacognitive discourse: how can it be developed

- among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. *ZDM*, 51(4), 625–640.
- Sodian, B., & Mayer, D. (2013). Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens im Vor- und Grundschulalter. In M. Stamm & D. Edelmann (Eds.), *Handbuch frühkindliche Bildungsforschung* (pp. 617–631). Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI:10.1007/978-3-531-19066-2_43
- Sommerhoff, D. (2017). *The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills* [Ph.D., LMU München].
- Sommerhoff, D., Brunner, E., & Ufer, S. (2019). Appraisals for different types of proof. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, & P. Vale (Eds.), *43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 101). PME.
- Sommerhoff, D., Brunner, E., & Ufer, S. (in Vorbereitung). "Which proof for which class?" Factors influencing the selection of mathematical proofs for teaching.
- Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). Acceptance Criteria for Validating Mathematical Proofs Used by Pupils, University Students, and Mathematicians in the Context of Teaching. *ZDM*, 51(5), 717–730.
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2021). Beginning University Mathematics Students' Proof Understanding. In *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.
- Sümmermann, M. L., Sommerhoff, D., & Rott, B. (2021). Mathematics in the Digital Age: The Case of Simulation-Based Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. DOI:10.1007/s40753-020-00125-6
- Ufer, S. (2021). Wer kann es? Interindividuelle Unterschiede beim mathematischen Beweisen – zwischen Annahmen und Evidenz. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch, & S. Prediger (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*. WTM Verlag. DOI:10.37626/GA9783959871846.0
- Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the XX North American Chapter* (Vol. 1, pp. 361–368). PME.
- Ufer, S., Leiss, D., Stanat, P., & Gasteiger, H. (2020). Sprache und Mathematik – theoretische Analysen und empirische Ergebnisse zum Einfluss sprachlicher Fähigkeiten in mathematischen Lern- und Leistungssituationen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(1), 1–9. DOI:10.1007/s13138-020-00164-1
- Unterhauser, E., & Gasteiger, H. (2017). „Das ist ein Viereck, weil das hat 4 Ecken.“ – Begründungen von Kindergartenkindern bei Identifikationsentscheidungen für die Begriffe Viereck und Dreieck. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (pp. 981–984). WTM-Verlag.
- Welsing, F. (2017). Argumentationsprozesse beim Verallgemeinern anschaulich dargestellter arithmetischer Gesetzmäßigkeiten. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (pp. 1017–1020). WTM-Verlag.
- Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: Resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 21–43.
- Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis [When is a proof a proof?]. In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237–258). Cornelsen.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.
- Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(2), 57–75.

Daniel Sommerhoff, IPN – Leibniz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
E-Mail: sommerhoff@leibniz-ipn.de

Esther Brunner, PH Thurgau
E-Mail: esther.brunner@phtg.ch