

A Model of a Finite Projective Plane with 7 Points plus the Associated Affine Plane with 4 Points ('Shoebox Geometry')

Hans Wolfgang Valet

Erläuterungen zum didaktischen Projekt

Das folgende Projekt wird für mathematische Arbeitskreise vorgeschlagen. Ich hatte in meiner aktiven Zeit als Fachlehrer für Mathematik und Physik am Kolleg der Schulbrüder in Illertissen (bayerisches Gymnasium) einen AK ‚Mathematische Modelle‘. Dafür wäre das Projekt geeignet gewesen. In diesem AK hatte ich auch Reiner Knizia, den späteren Spiele-Erfinder, als Schüler. Es ist mir eine Ehre, ihm diesen Text zu widmen. Das Projekt ist in englischer Sprache verfasst. Es war angeregt worden durch das internationale Symposium ‚Problem Posing for mathematically gifted children‘, das online am 22. und 23. Januar 2021 vom AK Problemlösen der GDM veranstaltet wurde. (problem-posing.weebly.com)

„In einfachem Spielmaterial Grundlegendes entdecken“
Dieses Motto soll das didaktische Konzept des Projektes zum Ausdruck bringen. Zweidimensionale Figuren dreidimensional zu sehen, kann ein Krimi sein. Der Vorteil der dreidimensionalen Sichtweise besteht in einem neuen und tieferen Verständnis der Figuren.

Das Projekt versteht sich nicht als abgeschlossen, sondern soll dazu anregen, selbst auf Entdeckungsreisen zu gehen.

In einem Sechseck (Figur 2 des Projekts) einen Würfel zu sehen, ist ein Klassiker. Die durchgezogenen farbigen Linienteile in Figur 4 kann man alle in der rautenförmigen unteren Würfelprojektion der Figur 5 verorten. Stellt man dieses Bild auf den Kopf, sieht man den Würfel im $x'y'z'$ -System in isometrischer Ansicht in Normallage (z' -Achse nach oben). Die betrachtete Würfelfläche ($z' = 1$) gibt Anlass zu Figur 6 und damit zur kleinsten möglichen kartesischen affinen Geometrie.

„Die kleinste Geometrie der Welt“

Dabei denkt man üblicherweise an die Fano-Ebene (Wikipedia, 2022). Ein gleichseitiges Dreieck mit eingetragenen Höhen samt Inkreis. Es handelt sich hierbei wie auch bei der Projektgeometrie um eine synthetische endliche projektive Geometrie mit 7 Punkten und 7 Geraden. Diese endlichen Geometrien werden mit dem Kürzel $PG(2, 2)$ benannt. Hier bedeutet die erste ‚2‘ die Dimension, die zweite ‚2‘ die Ordnung n . Aus der Ordnung kann man die Anzahl $n + 1$ der Punkte (Punktreihe) auf einer

Geraden errechnen, also 3, sowie die Anzahl $n + 1$ der Geraden durch einen Punkt (Geradenbüschel), ebenfalls 3. Weiterhin die Anzahl $n^2 + n + 1$ der jeweiligen Punkte und Geraden in der gesamten Geometrie, hier also 7 (Hall, 1973). Beim Aufstellen der Inzidenzmatrix (siehe Task 1 im Projekt) könnte man feststellen, dass sich nicht bei jeder beliebigen Beschriftung der Punkte (A, B, \dots, G) und Geraden (a, b, \dots, g) eine symmetrische Inzidenzmatrix ergibt. Dies ist zwar grundsätzlich für die Arbeit mit endlichen projektiven Geometrien unnötig, didaktisch aber vorteilhaft. Es wird dann nämlich die sogenannte Dualität besser sichtbar: Wenn z. B. die Punkte A und D die Gerade b bestimmen, dann schneiden sich die zu A und D dualen Geraden a und d im zu der Geraden b dualen Punkt B . Beim Schnitt zweier Geraden gilt Entsprechendes.

Da alle Geometrien $PG(2, 2)$ zueinander isomorph sind, kann man die Symmetrie der Matrix allerdings jederzeit mit etwas Geduld durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen erreichen und anschließend die Punkte und/oder Geraden umbenennen.

Einführung von Koordinaten

In der Fano-Ebene lassen sich Koordinaten einführen, die allerdings an Dreieckskoordinaten erinnern. Doch in der Schule sind zunächst einmal kartesische Koordinaten eingängiger, mit denen man gefühlt in herkömmlicher Weise analytische Geometrie betreiben kann. Hier zeigt sich nun der Vorteil des hexagonalen Ansatzes, wie man ihn nennen könnte und wie er im folgenden Projekt vorgestellt wird. Er beruht darauf, dass im Hintergrund eines Sechsecks ein Würfel gedacht werden kann, der mit dreidimensionalen kartesischen Koordinaten x', y', z' ausgestattet ist. Aus diesen können dann, wenn man sie als homogene Koordinaten betrachtet, zweidimensionale Koordinaten x, y abgeleitet werden, die dann in der Ebene $z' = 1$ als affine Koordinaten gelten können (siehe Figur 6).

$$x = \frac{x'}{z'}, \quad y = \frac{y'}{z'}, \quad z' \neq 0$$

Die Koordinaten werden dem Restklassenkörper $K = GF(2) = \{0, 1\}$ entnommen. Bei dieser Betrachtung identifiziert man analog wie im Falle $K = \mathbb{R}$ die Ursprungsgeraden aus dem K^3 mit den Punkten der projektiven Ebene. Die Schnittpunkte der Ursprungsgeraden mit der Ebene $z' = 1$ stellen

die affinen Punkte A, E, P und F dar, wohingegen die drei Ursprungsgeraden, die parallel zur Ebene $z' = 1$ verlaufen, mit $z' = 0$ den Inbegriff der unendlich fernen Punkte B, C und D bilden. Sie geben gewissermaßen bloße Richtungen an.

Die Ebene $z' = 0$, die ja parallel zur Ebene $z' = 1$ verläuft, wird als unendlich ferne Gerade d der projektiven Ebene interpretiert. Die anderen Ursprungsebenen im K^3 schneiden die affine Ebene $z' = 1$ in den sechs affinen Geraden, a, f, p, e, b und c . Die Dreiecke von Fig. 3 stellen einerseits als Projektionsbilder mit Blick von oben auf den Rumpfwürfel aus Fig. 1 die Ursprungsebenen aus dem Vektorraum K^3 dar, andererseits als Punktreihen von jeweils drei Punkten die Geraden in der endlichen projektiven Ebene. In der Fig. 4, die oben schon angesprochen wurde, sind die durchgezogenen Linien sozusagen die affinen Anteile der K^3 -Ebenen und die unterbrochenen die projektiven Anteile auf dem Weg zum Unendlichen. (-). Wiederum erhöht sich die dreidimensionale Anschaulichkeit, wenn man das Blatt mit Fig. 4 auf den Kopf stellt.

Analytische Geometrie in der projektiven Ebene

Die Ebenen aus dem K^3 haben Normalenvektoren, deren Koordinaten in der projektiven Ebene als homogene Geradenkoordinaten $[n_1, n_2, n_3]$ betrachtet werden können. Wenn der Punkt $P(x', y', z')$ auf der Geraden $g[n_1, n_2, n_3]$ liegt, gilt also die Inzidenzrelation:

$$x'n_1 + y'n_2 + z'n_3 = 0 \quad (\text{weil } P \perp g) \quad (I)$$

P und g werden hier als Vektoren aufgefasst. Das Skalarprodukt in (I) zeigt also (mod2 berechnet) die zu den Eintragungen in der Inzidenztabelle komplementären Werte.

Man kann sich nun auf einige spannende Unternehmungen einlassen: Schnitte von Geraden*, Berechnung der Verbindungsgerade**, lineare Abbildungen mit Matrizen, Gruppentafeln für diese Abbildungen, Permutationen als Automorphismen u. a. m.

z. B. $p \times a = [101] \times [100] = (x'y'z') = (010) \quad (*)$
 $= B$

Hinweis: Das Kreuzprodukt führt zum Ziel, weil $B \perp p, a$.

z. B. $PA = (111) \times (001) = [n_1, n_2, n_3] = [110] \quad (**)$
 $= b$

Hinweis: Das Kreuzprodukt führt zum Ziel, weil $P, A \perp b$.

Die erweiterte Inzidenztabelle

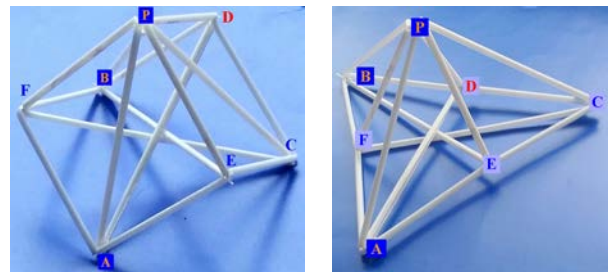
Als Hilfe für diese Untersuchungen sei in Tabelle 1 die im Projekt in Task 1 gefragte Inzidenzmatrix angegeben. Als Erweiterung sind unten die projektiven Koordinatentripel $(x'y'z')$ der Punkte angegeben und rechts die projektiven Tripel $[n_1, n_2, n_3]$ der Geraden.

Die in Orange geschriebenen Elemente P, A, D, p, a und d inzidieren mit ihren jeweiligen dualen Partnern (z. B. P mit p), können also als ‚dualinzident‘ bezeichnet werden. Auf b (rot) liegen alle dualinzidenten Punkte, durch B (rot) gehen alle dualinzidenten Geraden.

Tabelle 1

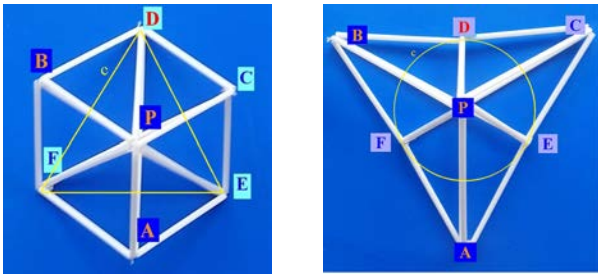
		Punkte							*	
		x	P	A	D	B	C	E		
Geraden	p	1	0	0	1	0	1	0	101	
	a	0	1	0	1	0	0	1	100	
	d	0	0	1	1	1	0	0	001	
	b	1	1	1	0	0	0	0	110	
	c	0	0	1	0	0	1	1	111	
	e	1	0	0	0	1	0	1	011	
	f	0	1	0	0	1	1	0	010	
*	111	001	110	010	100	101	011	*		
		projektive Punktkoordinaten								

Anmerkung zur folgenden Visualisierung. Durch eine stereometrische Metamorphose (Verwandlung des Rumpfwürfels von Fig. 1 in eine Pyramide) wird eine unmittelbar anschauliche Isomorphie zwischen dem im Projekt betrachteten hexagonalen Ansatz und der Fano-Geometrie möglich:



Figur 1. Würfel (Kantenlänge 1) ohne die untere Ecke und Würfelflecke (Kantenlänge $\sqrt{2}$) als Pyramide

Anmerkung. Beide Körper bestehen aus: 9 Stäben mit Länge 1 und 3 Stäben der Länge $\sqrt{2}$ und 3 Stäben der Länge $\sqrt{3}$.



Figur 2. Blick auf die Körper von oben: Links die hexagonale und rechts die Fano-Geometrie

Anmerkung. Diese überraschende Körperverwandlung konnte ich bei der letzten Online-Herbsttagung 2021 des GMD-Arbeitskreises Problemlösen vorstellen (Sturm et al., 2022).

Zusammenfassung

Ausgehend von der isometrischen Projektion eines Würfels wird eine Alternative zur projektiven Fano-Ebene samt abgeleiteter Affingeometrie vorgestellt. Punkte und Geraden der projektiven Ebene werden nach dem üblichen Verfahren mit Nullpunktsgerechten und Nullpunktsebenen des dreidimensionalen Raumes identifiziert. Das Koordinatensystem in der affinen Ebene ergibt sich in natürlicher Weise kartesisch. Das Projekt ermöglicht eine Begegnung von synthetischer und analytischer Geometrie auf kleinstem Raum und geht dabei klassisch vor: Vom synthetischen Einstieg bis zu der Einführung von Koordinaten und der experimentellen Auslotung der analytischen Möglichkeiten. Es ermöglicht einen Blick in den Reichtum, der in den Anfängen steckt und regt dazu an, ihn selbst zu erforschen.

The didactic project

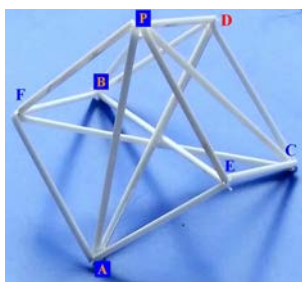


Figure 1. The beginning is a 3-dimensional body

You see an incomplete edge cube model with three spatially diagonals and three surface diagonals. Remark, that one corner of the cube is missing. There are therefore only seven corners left, named A, B, C, D, E, F and P . This whole body rests with three legs A, B, C on its base. Let's try to create a nice little 'shoe box geometry' from this pool of points.

Some information. In a projective geometry any two straight lines intersect at exactly one point and through any two points there goes exactly one straight line. So there exist no parallels in the sense of straight lines that do not intersect.

If you look from above on this body, you will see the following:

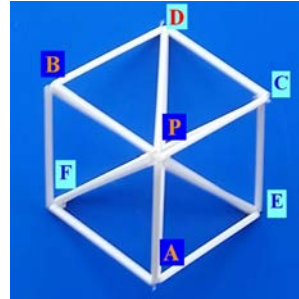


Figure 2. The 2-dimensional model of a finite projective plane with 7 points

Remark. In contrast to the famous Fano model for a 2-dimensional projective 7-point geometry, in which a circle is used as seventh straight line, we want to build a model that ties in better with the familiar cartesian coordinate geometry and therefore seems more suitable for applications. In this model the straight lines are represented by triangles. In order to simplify the way of speaking, in the following we will simply call straight lines 'lines'. It should be noted that all projective 7-point geometries are isomorphic to each other (Wikipedia, 2022).

The next pictures are supposed to define our seven lines. We do this by showing off which points lie on the respective straight-line a, b, c, d, e, f and p . Note that the colors don't matter at the beginning. The lines b, p and e are also to be regarded as triangles!

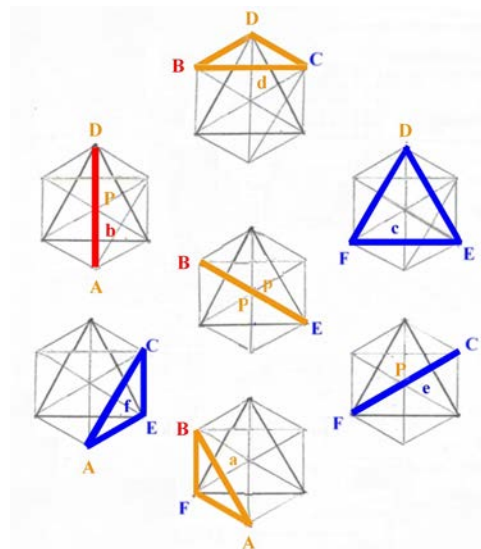


Figure 3. Lines of the finite projective plane

For example. The points A, P and D (and only those) lie on the line b and the points F, P and C (and only those) lie on the line e . The lines b and e intersect therefore only at the point P . To see this, you have to mentally superimpose the images that belong to the lines b and e and search the common point.

Furthermore, we see for example that through the points A and C only the line f goes. You can recognize this by looking out of all seven images for the one where both points A and C lie on the selected line. This applies only to the picture on the lower left.

1. Now the first task: Create a 7×7 table with the points in the header in the following order: P, A, D, B, C, E, F . In the header column, set all seven lines in the appropriate order: p, a, d, b, c, e, f . In each table field write a 1 or a 0, depending on whether the corresponding point lies on the corresponding straight line or not. This table is called 'incidence matrix'.
2. What do you notice about the finished table?
3. How many ones are in each row and in each column of the table?
4. The large picture from above (Fig. 3) with the seven little images with colored lines has one thing in common with every of these images: All are Hexagons!

Now compare and show that the same configuration that makes up the three points on a particular colored line, for example D, F and E on line c in blue within the small hexagon at the top right of the large picture, can also be found as the configuration of lines d, f and e in the large picture on a larger scale. In the sense that the configuration of the lines d, e, f consists of three-line images that have a common point (here C in blue) with the same color as the line (here c in blue) whose point configuration we started with. This correspondence between points and lines is called duality and has its cause in the special symmetry of the incidence matrix shown in the second task.

5. What meaning can you see for the colors with which the names of the points and the lines are printed? Can you draw a large Hexagon picture like Fig. 2 where all colored points are represented and connected with all lines in the correct colors? Hint: All connections which run over P have two parallel lines. Think of the 3-dimensional body in Fig. 1, from which Fig. 2 was created. In every point must end three corners of triangles, that means six normal lines.

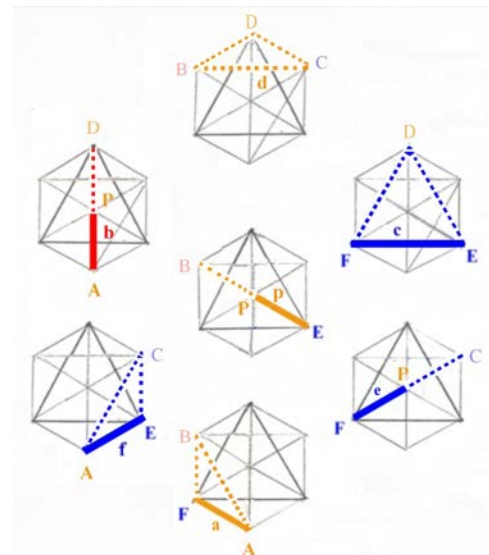


Figure 4. The finite affine plane: The elements of infinity are printed in a weakened manner.

Further information. In projective geometry, all points and lines are equal to each other with regard to the incidence. The normal Euclidean geometry is affine: Here are parallel lines that do not intersect. To get an affine geometry from a projective geometry you had to choose any straight line as a 'line of infinity' with 'points of infinity' on it, each responsible for a family of parallel lines that go in the same direction. Let without loss of generality d be the line and B, C, D on it the points of infinity. Then we get the overview of the finite affine geometry determined thereby (Fig. 4). That is an affine plane with four points A, E, P, F and six lines a, f, p, e, b and c where respectively $(f, e), (a, p)$ and (b, c) are parallel. You can see this confirmed by the fact that for example f and e go through the same point of infinity C .

The next topic is whether we can introduce coordinates into such a small 'shoebox-geometry'. The Answer is *yes*: Both in the projective and in the affine case:

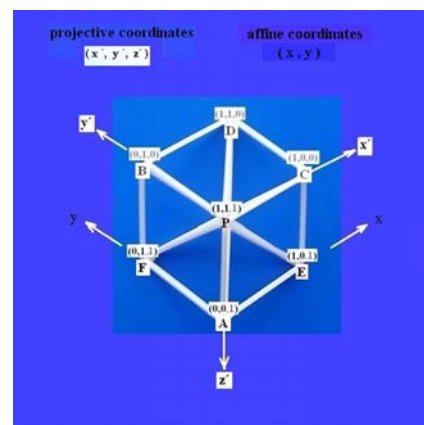


Figure 5. Projective and affine coordinates

The cube surface square $AEFF$ inspires us to the following representation of the affine plane:

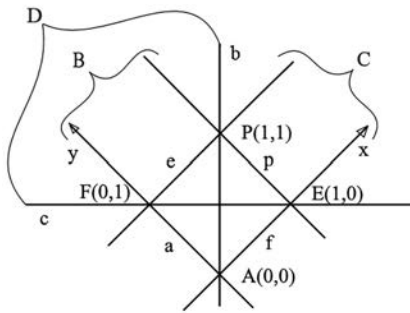


Figure 6. Four points and six lines of the smallest cartesian affine geometry

6. The Coordinates come from the field of the residual classes modulo 2. You can try to use now the methods of analytical geometry. First, we consider equations for straight lines. Let's have the analytically parallels $b : y = x$ and $c : y = x + 1$ as examples. The line c appears here as line b shifted up by 1. On the other hand, according to Fig. 6 c may have the equation $y = -x + 1$, because c is perpendicular to b .

Can you prove that $1 = -1$ in this little field of numbers called $GF(2)$? Hint: Create the addition and multiplication tables with the elements 0 and 1 computing in the binary system, just like a computer calculates.

Welcome to the 'smallest non-trivial geometry of the world' with unlimited possibilities! ;-). What do you think is it possible to define vectors and matrices?

7. As the last task try therefore to specify the mirroring on line b as point vector mapping. But this end is not really the end ...

Literatur

- Hall, M. Jr. (1973). *The Theory of Groups*. The Macmillan Company.
 Sturm, N., Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Arbeitskreis: Problemlösen. *Mitteilungen der GDM*, 112, 72–73.
 Wikipedia. *Fano-Ebene*. de.m.wikipedia.org/wiki/Fano-Ebene (20. 5. 2022)

Hans Wolfgang Valet, Blaustein
 E-Mail: h.w.valet@gmx.de