

# Kriterien zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik

## Adaptation eines Evaluationsinstruments im Rahmen des Schülerforschungsclubs (SFC) Mathematik mit digitalen Werkzeugen

Matthias Müller und Alexander Hörig

Digitale Medien spielen eine immer entscheidendere Rolle beim Lehren und Lernen von Mathematik. Aufgrund der aktuellen Herausforderungen des Distanz- und Hybrid-Unterrichts ist eine onlinegestützte Fern-Lernumgebung im Rahmen des Schülerforschungsclubs (SFC) Mathematik mit digitalen Werkzeugen kriterienorientiert entwickelt worden. Dabei konnte auf Grundlage des MTTE-Frameworks zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien im Mathematikunterricht ein adaptiertes Konzept für den SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen entwickelt werden. In diesem Artikel werden das Evaluationsinstrument und ein ausgewähltes Beispiel vorgestellt und beschrieben.

### *Mathematikunterricht mit digitalen Medien: Die Bedeutung einer kriteriengeleiteten Auswahl*

Unter der Prämisse, dass der Einsatz digitaler Medien Lernenden dabei helfen kann, mathematische Inhalte zu verstehen, stellt sich die Frage nach der Auswahl der digitalen Medien. Eine ständig wachsende Anzahl verfügbarer technologischer Ressourcen und der Druck, diese zu nutzen, stellt Lehrkräfte vor Entscheidungsschwierigkeiten (Smith, Shin, & Kim, 2017). Viele Mathematiklehrkräfte stehen vor der besonderen Herausforderung, geeignete digitale Medien auszuwählen, sich entsprechende Kompetenzen im Umgang mit den Medien anzueignen und sie im Unterricht zu implementieren. Dies wurde durch die getroffenen Maßnahmen im schulischen Bereich im Zusammenhang mit der COVID-19-Pandemie verschärft (Whalen, 2020).

Kriterien zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien können Lehrkräften Anleitung zur Bestimmung der Wirksamkeit eines digitalen Mediums zum Lehren und Lernen von Mathematik geben. So können z. B. Kriterien zu spezifischen mathematischen Themenbereichen formuliert werden, um den Einsatz von digitalen Medien im Mathematikunterricht zu steuern (Günster, & Weigand, 2020). Ebenso können sich derartige Kriterien an unterschiedliche Adressaten richten, evtl. kann man zwischen Forschung und Praxis unterscheiden (Hege-  
dus, Laborde, Brady, Dalton, Siller, Tabach, . . . , & Moreno-Armella, 2017; Traglová, Clark-Wilson, &

Weigand, 2018). Es besteht der Bedarf der wissenschaftlichen Begleitung des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht, um die Arbeit der Lehrenden zu unterstützen (Thurm, & Barzel, 2020). Die Auswahl digitaler Medien für den Mathematikunterricht in Präsenz-, Distanz- oder Hybridform sollte in jedem Fall kriteriengeleitet erfolgen. Der Einsatz der ausgewählten Medien muss im Prozess fortlaufend überprüft und mit den didaktischen und pädagogischen Zielen abgeglichen werden. Ein möglicher Ausgangspunkt für die kriteriengeleitete Auswahl und Bewertung digitaler Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik kann das Mathematical Technological Tool (MTT) Framework sein (Müller, 2021).

Vor der Vorstellung des Evaluationsinstruments und der zugehörigen theoretischen Grundlagen sollen allerdings die beiden Begriffe digitale Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik und digitale Mathematikwerkzeuge (DMW) begrifflich in Beziehung gesetzt werden. Allgemein sind Medien einerseits kognitive und andererseits kommunikative Gegenstände zur Verarbeitung, Speicherung und Übermittlung von zeichenhaften Informationen (Petko, 2014, S. 13). Das betrifft analoge und digitale Medien in gleicher Weise. Entscheidend im Rahmen des Lehrens und Lernens von Mathematik ist die Eigenschaft des Mediums als Mittler, zwischen Inhalt und Lernenden zu fungieren. Dies kann sowohl physisch als auch digital erfolgen (Rink & Walther, 2020, S. 7). Im speziellen bezeichnen digitale Medien nach Rauh (2012, S. 39) technische Geräte zur Darstellung von digital gespeicherten Inhalten. Konkreter handelt es sich um elektronische Geräte, die Informationen digital speichern oder übertragen und in bildhafter oder symbolischer Darstellung wiedergeben (Pallack, 2018, S. 28). DMW sind besondere digitale Medien, deren primärer Zweck es ist, mathematisches Arbeiten zu unterstützen. Das umfasst insbesondere Medien, die mathematikspezifisch an Beruf und Alltag oder didaktisch orientiert sind (Barzel, 2019, S. 2). Im Sinne des theoretischen Ansatzes der instrumentalen Genese (Rabardel, 2002) wird im Folgenden der Begriff der DMW verwendet.

### Gütekriterien zur Auswahl und Bewertung: Fidelities nach Dick (2008)

Nach Dick (2008) sind drei Grundprinzipien beim Bewerten von DMW zu betachten: *Pedagogical Fidelity*, *Mathematical Fidelity* und *Cognitive Fidelity*. Die Grundlage dieser drei Fidelities ist das pädagogische Grundprinzip, dass das Lernen von Mathematik eine aktive Auseinandersetzung auf Seiten der Lernenden mit dem mathematischen Objekt voraussetzt:

[...] Students learn mathematics by taking mathematical actions (e.g., transforming, representing, manipulating) on mathematical objects (e.g., symbolic expressions, graphs, geometric figures, physical models), observing the mathematical consequences of those actions, and reflecting on their meanings. (Dick, 2008, S. 334)

Das Vorgehen der Interaktion, Beobachtung und Reflexion stellt sich im Prediction-Conjecture-Testing-Zyklus dar, welcher zu einem Beweis oder Widerspruch der eigenen Ideen und Vorstellung führt (Dick, 2008, S. 334). Daraus geht auch die Aufgabe der DMW hervor: Sie sollen die Arbeit mit dem mathematischen Objekt vereinfachen und transparent machen. DMW müssen den Fidelities genügen damit sie die beschriebene Aufgabe erfüllen können. Somit richten sich die Fidelities in erster Linie an die Entwicklungsteams der DMW (Dick, 2008, S. 333). Allerdings können die drei Fidelities auch für Lehrkräfte unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten von Interesse sein. Sie stellen in diesem Zusammenhang Gütekriterien für die Bewertung und Auswahl von DMW dar (Bos, 2009b; Moyer et al., 2008; Smith et al., 2017). Im Folgenden werden die drei Fidelities anhand von Indikatoren beschrieben, um zu verdeutlichen, wann die DMW das jeweilige Grundprinzip erfüllen.

#### *Pedagogical Fidelity*

Aus dem beschriebenen pädagogischen Grundprinzip der aktiven Auseinandersetzung mit dem mathematischen Objekt wird die *Pedagogical Fidelity* abgeleitet. Bei dieser wird untersucht, wie viel der Arbeitszeit mit den DMW aktive Lernzeit ist. Dazu sollen die DMW mathematische Aktivitäten auf mathematischen Objekten vereinfachen und erweitern (Dick, 2008, S. 334) ohne die Lernenden abzulenken oder einzuschränken (Bos, 2009b, S. 522) und sie somit beim Lernen unterstützen (Larkin, 2015, S. 342).

Indikatoren für ein hohes Maß an *Pedagogical Fidelity* sind gegeben, wenn die Lernenden die folgenden Eigenschaften bei DMW wahrnehmen können (Dick, 2008, S. 333):

- Die Erstellung von mathematischen Objekten wird unterstützt bzw. ermöglicht,
- mathematische Aktivitäten an den Objekten werden erlaubt und motiviert,
- die Konsequenzen der Aktionen werden klar aufgezeigt.

Die Beschreibung der eigenen Arbeit mit den DMW ist ein guter Indikator dafür, ob und wie die Lernenden die obigen Punkte wahrnehmen. Bei im Sinne der *Pedagogical Fidelity* guten DMW werden die eigenen Schritte und Aktivitäten in mathematischen Aktionen („ich zeichne die Funktion ...“, „ich erstelle das Dreieck“, „ich messe den Flächeninhalt ...“) angegeben. Wird hingegen lediglich die Interaktion mit den DMW beschrieben („ich bin in das ...-Menü gegangen“, „ich habe diese Einstellung vorgenommen“), lässt das auf eine niedrige *Pedagogical Fidelity* schließen.

Weiterhin ist die Bedienoberfläche (die Organisation der Befehle und des Menüs) ein Indikator für *Pedagogical Fidelity*. Demnach soll die Oberfläche so gestaltet werden, dass mathematische Aktionen möglichst einfach und ohne Ablenkungen durchführbar sind. Ein Beispiel dafür sind die Bedienelemente bei Grafiksoftware. Die Bedienelemente für das Äußerliche (wie etwa Schriftgröße der Beschriftung und Skalen) sollten klar von denen der Mathematik (wie Vergrößern und Verkleinern des mathematischen Objekts) getrennt sein (Dick, 2008, S. 335).

Nach Bos (2011) sollen die DMW die aktive Arbeit mit dem Thema motivieren und ohne Training verwendbar sein. Dafür muss die Manipulation der mathematischen Objekte logisch und natürlich wirken und die DMW für die entsprechende Zielgruppe altersgerecht sein. Zudem sollen die DMW zum Thema des Unterrichts passen, dem Lehren und Lernen des zu vermittelnden Konzepts dienen und einen Mehrwert zu analogen Alternativen bringen (Bos, 2009a, 2011; Larkin, 2015).

Nach Shin et al. (2018) müssen DMW die gebündelte Aufmerksamkeit auf die Mathematik erlauben und unterstützen. Dafür sollte zum Beispiel bei der Repräsentation von mathematischen Objekten kein Übermaß an Farben verwendet werden. Auch sollten keine unnötigen Objekte, Einstellungen und Funktionalitäten vorhanden sein (Shin et al., 2018, S. 158f.).

#### *Mathematical Fidelity*

DMW besitzen ein hohes Maß an *Mathematical Fidelity*, wenn die Repräsentationen der mathematischen Objekte auf den DMW dieselben Eigenschaften und Verhaltensweisen aufzeigen wie die idealisierten mathematischen Objekte.

Eine Vielzahl an konformen Repräsentationen erlaubt die vielseitige Betrachtung und Manipula-

tion der mathematischen Objekte und somit das Finden mathematischer Muster, welche wiederum den Aufbau des konzeptionellen Verständnisses ermöglichen (Bos, 2011). Ist die *Mathematical Fidelity* nicht gegeben, können die Lernenden die zugrundeliegenden mathematischen Konzepte nicht erkennen und somit auch kein Verständnis für diese aufbauen. Es kann sogar zum Entwickeln von Fehlvorstellungen kommen, welche individuell wieder korrigiert werden müssen (Shin et al., 2018, S. 159).

Grundsätzlich lassen sich einige Indikatoren für *Mathematical Fidelity* finden (Bos, 2009b; Larkin, 2015). So sollten die dargestellten mathematischen Objekte korrekt und adäquat sein. Häufig werden jedoch mathematische Konzepte zu einfach oder nur extrahiert dargestellt. Dabei werden bspw. mathematische Konventionen und Normen verkürzt, abgeändert, inkorrekt oder gar nicht angegeben. So finden sich z. B. einige Apps, deren Präsentation der mathematischen Objekte nicht altersgerecht ist. Es werden mathematische Objekte falsch benannt und fehlerhaft klassifiziert (Quadrate werden bspw. nicht den Rechtecken zugeordnet). Bei Funktionen wird zudem der Definitionsbereich nicht immer angegeben.

Insgesamt sollten DMW Muster korrekt und vorhersehbar präsentieren. Sind die Muster nicht eindeutig oder nicht vorhanden, kann auch kein konzeptionelles Verständnis aufgebaut werden und es kommt lediglich zum bloßen Auswendiglernen. So gibt es Applikationen für mobile Endgeräte, welche nur typische Formen (das Quadrat als Viereck) auf eine spezielle Art und Weise (ein Quadrat ist parallel zu den Rändern des Darstellungsbereichs) präsentieren. Damit können die Lernenden das mathematische Konzept „Viereck“ jedoch nicht hinreichend untersuchen. Die Anwendung der mathematischen Objekte sollte zudem eine Verbindung zur Realität herstellen, eine realistische und zweckdienliche Anwendung mathematischer Konzepte ist dabei anzustreben. Es finden sich nur sehr wenige Beispiele, die diesem Anspruch gerecht werden (Larkin, 2015).

#### *Cognitive Fidelity*

DMW besitzen ein hohes Maß an *Cognitive Fidelity*, wenn die Prozesse innerhalb des Werkzeugs den kognitiven Prozessen der Lernenden ähneln oder an diese angepasst sind (Dick, 2008, S. 337). Zudem sollen die mathematischen Gedankengänge der Lernenden unterstützt werden, während diese in die mathematischen Aktivitäten vertieft sind (Larkin, 2015, S. 343).

Die meisten DMW, welche außerhalb von Bildungseinrichtungen verwendet werden (CAS-Handhelds, Tabellenkalkulationssoftware, ...) be-

sitzen ein geringes Maß an *Cognitive Fidelity*. Dick (2008) präsentiert zwei Gründe dafür: Zum einen geben sie lediglich die Lösung an, ohne die inneren Prozesse und Vorgehensweisen aufzuzeigen. Deshalb werden sie z. T. auch als „Black Box“ bezeichnet (Dick, 2008, S. 337). Zum anderen verwenden diese DMW Lösungsmethoden und -verfahren, welche sich wesentlich von den bekannten Lösungsmöglichkeiten der Lernenden unterscheiden (Dick, 2008, S. 337). Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion, bei der viele grafische Taschenrechner das Newtonverfahren verwenden (Shin et al., 2018, S. 161). Dieses Verfahren ist jedoch den wenigsten Lernenden bekannt und unterscheidet sich auch konzeptionell von den bekannten Lösungsmethoden.

Im Vergleich zu einer „Black Box“, welche (für die Lernenden) unbekanntes Lösungsverfahren verwendet, empfiehlt sich für das Lehren und Lernen von Mathematik eine „Glas Box“. Bei dieser werden die inneren Prozesse des Werkzeugs dargestellt, welche den mathematischen Gedankengängen und den gelernten Lösungsmethoden der Lernenden ähneln (Dick, 2008, S. 337). Die Arbeit mit DMW kann das Verständnis vertiefen, wenn sie die Eigenschaften einer „Glas Box“ besitzen. Die einzelnen Aktionen und deren Folgen ergeben für die Lernenden Sinn und erlauben damit den Aufbau aussagekräftiger Schemata über die mathematischen Konzepte (Bos, 2009b). Dafür werden Muster und Strukturen des Konzepts erzeugt, Schritt für Schritt untersucht, getestet und überprüft (Bos, 2011). Um dies zu gewährleisten, müssen die kognitiven Prozesse der Lernenden vom Werkzeug erst einmal darstellbar sein und auch wiedergegeben werden (Bos, 2011; Moyer et al., 2008).

Damit ein DMW ein hohes Maß an *Cognitive Fidelity* aufweist, sollten: (1) Die inneren Prozesse des Werkzeugs transparent, nachvollziehbar und kleinschrittig dargestellt werden, (2) die mathematischen Gedankengänge im Lösungsprozess beleuchtet werden und (3) diese mathematischen Prozesse des Werkzeugs denen der Lernenden ähneln.

Ein kurzes und anschauliches Beispiel für *Cognitive Fidelity* ist Folgendes: Eine Webseite zum Lösen von linearen Gleichungssystemen gibt nach Eingabe der linearen Gleichungen nur die Antwort aus („eindeutige Lösung“, „keine Lösung“, „unendlich viele Lösungen“). Die Lernenden erhalten zwar schnell eine korrekte Antwort auf die gestellte Frage. Es kann jedoch kein konzeptionelles Verständnis aufgebaut werden, da der algebraische Prozess nicht dargestellt wird und das Werkzeug keine Verbindung zu einer geometrischen Repräsentation ermöglicht (Shin et al., 2018).

## Das MTTE-Framework

Die drei Fidelities werden in verschiedenen Arbeiten aufgegriffen und als theoretische Grundlage bzw. als Gütekriterien für die Bewertung von DMW genutzt (Dick, 2008; Bos, 2009b; Larkin, 2015; Namukasa et al., 2016; Shin et al., 2018). In einigen Arbeiten werden die Fidelities als Design-Prinzipien geeigneter DMW für das Lehren und Lernen von Mathematik verwendet (Smith et al., 2017; Bos, 2009a). Moyer et al. (2008) und Bos (2011) hingegen nutzen die Fidelities auch für Weiterbildungskonzepte von Lehrkräften im Umgang mit DMW. Es kann an dieser Stelle festgestellt werden, dass die beschriebenen drei Fidelities theoretisch fundiert sind und in verschiedener Weise angewandt werden können. Sie stellen somit eine gute Grundlage für die Untersuchung und Bewertung von DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik dar.

### Theoretische Rahmung des Evaluationsinstruments

Shin et al. (2018) beschreiben ein Evaluationsinstrument für DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik: Mathematical Technological Tool Evaluation (MTTE)-Framework. Dieses Evaluationsinstrument fußt auf thematisch enger gefassten Vorarbeiten, die Kriterien untersuchen, nach denen Mathematiklehrkräfte bei der Auswahl dynamischer Geometrie-Software vorgehen (Smith et al., 2017).

Die gewonnenen Kenntnisse wurden aufbereitet und mit Informationen von NCTM (2000), NCTM (2014) und Bokhove & Drijvers (2010) verknüpft und für die Anwendung auf DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik erweitert. Das MTTE wird in Tabelle 1 überblicksartig dargestellt.

### Adaptation des Evaluationsinstruments

In jeder Zeile der Tabelle 1 ist eine von drei Fidelities mit Namen, einer Beschreibung und mehreren Leitfragen angegeben. Die drei Fidelities stellen zum einen Gütekriterien für die Bewertung von DMW dar und sind zum anderen die Qualitätsdimensionen für die Evaluation der DMW. Gemäß den bereits skizzierten Beschreibungen, kann eingeschätzt werden, wann ein DMW einer bestimmten Fidelity entspricht. *Pedagogical Fidelity*, beschreibt wie gut mathematische Aktivitäten mittels des DMW möglich sind, ohne von Funktionalitäten oder der Benutzeroberfläche beeinflusst oder eingeschränkt zu werden. *Mathematical Fidelity*, beschreibt wie gut die Eigenschaften und möglichen Aktivitäten eines mathematischen Objektes mittels des DMW repräsentiert werden. *Cognitive Fidelity*, beschreibt wie gut mathematische Gedankenprozesse und Arbeitsschritte mittels des Werkzeugs dargestellt und aufgezeigt werden. Auf Grundlage des MTTE-Frameworks wurde ein adaptiertes Evaluationsinstrument für den SFC Mathematik mit

Tabelle 1. Übersicht zu Mathematical Technological Tool Evaluation Framework (Shin et al., 2018, S. 158)

Fidelity	Descriptions (Dick, 2008)	Questions to Consider When Evaluating and Selecting Technological Tools
Pedagogical fidelity	How well the technological tool allows students to “do” mathematics without difficulty and to manipulate and not be distracted or limited by technical features	Is the tool difficult to use? Does the tool include clear instructions and directions on how to use it? Are there features that distract students from learning? How well does the tool allow students to interact with the mathematical object (e.g., shape, figure, table, plot, formula, equation) and take mathematical actions? How well does the tool offer students the opportunity to explore and develop conjectures and generalizations? How accessible is the tool for all students and does the tool offer customization or accommodations?
Mathematical fidelity	How well a mathematical object in the technological tool represents the underlying mathematical properties of the object with mathematical accuracy	How accurately does the tool represent the mathematics? Does the tool display mathematical formulas correctly, including basic assumptions? (Bokhove, & Drijvers, 2010) What mathematical misconceptions may students develop while using the tool?
Cognitive fidelity	How well the technological tool reflects students’ cognitive actions with emphasis on illuminating mathematical thinking processes rather than simply arriving at the final results	How well does the tool show the ways in which the solution is produced? Does the tool simply display the final results? How well does the tool’s solution method resemble your students’ methods? Does the tool allow multiple solution methods? How well does the tool allow you to gain insight into how students are thinking?

Tabelle 2. Deutschsprachige Leitfragen des adaptierten Evaluationsinstruments

Fidelity	Questions (Shin et al., 2018)	Leitfragen
Pedagogical fidelity	Is the tool difficult to use?	Ist das digitale Mathematikwerkzeug schwer zu benutzen?
	Does the tool include clear instructions and directions on how to use it?	Besitzt das digitale Mathematikwerkzeug klare Anweisungen und Hinweise, Angaben oder Richtungsangaben zur Nutzung?
	Are there features that distract students from learning?	Gibt es Funktionen des digitalen Mathematikwerkzeugs, welche die Lernenden vom Lernen ablenken (könnten)?
	How well does the tool allow students to interact with the mathematical object (e.g., shape, figure, table, plot, formula, equation) and take mathematical actions?	Wie gut können die Lernenden mathematischen Aktivitäten durchführen und mit mathematischen Objekten interagieren (wie Formen, Tabellen, Funktionen, Formeln, Gleichungen, ...)?
	How well does the tool offer students the opportunity to explore and develop conjectures and generalizations?	Wie viele Möglichkeiten der Erkundung und Entwicklung von Vermutungen und Generalisierung erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug?
Mathematical fidelity	How accessible is the tool for all students and does the tool offer customization or accommodations?	Wie zugänglich und anpassbar ist das digitale Mathematikwerkzeug?
	How accurately does the tool represent the mathematics?	Wie präzise wird die Mathematik durch das digitale Mathematikwerkzeug repräsentiert?
	Does the tool display mathematical formulas correctly, including basic assumptions? (Adapted from Bokhove and Drijvers 2010 )	Werden mathematische Formeln (gemeinsam mit grundlegenden Voraussetzungen) korrekt angezeigt?
Cognitive fidelity	What mathematical misconceptions may students develop while using the tool?	Welche mathematischen Fehlvorstellungen könnten durch die Nutzung des digitale Mathematikwerkzeug entstehen?
	How well does the tool show the ways in which the solution is produced? Does the tool simply display the final results?	Wird lediglich das Endresultat angezeigt? Wenn nein, wie gut wird der verwendete Lösungsweg beschrieben bzw. gezeigt?
	How well does the tool's solution method resemble your students' methods? Does the tool allow multiple solution methods?	Wie ähnlich ist der verwendete Lösungsweg den bekannten Lösungswegen der Lernenden? Erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug verschiedene Lösungswege?
	How well does the tool allow you to gain insight into how students are thinking?	Wie gut ist das Vorgehen der Lernenden für die Lehrkraft mit Hilfe des digitale Mathematikwerkzeug nachvollziehbar?

digitalen Werkzeugen mit deutschsprachigen Leitfragen entwickelt. Mittels der zugehörigen Leitfragen wurde während einer Erprobung untersucht, inwiefern das betrachtete DMW dem jeweiligen Gütekriterium entspricht. Die deutschsprachigen Leitfragen sind in der Tabelle 2 zu finden.

#### *Erprobung des Evaluationsinstruments im SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen*

Die Erprobung des Evaluationsinstruments im Rahmen des SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen erfolgte in drei Schritten, die an frühere Erprobungen des Evaluationsinstruments angelehnt sind (Shin et al., 2018, S. 161).

1. Lernziele bestimmen und Erstauswahl möglicher DMW

Die Bestimmung der Lernziele bei der Verwendung der zu bewerteten DMW ist der erste Schritt der Erprobung. Mit vorab definierten Lernzielen können gerichtete Entscheidungen während der Verwendung der DMW getroffen werden, was dem Lehren und Lernen von Mathematik zuträglich ist. Zu den aufbauenden Entscheidungen zählt auch die Auswahl der passenden DMW (Shin et al., 2018). Nach Festlegung der Lernziele werden mögliche DMW für die Untersuchung ausgewählt. Shin et al. (2018) schlagen keine weiteren Kriterien für die Erstauswahl vor; jedes DMW kommt prinzipiell für die Evaluation in Frage.

2. Leitfragen untersuchen

Die ausgewählten Werkzeuge werden mittels der

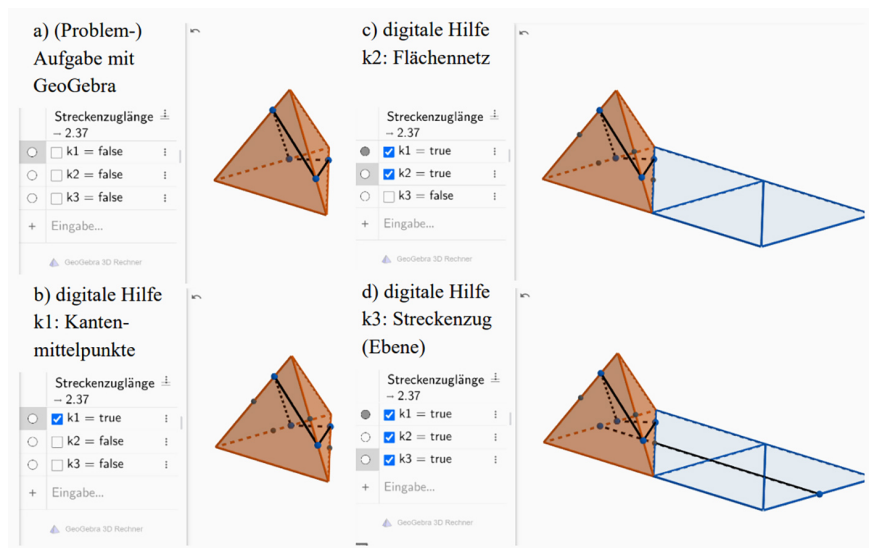


Abbildung 1. 3D-Animation mittels GeoGebra 3D. Abgebildet ist ein animierter Streckenzug auf einer Tetraeder-Oberfläche und (a) sowie die drei digitalen Hilfen (b, c, d).

Leitfragen aus Tabelle 2 untersucht. Wie im Beispiel (vgl. Abbildung 1) zusehen, werden die Resultate der Ergebnisse mit wenigen Worten gegenübergestellt. Wichtig ist die Betrachtung des Kontexts, in dem die DMW verwendet werden. Dabei sind die Lernziele (Schritt 1) und die Auswahl der DMW (Schritt 3) entscheidend.

### 3. Auswahl des passenden DMW

Im dritten Schritt wird das passende und evtl. nicht das „beste“ DMW ausgewählt. In einer ausführlichen Diskussion werden zuerst alle DMW in den drei Gütekriterien zusammenfassend untersucht. Ausgewählt wird dann das DMW, welches am besten zu den vorher gewählten Lernzielen passt (Schritt 1). Dies kann sich vom „besten“ Werkzeug unterscheiden, welches vielleicht in anderen Situationen besser abschneidet (Shin et al., 2018, S. 162).

Als ein Beispiel eines bewerteten DMWs, welches mit dem adaptierten Evaluationsinstrument für die Arbeit im SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen ausgewählt wurde, sei folgende 3D-Animation mit GeoGebra 3D vorgestellt (vgl. Abb. 1): Gesucht ist der kürzeste Streckenzug auf der Oberfläche eines Tetraeders, der alle vier Seiten schneidet. Die erstellte 3D-Animation enthält digitale Hilfen, über die die Lernenden digitales Feedback erhalten können, um die eigenen Lösungsansätze zu überprüfen. Durch die digitalen Hilfen kann erarbeitet werden, dass die Länge des kürzesten Streckenzuges genau der doppelten Kantenlänge entspricht. Wird der virtuelle Streckenzug in der 3D-Animation verändert, so wird dessen veränderte Länge automatisch angezeigt. Weiterhin motivieren die digitalen Hil-

fen eine Begründung der Minimalitäts-Eigenschaft auf Grundlage des (virtuellen) Flächennetzes und der Uneindeutigkeit der Lösung. Die drei digitalen Hilfen konnten durch die Lernenden schrittweise ausgewählt und sich in der 3D-Animation angezeigt werden lassen. Alle digitalen Hilfen sind im Sinne der dynamischen Geometriesoftware echt dynamisch (Schmidt & Müller, 2020, S. 380).

Die 3D-Animation wurde mithilfe des adaptierten Evaluationsinstruments bewertet. Die Antworten auf die (deutschsprachigen) Leitfragen sind in der Tabelle 3 aufgelistet. Dieses Beispiel soll einen Eindruck über die Anwendung des Evaluationsinstruments geben.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das MTTE-Framework sich für die Bewertung von DMW im Rahmen des SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen bewährt hat und auch zukünftig eingesetzt wird.

### Literatur

- Bokhove, C., & P. Drijvers (2010) Digital Tools for Algebra Education: Criteria and Evaluation. *International Journal of Computers Mathematical Learning*, 15(1), 45–62. DOI:10.1007/s10758-010-9162x
- Bos, B. (2009a). Technology with Cognitive and Mathematical Fidelity: What It Means for the Math Classroom. *Computers in the Schools*, 26, 107–114. DOI:10.1080/07380560902906088
- Bos, B. (2009b). Virtual Math Objects with Pedagogical, Mathematical, and Cognitive Fidelity. *Computers in Human Behavior*, 25(2), 521–528. DOI:10.1016/j.chb.2008.11.002
- Bos, B. (2011). Professional Development for Elementary Teachers Using TPACK. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 11, 167–183.

Tabelle 3. Bewertung der 3D-Animation aus Abb. 1 mithilfe der Leitfragen des adaptierten Evaluationsinstruments

Fidelity	Leitfrage	3D-Animation mittels GeoGebra 3D-Rechner
Pedagogical fidelity	Ist das digitale Mathematikwerkzeug schwer zu benutzen?	Die 3D-Animation ist nicht schwer zu bedienen und enthält klare Anweisungen bzw. Aufgabenstellungen.
	Besitzt das digitale Mathematikwerkzeug klare Anweisungen und Hinweise, Angaben oder Richtungsangaben zur Nutzung?	Es ist darauf zu achten, dass die Konstruktions-schritte der 3D-Animation ausgeblendet sind.
	Gibt es Funktionen des digitalen Mathematikwerkzeugs, welche die Lernenden vom Lernen ablenken (könnten)?	Die Konstruktionsschritte der 3D-Animation sind leicht zugänglich (Scrollen) und können die Lernenden ablenken.
	Wie gut können die Lernenden mathematischen Aktivitäten durchführen und mit mathematischen Objekten interagieren (wie Formen, Tabellen, Funktionen, Formeln, Gleichungen, ...)?	Die 3D-Animation bietet verschiedene Möglichkeiten Längen zu verändern, zu messen und Punkte zu verschieben, so dass eine Untersuchung der mathematischen Objekte auf unterschiedliche Art und Weise möglich ist.
Mathematical fidelity	Wie viele Möglichkeiten der Erkundung und Entwicklung von Vermutungen und Generalisierung erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug?	Die 3D-Animation bietet neben der generellen Anwendung drei Hilfsfunktionen, die bei der Entwicklung von Vermutungen unterstützen.
	Wie zugänglich und anpassbar ist das digitale Mathematikwerkzeug?	Die 3D-Animation ermöglicht den Lernenden zu zoomen und die Werkzeugsprache auszuwählen.
	Wie präzise wird die Mathematik durch das digitale Mathematikwerkzeug repräsentiert?	Die 3D-Animation zeigt ein hohes Maß an Präzision bei der Darstellung.
Cognitive fidelity	Werden mathematische Formeln (gemeinsam mit grundlegenden Voraussetzungen) korrekt angezeigt?	Die mathematischen Objekte werden in der 3D-Animation grundsätzlich richtig dargestellt.
	Welche mathematischen Fehlvorstellungen könnten durch die Nutzung des digitale Mathematikwerkzeug entstehen?	Bei der Erprobung konnten keine Fehlvorstellungen identifiziert werden.
	Wird lediglich das Endresultat angezeigt? Wenn nein, wie gut wird der verwendete Lösungsweg beschrieben bzw. gezeigt?	Der Lösungsweg wird digital dokumentiert und ist in den Konstruktionsprotokollen der 3D-Animation nachzuvollziehen.
	Wie ähnlich ist der verwendete Lösungsweg den bekannten Lösungswegen der Lernenden? Erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug verschiedene Lösungswege?	Die 3D-Animation ermöglicht verscheide alters- und adressatengerechte Lösungswege (z. B. Parallelverschiebung, Strahlensatzfigur).
	Wie gut ist das Vorgehen der Lernenden für die Lehrkraft mit Hilfe des digitale Mathematikwerkzeug nachvollziehbar?	Die 3D-Animation Zeigt sowohl das Endergebnis als Teil der Animation an als auch die Art und Weise, wie die Lösung schrittweise erstellt wurde.

Dick, T. P. (2008). Keeping the Faith: Fidelity in Technological Tools for Mathematics Education. In G. W. Blume, & M. K. Heid (Hrsg.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (S. 333–339). Charlotte, NC: Information Age.

Günster, S. M., & Weigand, H. G. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM*, 1–16.

Hegedus, S., Laborde, C., Brady, C., Dalton, S., Siller, H. S., Tabach, M., ... & Moreno-Armella, L. (2017). *Uses of technology in upper secondary mathematics education*. Springer Nature.

Larkin, K. (2015). The Search for Fidelity in Geometry Apps: An Exercise in Futility? Verfügbar 20. September 2021 unter [tinyurl.com/28bf8rl4](https://tinyurl.com/28bf8rl4)

Moyer, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual Manipulatives Used by K-8 Teachers for Mathematics Instruction: The Influence of Mathematical, Cognitive, and Pedagogical Fidelity (G. L. Bull, L. Bell & C. Mouza, Hrsg.). *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(3), 202–218.

Müller, M. (2021a). Distanzlernen am Beispiel des Schülerforschungsclubs Mathematik mit digitalen Werkzeugen – Theoretische Ausgangspunkte zur Rahmung und Entwicklung einer onlinegestützten FernLernumgebung. *Mitteilungen der GDM*, 110, 33–38.

Namukasa, I. K., Gadanidis, G., Sarina, V., Scucuglia, S., & Aryee, K. (2016). Selection of Apps for Teaching Difficult Mathematics Topics: An Instrument to Evaluate Touch-Screen Tablet and Smartphone Mathematics Apps. In P. S. Moyer-Packenham (Hrsg.), *International*



- Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (S. 275–300). Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-32718-1\_12
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- Rabardel, P. (2002). People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments. HAL, Université Paris, [tinyurl.com/2yfrqs2r](https://tinyurl.com/2yfrqs2r)
- Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien – auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel, C. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primarstufe* (S. 37–58). Franzbecker.
- Schmidt, S., & Müller, M. (2020). Students learning with digital mathematical tools – three levels of instrumental genesis. In B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht, & D. Thurm (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (S. 378–383). DOI:10.1080/0020739X.2016.1264635
- Shin, D., Smith, R. C., & Kim, S. (2018). Evaluating technology for teaching mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(3), 156–163. DOI:10.5951/mathteacmiddscho.24.3.0156
- Smith, R. C., Shin, D., & Kim, S. (2017). Prospective and Current Secondary Mathematics Teachers' Criteria for Evaluating Mathematical Cognitive Technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(5), 659–681. DOI:10.1080/0020739X.2016.1264635
- Smith, R., Shin, D., Kim, S., & Zawodniak, M. (2018). Novice secondary mathematics teachers' evaluation of mathematical cognitive technological tools. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 18(4), 606–630.
- Thurm, D., & Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM Mathematics Education*, 52(3), 1411–1422.
- Traglová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H.-G. (2018). Technology and resources in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Hrsg.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (S. 142–161). Springer.
- Whalen, J. (2020). Should teachers be trained in emergency remote teaching? Lessons Learned from the COVID-19 Pandemic. *Journal of Technology and Teacher Education*, 28(2), 189–199.

PD Dr. habil. Matthias Müller, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
E-Mail: [matthias.mueller.2@uni-jena.de](mailto:matthias.mueller.2@uni-jena.de)

Alexander Hörig, Friedrich-Schiller-Universität Jena  
E-Mail: [alexander.hoerig@uni-jena.de](mailto:alexander.hoerig@uni-jena.de)

## Das Projekt <colette/> Computational Thinking (auch) im Mathematikunterricht

Tim Läufer, Rebecca S. Stäter und Matthias Ludwig

Die digitale Transformation hat unser aller Leben fundamental geändert. Die Nutzung von digitalen Medien in der Freizeit von Schülerinnen und Schülern liegt seit Jahren konsistent hoch, so haben beispielsweise deutlich über 94 % der jugendlichen Schülerinnen und Schüler in Deutschland ein Smartphone oder nutzen zum Lernen oder in der Freizeit das Internet (Feierabend et al., 2021). Konkret sind 12- bis 19-Jährige durchschnittlich 241 Minuten am Tag online – mehr als 4 Stunden täglich (ebd.). Die Kompetenzen für einen verantwortungsvollen und zukunftsorientierten Umgang damit werden aber nicht automatisch aufgebaut. Viele

der sog. *21st Century Skills* sind nicht nur heute, sondern auch zukünftig im beruflichen sowie privaten Leben essenziell (Wing, 2006, Lodi & Martini, 2021).

Einer dieser Skills ist *Computational Thinking* (CT), welches 2006 in einem Seminarpapier von Jeannette Wing für Aufsehen sorgte. Dieses Papier stieß eine große Debatte über die Definition und Fächerverortung von formalem, algorithmischem Denken an, die bis heute andauert (Bocconi et al., 2016; Lodi & Martini, 2021). CT liegt (kurz zusammengefasst) das strukturierte, abstrakte, formale und logische Problemlösen zugrunde, mit dem sich