Mathematikunterricht in einer Internationalen Vorbereitungsklasse

Malte Mink und Marc Sauerwein

Dieser Artikel berichtet über einen Ausschnitt eines laufendes Unterrichtsentwicklungsprojekt der beiden Autoren, das sich mit Figurierten Zahlen als einen besonderen Zugang zu Termen und Termumformungen befasst. Der hier vorgestellte Teil findet innerhalb des regulären Mathematikunterrichts einer Internationalen Vorbereitungsklasse statt: es werden zuerst die äußeren Rahmenbedingungen beschrieben, bevor dann die Unterrichtsreihe erläutert wird. Ausgehend von den dort gesammelten Erfahrungen wird im Anschluss kurz Bezug auf den Beitrag *Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten* aus den Mitteilungen der GDM 102 (Oswald, 2017) genommen.

Hintergrund

Als direkte Reaktion auf die große Anzahl von Flüchtlingen, die im Sommer 2015 nach Deutschland kamen, wurde Anfang des Schuljahres 2015/2016 an der Otto-Kühne Schule in Bad Godesberg eine provisorische Flüchtlingsklasse eingerichtet. Da es zu dem Zeitpunkt schon einige Angebote für jüngere Flüchtlingskinder in der Umgebung gab, wurde dort der Schwerpunkt auf die Altersgruppen von 14 bis 18 Jahren, in Einzelfällen sogar bis 21 Jahre, gelegt. Bei der Aufnahme in diese Klasse werden unbegleitete Minderjährige bevorzugt. Zum Februar 2016 wurde diese zu einer offiziellen Internationalen Vorbereitungsklasse (IVK) ausgebaut. Der Zweck dieser Klasse ist es, die Schülerinnen und Schüler in höchstens zwei Jahren auf einen sprachlichen und fachlichen Stand zu bringen, der ihnen den Besuch einer deutschen Regelklasse ermöglicht. Dafür erhalten die Schüler zwischen 15 und 18 Wochenstunden Deutschunterricht, drei bis fünf Stunden Mathematikunterricht und je zwei Stunden Politik, Geschichte und Sportunterricht.[1] Seit Gründung der IVK haben etwa 40 Schülerinnen und Schüler[2] aus Afghanistan, Äthiopien, Eritrea, Irak, Iran, Somalia und Syrien die Klasse besucht. Ungefähr ein Viertel davon sind inzwischen Regelschüler an der Otto-Kühne Schule, während bei einem weiteren Viertel keine gymnasiale Eignung festgestellt werden konnte. Diese Schüler wurden an andere Schulformen in der Umgebung vermittelt oder haben seitdem eine Lehre begonnen.

Der Mathematikunterricht in der IVK unterscheidet sich in einigen Punkten deutlich von dem Unterricht in einer deutschen Regelklasse:

- Die Schüler verfügen kulturell bedingt über eine deutlich positivere Einstellung zu Schule, als die meisten deutschen Schüler. Sie sind ausgesprochen höflich, hilfsbereit und dankbar für jedwede Unterstützung.
- Die mathematische Vorbildung ist extrem heterogen. Einzelne Schüler beherrschen nur die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10, während andere zwölf Jahre mathematische Bildung an gut ausgestatteten Schulen genossen haben.
- Das Sprachniveau der Schüler ist ebenfalls sehr unterschiedlich. Einzelne Schüler versuchen das Level A1 zu erreichen, während andere schon für B2 lernen.[3] Für alle ist aber auf eine einfache Sprache zu achten, insbesondere bei der Planung aller Unterrichtseinheiten.
- Darüber hinaus ist es aber auch eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichtes Sprachbildung zu betreiben, stärker als dies in einer Regelklasse der Fall ist.
- Die Schüler freuen sich meistens auf den Mathematikunterricht, da dieser viele der alltäglichen Sprachprobleme, mit denen sich die Kinder ständig konfrontiert sehen, umgehen und dadurch schnelle Erfolgsergebnisse ermöglichen kann. Das führt in Einzelfällen auch dazu, dass sich im Mathematikunterricht ganz andere Facetten einer Schülerpersönlichkeit zeigen können. Eine Schülerin, die im Deutsch- und Englischunterricht nur passiv dasitzt und den Sportunterricht

[1] Wegen der kurzfristigen Einführung dieser Klasse und der sich häufig ändernden Zusammensetzung der Schülerschaft wird der Stundenplan regelmäßig an die Anforderungen angepasst.

[2] Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit wird im Folgenden das generische Maskulinum benutzt.

[3] Die Niveaus beziehen sich auf den gemeinsamen europäischen Referenzrahmen für Sprachen. Zur Ermittlung der Sprachniveaus dienen einerseits die Tests des deutschen Sprachdiploms sowie andererseits die Tests aus dem Lehrwerk *Netzwerk - Deutsch als Fremdsprache*.

> nur unregelmäßig besucht, blüht im Mathematikunterricht auf: sie hilft den Mitschülern, präsentiert Lösungen an der Tafel und zeichnet sich durch besonderen Fleiß aus. Diese Entwicklung kann dann im persönlichen Gespräch mit Mathematiklehrern dafür genutzt werden, auch mehr Leistung in den anderen Fächern einzufordern.

Mit unserem Ansatz Terme und Termumformungen über Figurierte Zahlen einzuleiten, konnten wir gleichzeitig sprachliche Schwierigkeiten (teilweise) umgehen und die Schülerinnen und Schüler zu mathematischer Diskussion anregen.

Eingangsgespräche für die IVK

Wegen der außergewöhnlich großen Heterogenität wird der Mathematikunterricht in der IVK im Regelfall von zwei Lehrern[4] parallel gegeben, die von weiteren ehrenamtlichen Helfern unterstützt werden, so dass die Klasse in drei bis sechs Lerngruppen unterteilt werden kann.

Da auch unterjährig regelmäßig neue Schüler aufgenommen werden, muss immer wieder neu entschieden werden, in welche Gruppen diese eingegliedert werden können. Dabei ist besonders bei neuen Schülern die Sprachbarriere teilweise sehr hoch. Um diese Barriere zu umgehen, wurde in der Gründungszeit der IVK darüber nachgedacht, Figurierte Zahlen zu verwenden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass für die Analyse von mathematischem Vorwissen die Sprache der Algebra überaus geeignet ist. Diese Symbolsprache ist international so ähnlich, dass alle Schüler während der Gespräche den geschriebenen Term $3/4 + 2/5$ als starken Imperativ empfanden, diesen Term auszurechnen. Mündliche Sprache oder bildliche Erklärungen wurden hier nicht benötigt. Ebenso versuchen alle Schüler von sich aus die Gleichung $3x + 7 = 8x - 2$ nach x aufzulösen. Für uns war es interessant, dass sowohl im nahen Osten und Afghanistan, als auch in Afrika einige Schreibweisen von der in Deutschland üblichen Notation abweichen. In all diesen Fällen werden aber die im angelsächsischen Raum üblichen Notationen verwendet (u.a. Multiplikation mit einem Kreuz statt einem Punkt, schriftliche Division mit einer Tableauschreibweise aus dem englischsprachigen Raum, quadratische Gleichungen durch Faktorisieren mit der Crisscross-Methode zu lösen). Geometrisches Vorwissen lässt sich in den meisten Fällen durch einfache Bilder abfragen. Lediglich die Frage, ob man von einem Dreieck den Umfang, den Flächeninhalt oder die Hypotenuse berechnet haben will, führte in der Vergangenheit zu leichten Verwirrungen. Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich nur sehr schwer ohne ein komplexes Vokabular abfragen. Hierfür sind wir noch an Lösungsansätzen interessiert.

Durchführung und Theoretische Aspekte

Meist wird in deutschen Schulbüchern auf Alltagssprache zurückgegriffen, um den Verallgemeinerungsaspekt von Variablen in den Fokus zu nehmen (vgl. Prediger & Krägeloh, 2015). Aufgrund der oben beschriebenen Gegebenheiten war diese Vorgehensweise so nicht möglich und es wurden Figurierte Zahlen als das zentrale mathematische Objekt gewählt. Unter einer Figurierten Zahl wird hier eine ikonische Folge aus Punkten wie in Abbildung 1 einschließlich der dazugehörigen Zahlenfolge (hier: $3, 6, 9, \ldots$) verstanden.

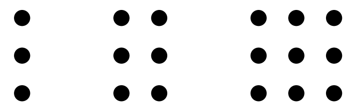

Abbildung 1

Zu Beginn wurde diese Figurierte Zahl mit der kompletten Klasse an der Tafel besprochen. Dabei haben die Schüler die Folge zunächst ikonisch fortgesetzt, bevor sie dann auch die Punkte gezählt haben. Gesetzmäßigkeiten wurden dabei auf arithmetischer Ebene (*immer plus* 3) sowie auf ikonischer Ebene (*da kommt eine Spalte hinzu*) beschrieben und schließlich wurde die Folge als die 3er-Reihe erkannt. Im Anschluss daran wurden typische Fragen gestellt: z. B. wie viele Punkte sind in Bild 100, etc.? Die starke ikonische Repräsentation soll hier aber nicht nur als Sprachvermeidung verstanden werden, vielmehr sollen die Figurierten Zahlen auch der Sprachentwicklung dienen und diese unterstützen (siehe nächster Abschnitt). Nach dem Einführungsbeispiel wurden die weiteren Figurierten Zahlen aus Abbildung 2 in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet mit den folgenden Leitfragen:

- Male die Folgen in dein Heft. Kannst du die weiteren Bilder malen?
- Zähle die Punkte. Trage die Anzahlen in eine Tabelle ein.
- Wie viele Punkte sind in Bild 100 und Bild 100.000?
- Wie viele Punkte sind in einem beliebigen Bild?
- Versuche viele verschiedene Formeln zu finden.

[4] Zurzeit sind das die beiden Autoren.

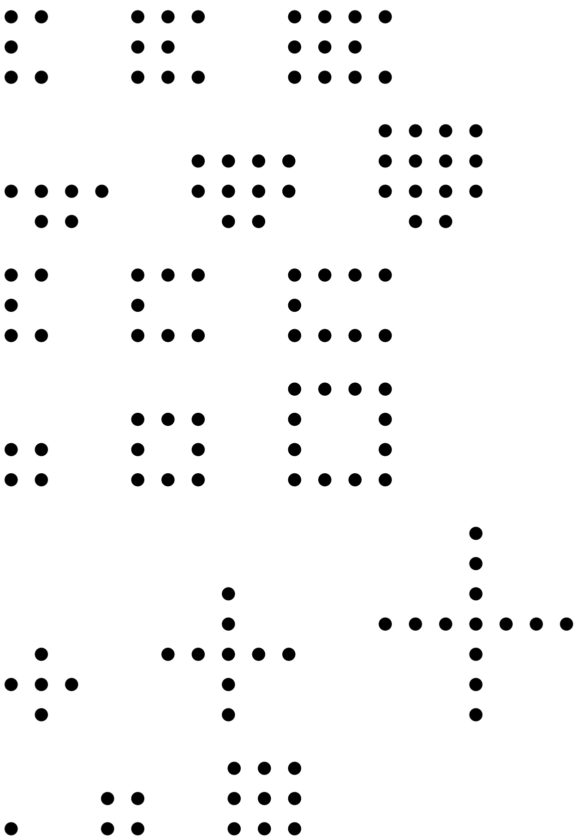

Abbildung 2

Insbesondere bei den letzten beiden Aufgaben gab es Schwierigkeiten: es war den Schülern zwar klar, dass hier nun keine Zeichnung mehr helfen würde, dennoch fehlte den Schülern eine bestimmte Zahl. Dies äußerte sich meist durch direkte Fragen nach einer Zahl bzw. Bildnummer. Wenn nun eine bestimmte Bildzahl genannt wurde, konnten alle Schüler die Punktanzahl (arithmetisch) ausrechnen und es wurde deutlich, dass die Bilder an Wichtigkeit für die Schüler verloren haben, da die Berechnung ohne jegliche Visualisierung geschah. Um den Bildindex stärker in den Fokus zu rücken, wurde eine Umkehrung der üblichen Frage gestellt: wann sind es 101 Punkte? Diese Frage konnte durch Rückwärtsrechnung oder (geschicktes) Ausprobieren gelöst werden, dabei wurde keinerlei Notation einer Gleichung bei den Schülern benutzt. Bei der Rückkehr zur Frage nach der Punktanzahl in einem beliebigen Bild, fingen die ersten nach einer Weile an, ein Blank „_“ bzw. ein Fragezeichen „?“ als einen Platzhalter zu nehmen, um so dieses Rezept zur Berechnung der Anzahl der Punkte aufzuschreiben. Hier wurden dann auch die ersten Gleichungen aufgestellt und das Rückwärtsrechnen wurde deutlicher. Schließlich hat sich die Klasse auf den Platzhalter „x“ verständigt, der hier immer die Bildnummer symbolisiert hat. Durch verschiedene systematische Abzählungen des Bildes konnten verschiedene Rezepte zur Berechnung der Anzahl der Punkte aufgestellt werden. Eine gewisse Gleichheit dieser Terme war für die Schüler instinktiv klar, doch es fiel zu dem Zeitpunkt noch schwer diese zu explizieren. Die Schüler haben zur Überprüfung einzelne Zahlen eingesetzt und dabei vernachlässigt, dass die Terme vom gleichen Bild abstammen. Um hier den Figurierungen eine größere Überzeugungskraft zu verleihen, wurden diese im Folgenden zunächst weggelassen und danach als Entscheidungshilfe wieder eingeführt.

Das Vorgehen wurde nun umgekehrt in dem Sinne, dass Zahlenfolgen in arithmetischer Darstellung Thema waren und diese schließlich in Figurierte Zahlen mündeten. Mit diesen arithmetischen Folgen wurde ähnlich verfahren wie mit den Punktmustern. So besprach die Klasse unter anderem die Folge $1, 3, 5, \ldots$ und erkannte, dass sukzessive 2 addiert wird. Auf Nachfrage, ob die Schüler diese fortgesetzte Folge kennen würden, waren die Schüler ratlos: der Begriff der (un)geraden Zahl war weder in Deutsch noch in der jeweiligen Muttersprache bekannt. Es wurden dann drei Rezepte für die Berechnung eines bestimmen Folgenglieds vorgeschlagen. Um die Richtigkeit dieser Formeln zu plausibilisieren wurden dann die Figurierte Zahlen zu Rate gezogen. Die Diskussion dabei war sehr anregend, da verschiedene Schüler ihre selbst angefertigten Figurierten Zahlen vorgestellt und diese dann auch verteidigt haben. Die Figurierten Zahlen hatten für die Schüler eine andere, persönlichere Bedeutung. Die Diskussion, welche der Figurierungen passend sei, endete mit der Einigung auf eine Normalform (wie in Abbildung 3). Weitere Details finden sich dazu in Sauerwein (2017). Mit Hilfe dieser Normalformen konnten dann erste Regeln für Termumformungen abgeleitet werden, wie z. B. $x + x = 2x$.

$3x + 2$:

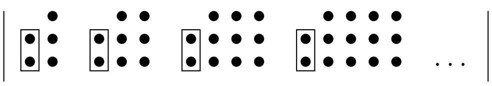

Abbildung 3

Besonderheiten der Lernumgebung und Fazit

Insgesamt zeichnet sich die Lernumgebung in verschiedenen Dimensionen durch eine gewisse Knappheit aus:

- voraussetzungsarm: hinsichtlich der Sprache ist die Lernumgebung direkt zugänglich, da wenige Wörter zur Einleitung gebraucht werden und eine starke operative Komponente vorhanden ist. Im weiteren Verlauf wird die Sprachentwicklung unterstützt.
- schwierigkeitsarm: die vorkommenden Figurierten Zahlen sind fast ausschließlich lineare Progressionen. Dreieckszahlen und viele andere Figurierte Zahlen sind ebenfalls interessant, aber

der Fokus lag nicht auf der Lösung von einzelnen Problemen, sondern auf der Begründung bzw. Ableitung von Termumformungen. Daher war unser Ziel zunächst viele verschiedene Terme zu generieren, um diese in Beziehung setzen zu können.
- informationsarm/reizarm: die zentralen Objekte sind unmittelbar präsent. Weder Einkleidungen noch digitale Medien wurden hier benutzt, sodass es wenig Ablenkung vom mathematischen Inhalt gab. Aufgrund des Alters der Schüler sowie der Einschätzungen der beiden Autoren bezüglich der individuellen Vorlieben der Schüler wurde sich gegen einen enaktiven Ansatz mittels haptischer Objekte entschieden.

Im Folgenden wollen wir auf die Begriffs- und Sprachentwicklung bei den Schülern fokussieren und skizzieren dabei kurz verschiedene Entwicklungsphasen.
- Der Beginn der Einheit, in dem vor allem die Punktmuster dominierten, gab Anlass eben diese Muster in deutsch zu beschreiben. Dabei wurden Worte wie Spalte oder Zeile gebraucht. Obwohl auf die Visualisierung zurück gegriffen werden konnte, wurden im Verlauf auch Wörter wie rechts, links, oben und unten verwendet und daher auch eingeübt. Solche Worte waren bei vielen Schülern vorher nicht bekannt oder eher im passiven Wortschatz.
- Nach dem Beschreiben der Muster, wurden die einzelnen Bilder abgezählt und miteinander in Verbindung gebracht. Die Veränderungen wurden meist damit erklärt, dass etwas dazu kommt. Diese Aussagen eröffneten Möglichkeiten, Begriffe wie Addition, Summe, etc. einzuführen. Ähnlich verhielt es sich für die Multiplikation bei Mustern, in denen Rechtecke erkannt und deren Anzahl der Punkte berechnet wurden.

Diese beiden Sprachregister der Schüler wurden dann in Argumentationen gemeinsam verwendet, wobei meist die deutsche Sprache in den Beschreibungen benutzt wurde, bevor dann Schlüsse in mathematik-spezifischer Sprache gezogen wurden.

Zusätzlich fand bei dem mathematischen Begriff der Gleichheit eine Ausschärfung statt. Das Konzept der Gleichheit tritt an mehreren Stellen auf und wird dort unterschiedlich behandelt. Zu Beginn hat die Lehrkraft vorgeschlagen einzelne Punkte in den Punktmustern geringfügig zu verschieben. Dies stieß auf Widerstand seitens der Schüler, da dies das Muster verändern wurde: Punktmuster wurden zunächst als sehr starr wahrgenommen (konkrete äußere Gleichheit). Nachdem dann verschiedene Zählterme auf dem Tisch waren, konnte auch dort wieder das Konzept der Gleichheit thematisiert werden. Hierbei wurde genau genommen aber erst vom Begriff der Ungleichheit gesprochen, als z. B. für eine bestimmte, eingesetzte Zahl ein unterschiedlicher Wert herauskam (nicht wertgleich). Leider konnte die Gleichheit nicht mehr durch Einsetzen gezeigt werden, und die Figurierungen kamen wieder ins Spiel. Interessant ist hier der Aspekt, dass die Schüler die Terme trotz unterschiedlicher Gestalt als gleich wahrnehmen konnten, wenn sie für einige eingesetzte Zahlen wertgleich waren. Eine Gestaltveränderung wurde bei den Punktmustern noch strikt abgelehnt. Ein nächster Entwicklungsschritt war dann mit den (verschiedenen) Figurierungen für die Zahlenfolgen erfolgt: Muster, die durch Drehungen und Verschiebungen in Relation zueinander stehen, hat die Klasse als gleich angesehen und es wurde schließlich eine Standardanordnung ausgehandelt (gleich im Sinne einer Äquivalenzrelation).

Verschiedene Schüler konnten diese Entwicklungsstufen während dieser Lerneinheit durchlaufen. Es sollte nochmals betont werden, dass der mathematische Inhalt wie auch die Sprache für die Schüler einen nicht zu unterschätzenden Lerninhalt darstellte. Dementsprechend wurde die Unterrichtsreihe zeitlich länger gestaltet als dies am Anfang erwartet wurde. Insbesondere für die Punktmuster haben viele Schüler Zeit gebraucht, um diese zu verstehen und sich dann in einem nächsten Schritt auch darüber auf deutsch zu unterhalten. Beide Entwicklungen sind zeitintensiv und wurden daher aufgrund ihrer späteren Wichtigkeit nicht überstürzt.

Seit kurzem wird diese Unterrichtsreihe auch in einer deutschen Klasse 7 durchgeführt.[5] Dabei wurde die (eindeutige?) Figurierte Zahl aus Abbildung 1 von einer Schülerin auch so interpretiert, dass das dritte Bild die Summe aus den beiden vorhergehenden ist. Dadurch hat sie zum einen den bisher nicht von den Schülern aufgeworfenen Aspekt der eindeutigen Fortsetzbarkeit thematisiert und zum anderen die (dreifachen) Fibonaccizahlen konstruiert und zur weiteren Diskussion ins Spiel gebracht. Ohne eine genauere Analyse wird dennoch schon deutlich, dass dieselben Arbeitsmaterialien und Unterrichtseinstiege zu deutlich differenzierteren und präziseren Beschreibungen der Punktmuster anregen können. In diesem Sinne kann die Unterrichtseinheit unter Umständen einen Beitrag zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht leisten.

[5] Diese Durchführung dauerte zu Redaktionsschluss noch an.

In dem Beitrag *Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten* in den Mitteilungen der GDM 102 (Oswald, 2017) wird ein Projekt beschrieben, bei dem im ergänzenden Mathematikunterricht Flüchtlingen bestimmte Bilder bzw. Visualisierungen von Beweisen innerhalb einer Unterrichtsstunde vorgelegt werden. Die drei Bilder sind die klassischen Visualisierungen der 3. Binomischen Formel, der Summe der ungeraden Zahlen[6] sowie der Dreieckszahlen jeweils in einer starren und nicht dynamischen Form. Zu den Bildern gibt es jeweils die gleiche Frage (Welche mathematischen Beziehungen kann man aus dem Bild herleiten?). Diese Frage muss den Schülern dann (bei Bedarf) durch die Lehrkraft erklärt werden, um sprachliche Barrieren auszuschließen.

Eine der beiden Hauptthesen des Beitrags ist, dass Beweise ohne Worte als ergänzender Lernstandstest bzw. zur Einschätzung des tatsächlichen Mathematikverständnisses dienen können, da sie ohne zusätzliche irritierende Sprachbarrieren auskämen. Diese deckt sich bei weitem nicht mit den Eindrücken aus unserer mehrwöchigen Unterrichtseinheit. Insbesondere wurden die Figurierten Zahlen von den Schülern erst als mathematik-frei und als zu einfach betrachtet. Erst nach einiger Zeit der intensiven Auseinandersetzung konnte mit den Figurierten Zahlen Mathematik betrieben werden und diese für Argumentationen oder Beweise eingesetzt werden. Bevor die Schüler dazu in der Lage waren, haben Sie aber viele Figurierte Zahlen selbst zeichnen und damit operieren müssen. Die Figurierten Zahlen konnten anfänglich nur als Lernmedium eingeführt werden, bevor sie dann erst im weiteren Verlauf als Werkzeug für mathematische Entdeckungen und Grundlage für Beweise fungieren konnten. Daher ist es auch fraglich, ob Kinder, die diese Visualisierungen zum ersten Mal sehen, hiermit gleich komplexe Beweise führen können, sind ihnen doch schon wesentlich elementarere mathematische Tätigkeiten nicht vertraut. Abschließend ist noch festzuhalten, dass in der hier beschriebenen IVK unabhängig vom individuellen Leistungsvermögen der Schüler eine sehr hohe Wertschätzung für Mathematik zu finden ist und gerade dies den dortigen Unterricht zu etwas Besonderem macht.

Danksagung
An dieser Stelle möchten die Autoren sich bei der Klassenlehrerin und Initiatorin Frau Dr. Coester für das großartige Engagement für die IVK bedanken.

Literatur

Oswald, N. M. R. (2017). Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten. GDM-Mitteilungen, 102, 5–11.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015). “x-arbitrary means any number, but you do not know which one” – The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In: Halai, A. & Clarkson, P. (Eds.), Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education. Rotterdam, the Netherlands: Sense, 89–108.

Sauerwein, M. (2017). Figurierte Zahlen als Zugang zu Termumformungen. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag (in Vorbereitung)

Malte Mink, Otto-Kühne-Schule Godesberg
Email: maltemink@googlemail.com

Marc Sauerwein, Rheinische
Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Email: sauerwein@math.uni-bonn.de

[6] Der Beweis beruht auf der Erkenntnis, dass der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen eben eine ungerade Zahl ist. Hierfür muss aber die Folge der ungeraden Zahlen als solche erkannt werden, bevor eine Identität aus dem Bild abgeleitet werden kann.