

Zur Rolle historischer Aspekte in der Didaktik, erläutert am Beispiel der Paradoxie von Achilles und der Schildkröte

Horst Hischer

Buchtitel wie *3000 Jahre Analysis* (Sonar, 2011), *4000 Jahre Algebra* (Alten et al., 2014), *5000 Jahre Geometrie* (Scriba et al., 2005) und *6000 Jahre Mathematik* (Wußing, 2008) suggerieren zeitlich weit zurückreichende Anfänge der Mathematik. So appellierte Otto Toeplitz während der DMV-Tagung 1927 in einem Vortrag mit dem Titel „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen“ dafür, der Bedeutung der Mathematikgeschichte für das Vermitteln und Lernen von Mathematik gerecht zu werden, indem man an die „Wurzeln der Begriffe“ zurückgehen solle, damit „der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen“ und sie „wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen“ (Toeplitz, 1927, S. 92). Diese Haltung ist auch für den Mathematik-Unterricht bedenkenswert, wie es schon weiland Günter Steinberg in vielen Vorträgen angemahnt hatte, konkretisiert durch entsprechend aufbereitete Beispiele (z. B. durch „historische Verankerung“, vgl. Hischer 2021, S. 26 ff.).

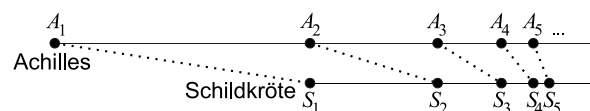
Jedoch ist ein didaktischer Einbezug historischer Aspekte keineswegs per se trivial, wie es hier beispielhaft für die sog. „Paradoxien des Zenon von Elea“ aufgezeigt werden soll, und zwar ausführlich für den „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“, ferner angedeutet auch für den „Läufer im Stadion“. Denn das Besondere bei der hier dargestellten Behandlung des vorliegenden Themas besteht darin, dass nicht nur der rein mathematische Gehalt eine Rolle spielt, sondern vor allem auch der geistige Hintergrund, der zur damaligen Entstehung der überlieferten Probleme führte.

Ich danke Herrn Ulrich Felgner (Universität Tübingen) für eine anregende, vertiefende Diskussion während der Entstehung dieses Essays, ferner Herrn Wilfried Herget (Universität Halle-Wittenberg) für wertvolle Hinweise.

„Achilles und die Schildkröte“ – zur Situation

Vor allem der „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ ist als eine der Paradoxien des Zenon bekannt – einem recht merkwürdigen Beispiel aus der griechischen Antike. Die Situation sei nachfolgend insofern entzerrt dargestellt, als dass hier

nun beide auf parallelen Bahnen laufen, obwohl Achilles eigentlich hinter ihr läuft:



Achilles, der berühmte Held aus der Ilias von Homer, und eine Schildkröte starten also auf parallelen Rennbahnen *gleichzeitig* zu einem Wettlauf. Da Achilles viel schneller ist, erhält die Schildkröte *bei zeitgleichem Start* einen örtlichen Vorsprung. Die punktierten Linien zeigen für einige Zeitpunkte die Blickrichtung von Achilles auf die Schildkröte.

Sobald Achilles hier die Startposition S_1 der Schildkröte erreicht hat, bei ihm also A_2 , ist die Schildkröte schon etwas weiter, nämlich in der Position S_2 . Und wenn Achilles die neue Position der Schildkröte erreicht hat, zunächst also A_3 , so ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter als er, nämlich in Position S_3 . Setzt man diesen Prozess gedanklich (!) iterierend fort, so kann Achilles die Schildkröte anscheinend „niemals“ erreichen, denn man kann argumentieren:

Wann immer Achilles *eine Position der Schildkröte erreicht* hat, ist diese schon etwas weiter.

Dieser *letzten Feststellung* ist in dieser Form (!) offenbar argumentativ *nicht zu widersprechen!* Und gleichwohl ist andererseits klar, dass *Achilles die Schildkröte selbstverständlich irgendwann überholen kann!*

Aber warum wird diese *erkennbar irreal Situation* seit der Antike noch heute zitiert? Und wenn sie jemals eine Botschaft transportieren sollte, dann welche? – Die „Erfindung“ dieses fiktiven Wettlaufs, den u. a. Aristoteles der Nachwelt überliefert hat (s. o.), wird dem ein Jahrhundert zuvor gelebten Zenon von Elea zugeschrieben; doch wer war dieser Zenon, und mit welcher Absicht hatte er dieses unsinnig und realitätsfremd wirkende Beispiel konstruiert?

Zenon von Elea

Die vorsokratische Philosophenschule der „Eleaten“ war nach dem Küstenort Elea in Unteritalien benannt, etwa 80 km südlich des heutigen Salerno gelegen. Ein bedeutender Vertreter dieser Eleaten

war Parmenides, geboren etwa 515 v. u. Z., und der etwa 490 v. u. Z. in Elea geborene Zenon war sein berühmter Schüler (vgl. z. B. Kirk et al. 2001, S. 264). Bezüglich der philosophischen Grundhaltung von Parmenides schreibt Felgner (2020, S. 80):

Parmenidès [...] meinte, daß das wahrhaft Seiende nicht durch Sinne, sondern nur durch das Denken gefunden werden könne. Nur das Denken kann das, was wahrhaft ist, erkennen; die Sinne vermitteln nur scheinbare Einsicht. Das Entstehen und Vergehen der Dinge ist seiner Meinung nach nur Blendwerk der Sinne. Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Die Tragweite dieser angeblichen Haltung von Parmenides in Bezug auf „Bewegungen“ ist kaum ad hoc zu erfassen. Wesentlich für die Betrachtungen im hier vorliegenden Essay ist dann, was Felgner anschließend feststellt (a. a. O.):

Sein Schüler *Zênôn* [...] hat das zu beweisen versucht. [...] *Zenon* will zeigen, daß man sich in Aporien verstrickt, wenn man annimmt, daß Bewegung dem reinen Denken zugänglich wäre.

Eine *Aporie* steht für eine „Ausweglosigkeit im Denken“. Hier kennen wir einerseits die *Paradoxie* (gleichwertig: das Paradoxon) und andererseits die *Antinomie*. Während eine Antinomie für einen *logischen Widerspruch* zweier Aussagen steht, wird eine Paradoxie (von griechisch „para“ für „gegen, neben“ und griech. „doxa“ für „Meinung“) in der Mathematik so verstanden, dass bei zwei zu vergleichenden Behauptungen nur ein *scheinbarer Widerspruch* vorliegt, gegen den der Verstand sich zwar auflehnt, der jedoch gleichwohl auflösbar ist. (Für modifizierte bzw. umfassendere Auffassungen bezüglich „Antinomie“ und „Paradoxie“ siehe z. B. Vollmer 1993, S. 31 ff.).

Wir kommen nun zur Analyse dieses „Wettlaufs“, und dazu sei zunächst die eingangs skizzierte merkwürdige Situation etwas genauer betrachtet. *Aristoteles* (384–322 v. u. Z.) beschreibt diese 347, also ein Jahrhundert nach Zenon, in seiner „Physik-Vorlesung“ verallgemeinert wie folgt *für zwei beliebige Läufer* (gemäß Felgner 2020, S. 81, in Übersetzung des griechischen Originaltexts aus Diels 1951, S. 253, Nr. 26).

Der langsamste Läufer wird niemals vom schnellsten eingeholt werden. Zuerst einmal muß der Verfolger nämlich den Punkt erreichen, von dem der Verfolgte gestartet ist, so daß der langsamere immer etwas Vorsprung hat.

Einerseits scheint diese Betrachtung argumentativ korrekt zu sein, sofern man das „niemals“ und das

„immer“ im Sinne obiger Kommentierung der Abbildung interpretiert, und *andererseits* ist jenseits dieser Interpretation *für uns* sofort klar, dass der schnellere Läufer (speziell: Achilles) auch hier den langsameren Läufer (speziell: die Schildkröte) gewiss *irgendwann* tatsächlich überholen wird, so dass also *in dieser Sichtweise* das „immer“ nicht stimmen kann: Beide Überlegungen sind somit *ad hoc nicht vereinbar*, sie sind widersprüchlich, und das führt zu einer *Aporie* – also zu einer „Ausweglosigkeit im Denken“.

Hier wird man einwenden, dass in dieser fiktiven Situation aufgrund unserer „Lebenserfahrung“ wohl nur ein *scheinbarer* Widerspruch vorliegen muss, der also auflösbar ist, sodass damit eine Paradoxie vorliegen würde. Jedoch könnte diese somit vorliegende innere Widersprüchlichkeit wohl nur dann aufgehoben werden, wenn jeder der *beiden* kontrastierenden Befunde – nämlich: „Achilles überholt die Schildkröte“ vs. „Achilles kann die Schildkröte nicht überholen“ – für sich einen irgendwie gearteten *argumentativen Bestand* hat. Aber wie kann ein solcher aussehen?

Dazu werden wir der Frage nachspüren, *warum und mit welchem Ziel* Zenon diese fiktive Situation damals, vor rund 2500 Jahren, vermutlich erdacht und vorgestellt hat! Da sich später zeigen wird, dass sich der hier also vorliegende innere Widerspruch auflösen lässt, werden wir bereits jetzt wie üblich davon sprechen, dass es sich bei dieser Aporie um eine *Paradoxie* handelt.

Die Zenonsche Paradoxie in der mathematischen Literatur

Woher wissen *wir* etwas über diese Zenon zugeschriebene Paradoxie, über ihre Entstehung und vor allem über ihren (ursprünglichen!) Sinn? Damit stehen wir vor der Frage: *Was wollte Zenon mit dieser Paradoxie (vermutlich, „eigentlich“) zum Ausdruck bringen?*

Zunächst seien hier exemplarisch drei mathematische Publikationen herangezogen, die übereinstimmend Zenon eine philosophische Grundhaltung seines Lehrmeisters Parmenides unterstellen, die als „Leugnung der Möglichkeit von Bewegung“ gekennzeichnet werden kann:

van der Waerden (1940, S. 141):

Was war der Zweck der berühmten Antinomie des Zenon? Nach der landläufigen Meinung [...] wollte Zenon die *Möglichkeit der Bewegung widerlegen*.

(Dabei sprechen wir hier stattdessen im zuvor erörterten Verständnis von „Paradoxien“). Diese unverständlich erscheinende Auffassung einer

„Nichtmöglichkeit von Bewegung“ irritiert im Vergleich mit der zitierten Darstellung von Felgner, gemäß der Zenon diejenige Sicht seines Lehrers Parmenides stützen wollte, dass „Bewegung nicht denkbar“ sei: denn diese beiden Aspekte, nämlich einerseits die „Nichtmöglichkeit von Bewegung“ und andererseits die „Nichtdenkbarkeit von Bewegung“ können ja wohl nicht dasselbe bedeuten! Oder etwa doch?

An späterer Stelle (auf S. 143 f.) vertieft van der Waerden diese o. g. „landläufige“ Meinung (kursiv nicht im Original):

Zenon kann nicht von der Realität der Bewegung als feststehender Tatsache ausgegangen sein, da er als Eleat diese Realität unmöglich anerkennen konnte! Zenon ist doch (nach dem Zeugnis Platons im Dialog Parmenides) ein treuer Schüler des Parmenides, und Parmenides behauptet in seinem authentischen Lehrgedicht ausdrücklich, daß *das Seiende sich nicht bewegt*, oder an anderer Stelle noch deutlicher, daß jede Veränderung des Ortes ein leerer Name, eine bloße Einbildung der Sterblichen sei.

Hier stoßen wir auf ein für Parmenides wesentliches philosophisches Konzept: nämlich das „Seiende“ (damit zusammenhängend auch das SEIN), also schlicht formuliert „*dasjenige, was ist*“ (womit aber gewiss noch keine Klarheit geschaffen wurde, was jedoch hier im Rahmen dieses Essays auch gar nicht geleistet werden kann).

In zwei aktuellen Werken zur Geschichte der Mathematik wird ebenfalls die „*Leugnung der realen Existenz von Bewegung*“ als eine Auffassung von Parmenides betont, die dann Zenon mit seinen Paradoxien bestätigen wollte (die kursiven Hervorhebungen in den Zitaten finden sich nicht in den Originalen):

Wußing 2008, S. 163:

Ganz extrem und schon in der Antike umstritten ist die um 540 gegründete Schule der Eleaten, benannt nach der Stadt Elea in Unteritalien. Hervorragende Vertreter waren Parmenides [...] und Zenon von Elea [...]. Sie leugneten die reale Existenz von Bewegung, Veränderung, Raum und Vielfalt. Berühmt wurden die scharfsinnig vorgebrachten Paradoxien des Zenon, z. B. der „Beweis“, dass beim Wettlauf des schnellen Achilles mit der langsamen Schildkröte, die einen Vorsprung hat, Achilles niemals die Schildkröte einholen kann: Achilles kann immer nur dorthin gelangen, wo die Schildkröte schon war.

Sonar 2011, S. 48:

„Das Seiende“ wird zu einem zentralen Punkt der Parmenides'schen Philosophie und das Sein (oder der Logos, das Eine oder Gott [...]) ist

etwas Einziges, Ganzes, Unbewegliches. Es gibt keine Leere und kein „Werden“; „Nichtseiendes“ ist undenkbar. Da *das Seiende unbeweglich* ist, zweifelt Parmenides offenbar an der Möglichkeit von Bewegung überhaupt – wir sehen nur scheinbare Bewegungen von Menschen, das *eigentliche Sein ist hingegen statisch* – und das wird trefflich bestätigt durch seinen berühmtesten Schüler, Zenon von Elea [...].

Diese von van der Waerden so genannte „landläufige Meinung“ bezüglich der ursprünglichen Bedeutung dieser und weiterer Paradoxien des Zenon (wie z. B. die Paradoxie vom „fliegenden Pfeil im Stadion“) wird also mit der merkwürdig anmutenden, angeblich damaligen philosophischen Auffassung der „Nichtexistenz von Bewegung“ begründet, was bedeuten mag, dass es Bewegung realiter gar nicht gibt (s. o.). Und so kommt es zu Deutungen und Sinnbelegungen dieser Paradoxien, wie sie bisher in der mathematischen Literatur zu finden sind.

Zenon und „Bewegung“ in philosophischer Sicht

Hier ist nun auf eine Kennzeichnung des philosophischen Weltbilds von Parmenides zu verweisen, wie sie Felgner im ersten oben aufgeführten Zitat darstellt, deren wesentlicher Aspekt hier wiederholt sei:

Nur das Denken kann das, was wahrhaft ist, erkennen; die Sinne vermitteln nur scheinbare Einsicht. Das Entstehen und Vergehen der Dinge ist seiner Meinung nach nur Blendwerk der Sinne. Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Allerdings ist es wohl ein wesentlicher Unterschied, ob man die „Existenz von Bewegung leugnet“, wie es etwa die Formulierungen bei van der Waerden, Wußing und Sonar sinngemäß suggerieren, oder ob man der Auffassung ist, dass das Phänomen „Bewegung“ *nur sinnlich feststellbar* sei und dass also damit „Bewegung“ *nicht gedacht* werden kann.

Grundlegende Quelle für eine entsprechende Analyse ist hier das berühmte sog. „Lehrgedicht“ von Parmenides, das von ihm in Hexametern verfasst wurde, das aber größtenteils nur noch fragmentarisch bekannt ist und erst viel später insbesondere durch Simplicios (480–560) kommentierend überliefert wurde. Dieses Lehrgedicht wird in Kapitel 28 der „Fragmente der Vorsokratiker“ von Diels (1951; erste Auflage 1903) behandelt, dann sehr ausführlich von Riezler (1970; erste Auflage 1933) interpretierend vorgestellt, und schließlich widmen Kirk et al. diesem Gedicht ein eigenes Kapitel in ihrem Werk über die „vorsokratischen Philosophen“ (2001, S. 265 ff.).

Eine grundlegende Schwierigkeit besteht bei alten historischen Texten darin, sie „getreulich“ zu deuten und in unsere heutige Sprache zu übersetzen, was zu Verzerrungen und Fehldeutungen führen kann. Zwar ist eine solche getreuliche Übersetzung für manche damit befasste Forscher zum Lebenswerk geworden, jedoch ist es in diesem Essay weder möglich noch nötig, auf die Gesamtessenz dieses Lehrgedichts einzugehen. Und so soll im vorliegenden, Zenon betreffenden Kontext des „Wettlaufs“ versucht werden, Parmenides' Auffassung bezüglich „Bewegung“ zu skizzieren.

Grundlage hierfür ist das Fragment Nr. IV aus dem o. g. Lehrgedicht (hier als Faksimile aus Riezler 1970, S. 26):

... τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστὶν τε καὶ εἶναι.

Transkribiert lautet das: „... to gar auto noein estin te kai einai.“ Dafür seien folgende Übersetzungen in chronologischer Entstehung zitiert, die wir auf die Deutung der Aporie des Zenon übertragen werden:

- (1) *Denn dasselbe ist Denken und Sein.*
- (2) *Denn Eines und Dasselbe ist „Erkennen“ und Sein.*
- (3) *Denn daß man es denkt, ist dasselbe, wie daß es ist.*
- (4) *Denn dasselbe ist, in Gedanken zu erfassen, was es ist, und zu existieren.*

Legende zu diesen Zitaten: (1) findet sich bei Diels 1951, S. 231 als Nr. 3 (erste Auflage 1903) und Kirk et al. 2001, S. 271; (2) formulierte Riezler 1970, S. 27 (erste Auflage 1933); (3) stammt von Kirk et al. 2001, S. 271 (erste Auflage Englisch 1957). (4) war eine Mitteilung von Ulrich Felgner am 21. 5. 2022 an mich.

Hier geht es einerseits um das SEIN (und damit um die „Seinsfrage“), wozu in den letzten beiden Zitaten das „ist“ gehört, und andererseits wird diesem SEIN das „Denken“ gegenübergestellt, das auch in den „Gedanken“ und dem „Erkennen“ zum Ausdruck kommt. Das lässt sich so zusammenfassen, dass „man“ dieses SEIN und damit auch das „Seiende“ (was nicht dasselbe ist) nur durch „Denken“ und damit „in Gedanken erfassen“ kann. Das SEIN – als hier wesentlicher philosophischer Terminus (siehe auch obige Zitate zu van der Waerden und Sonar) – lässt sich also in dieser Auffassung nur „durch Denken erkennen“ (hier sind wir möglicherweise unserem Sprachgebrauch folgend geneigt, „erfassen“ oder „erfühlen“ zu sagen, was aber gerade nicht gemeint ist). Vice versa bedeutet das nun, dass dasjenige, was wir mit unseren „Sinnen“ wahrnehmen (man zerlege dieses letzte Wort in „für etwas Wahres nehmen“) – also mit Sehen, Hören, Fühlen, Schmecken, Riechen – nicht zum SEIN gehört.

Felgner stellt das alles knapp und treffend wie folgt dar (siehe obiges Zitat):

Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Das mag für uns heutzutage eine ungeheuerliche, zumindest aber kuriose Weltsicht sein, führt aber zu einer Erschließung dessen, was Zenon mit dieser Wettlauf-Paradoxie wohl zum Ausdruck bringen wollte:

Hier geht es um die fiktive *Bewegung* von zwei Subjekten, „personalisiert“ durch Achilles und die Schildkröte. Die Zenon zugeschriebene Überlegung, die mit der eingangs dargestellten Abbildung veranschaulicht wurde, führt zu dem absurden Ergebnis, dass Achilles die Schildkröte nicht überholen kann. Doch nun kommt eine überraschende Deutung:

Zenon wird glücklich gewesen sein, dieses Resultat erhalten zu haben, konnte er doch damit die These seines Meisters untermauern – ja gar „beweisen“? – dass „Bewegung für das reine Denken inexistent ist“, dass also „Bewegung nicht gedacht werden kann“: Und so können wir damit nachvollziehen, dass für Zenon anscheinend „Bewegung nur sinnlich feststellbar“ ist.

Wenn wir jetzt die o. g. Formulierungen von Fragment Nr. IV aus dem Lehrgedicht hinzunehmen, wird klar, dass in diesem philosophischen Weltbild des Parmenides „Bewegung“ nicht zum SEIN gehört. Und das macht dann plausibel, weshalb van der Waerden, Wußing und Sonar schreiben, dass Parmenides die „Existenz von Bewegung geleugnet“ hätte: Denn wenn etwas nicht zum SEIN gehört, dann *existiert es in diesem Weltbild nicht!*

Gewiss wird auch Zenon gewusst haben, dass es „Bewegung gibt“, aber für ihn war Bewegung mit dem Denken nicht beschreibbar, weil sich eine Paradoxie ergab – denn selbstverständlich wird er erkannt haben, dass Achilles die Schildkröte irgendwann überholen muss! Für ihn war also einerseits dieser *Widerspruch nicht auflösbar*, und andererseits bestätigte er damit zugleich das Weltbild seines Meisters: *Denn dasselbe ist Denken und Sein* – für ihn blieb es eine Paradoxie!

Erst jetzt wird deutlich, dass die Parmenides und Zenon unterstellte philosophische Auffassung einer *Leugnung der „Existenz von Bewegung“*, wie es van der Waerden und andere schreiben, *zwar nicht falsch, jedoch missverstehbar* ist, wenn der Kontext nicht näher erläutert wird. Klarheit erhält man jedoch mit der zitierten Formulierung von Felgner, gemäß der (für Parmenides und Zenon!) Bewegungen *nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent* sind. Das können wir wie folgt betonen:

Es lag eigentlich nur am *Weltbild der Eleaten*, dass es zu der für uns heute sowohl merkwürdigen als auch unannehmbaren und in der Literatur anzutreffenden verkürzenden Kennzeichnung

einer „Nichtexistenz von Bewegung“ kam, wohingegen es Parmenides doch um die „Nichtdenkbarkeit von Bewegung“ ging.

Zusammenfassende Analyse

Die Paradoxie des Wettlaufs von Achilles und der Schildkröte hat ihren *Ursprung in der Philosophie* von Parmenides und *nicht in der Mathematik*! Denn Parmenides und Zenon waren aus ihrer Haltung heraus Philosophen, jedoch keine Mathematiker. So ist das „Wettlauf-Paradoxon“ *im Ursprung nur ein philosophisches Problem*, beruhend auf der Grundauffassung von Parmenides, dass *Bewegung nicht denkbar* sei – obwohl jedoch *Bewegung mit den Sinnen wahrnehmbar* ist.

In *diesem Sinn* könnte man nun (wie z. B. van der Waerden und andere) zwar sagen, dass es für Parmenides und Zenon *keine Bewegung gibt*, weil „Bewegung“ gemäß Parmenides nicht zum SEIN gehört: denn das SEIN hat in dessen Philosophie keinen Anfang und kein Ende, es gibt also für ihn im SEIN kein Werden und kein Vergehen (im Gegensatz zur sinnlich wahrnehmbaren „Bewegung“). Jedoch ohne Erläuterung dieses philosophischen Hintergrunds ist jene Formulierung der „Nichtexistenz von Bewegung“ missverständlich, während Fegners Formulierung der „Nichtdenkbarkeit von Bewegung“ die Auffassungen von Parmenides und Zenon prägnant trifft.

Und so hat *Zenon* – wie schon angemerkt – mit dem „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ eine *Aporie* erdacht und beschrieben: Denn einerseits zeigt seine Betrachtung dieses fiktiven Wettlaufs, basierend auf der „Nichtdenkbarkeit von Bewegung“, dass Achilles die Schildkröte nicht wird einholen können, und andererseits wird er selbst gewusst haben müssen, dass eine solche Situation nicht mit der visuellen Wahrnehmung übereinstimmen kann.

Wenn man also das *Weltbild von Parmenides* zugrunde legt, demgemäß *Bewegung* (als nicht zum SEIN gehörig) *nicht gedacht* werden kann, dann hat Zenon mit dieser Paradoxie dafür eine überzeugende Bestätigung gefunden.

Erst ein Jahrhundert später wurde diese Wettlauf-Paradoxie durch Aristoteles in die Mathematik geholt, und in der Folge kam es zu neuen Sichtweisen. Im Ergebnis erweist sich nun die Behauptung, dass Achilles die Schildkröte nicht einholen kann, argumentativ als falsch, und zwar dieses nicht nur deshalb, weil sich das (in nunmehr „zugelassener“ Weise) *empirisch beobachten* lässt (und also *nicht nur gedacht* werden kann!), sondern weil es zu unserem in der Neuzeit seit Descartes und Newton entstandenen physikalisch-mathematischen Weltbild mit einem „absoluten Raum“ passt: Wir können

jetzt nämlich auf dieser Grundlage formal beweisen, dass Achilles die Schildkröte überholen wird und wann und wo das bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen eintreten wird!

Wesentlich ist hierbei, dass in dieser neuen Sichtweise neben dem Ort als zweitem wichtigen Parameter die *Zeit* explizit hinzugekommen ist, die bei Zenon jedoch – dem Weltbild Parmenides' folgend – überhaupt nicht betrachtet wird.

So war aus heutiger Sicht die Nichtberücksichtigung der Zeit – dem Weltbilde von Parmenides folgend – der „Fehler“ in Zenons Betrachtung. Und gleichwohl hat Zenon jedoch gemäß dem Weltbild von Parmenides richtig argumentiert!

Nach Mathematisierung der Situation werden etliche mathematische Aspekte erkennbar bzw. hierhin projizierbar, z. B. Zeit-Weg-Funktion, Folgen, Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz, Dichtheit, Kontinuum, Unendlichkeit, ... (die aber allesamt bei Zenon noch gar nicht auftraten).

Wir halten fest, dass man bei diesem fiktiven Wettlauf wohl erst dann von einer „Paradoxie“ sprechen sollte, wenn das *philosophische Weltbild von Parmenides* (zumindest kurz) erklärt und zugrunde gelegt wird, dessen wesentlicher Aspekt nämlich hier greift:

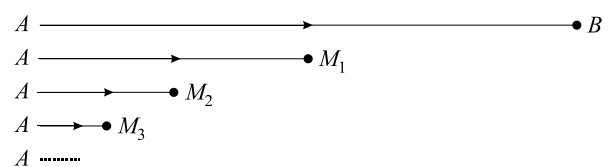
„Bewegung“ gehört für Parmenides nicht zum SEIN, weil für ihn *Denken und Sein dasselbe* ist.

Und Zenon hat darauf aufbauend mit diesem Paradoxon demonstriert, dass *Bewegung nicht gedacht* werden kann!

Es sei noch ein *weiteres Bewegungsparadoxon* von Zenon angedeutet:

„Der Läufer im Stadion“ – zur Situation

Der Läufer will im Stadion vom Punkt *A* aus startend das Ziel *B* erreichen.



Dazu muss er aber zuvor z. B. die Hälfte der Strecke von *A* bis *B* zurückgelegt haben (ebenso z. B. ein Drittel oder ...), er muss also zunächst den Punkt *M1* erreicht haben, dazu aber zuvor den Mittelpunkt *M2* der Strecke von *A* bis *M1*, usw. – Es gibt somit in dieser merkwürdigen fiktiven Situation keinen „ersten Startpunkt“ für den Läufer, so dass dieser also *gar nicht starten* kann – und damit sogar *niemals starten* kann!

So ist auch hier der letzten Feststellung *in dieser Form* (und also aus der Sicht von Parmenides) einerseits argumentativ nicht zu widersprechen, auch wenn andererseits aus empirischer Sicht für uns klar ist, dass der Läufer selbstverständlich starten und das Stadion in endlicher Zeit von *A* nach *B* durchlaufen kann! Wiederum wurde hier von Zenon in seiner Argumentation die „Zeit“ nicht berücksichtigt, und zwar konsequent gemäß dem Weltbild des Parmenides. Und so konnte es auch hier zu einer zwar sorgfältig durchdachten und in sich schlüssigen fiktiven Situationsbeschreibung kommen, deren Konsequenz *wir* jedoch wie beim Wettlauf des Achilles ebenfalls als falsch ansehen.

Auch diese Aporie erweist sich damit für uns *aus damaliger Sicht* (!) als Paradoxie.

Fazit

Die Merkwürdigkeiten der beiden vorgestellten Aporien, die sich in historischer Sicht gemäß Parmenides als Paradoxien erweisen, sind wie folgt beschreibbar:

Beim „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ kommen beide *niemals* zum Ziel, und beim „Läufer im Stadion“ kann der Läufer *niemals* starten.

Das „niemals“ bezieht sich auf den *Aspekt der Zeit*, und genau dieser wird von Zenon ausgeblendet, weil er die Zeit hier nicht betrachtet, denn sie gehört für Zenon und Parmenides nicht zum SEIN, genauer: WIR kennen und verwenden spätestens seit Newton bezüglich des Phänomens „Bewegung“ den funktionalen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit, nämlich $s_1 = v_1 \cdot t$ für Achilles und $s_2 = v_2 \cdot t + a$ für die Schildkröte, und WIR können damit sofort berechnen, wann und wo Achilles die Schildkröte einholt. Aber Zenon betrachtete einen derartigen Zusammenhang nicht – denn die Zeit gehörte nicht zu seinem Weltbild und dem der Eleaten, dem die Auffassung zugrunde lag, dass das SEIN der Ursprung der Welt ist: Das SEIN war für die Eleaten ohne „Werden“ und ohne „Vergehen“, ohne Anfang und ohne Ende. Dieses Weltbild ist heute für uns so apodiktisch nicht mehr gültig (wobei auch unsere heute denkbaren Weltbilder keinen Anspruch auf unerschütterliche Wahrheit haben).

Zenons Argumentation zu den Paradoxien war aus der Sicht unseres naturwissenschaftlich geprägten Weltbildes ohne die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit des Phänomens „Bewegung“ zwar unvollständig und damit also per saldo falsch, doch gleichwohl war sie *innerhalb des Weltbildes von Parmenides durchaus korrekt* und hat dieses also bestätigt!

Ausblick

Der „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ bietet *aus heutiger Sicht* weitere Betrachtungsmöglichkeiten, die jedoch *mathemathikhistorisch* nicht per se relevant sind, wenn oder weil sie nämlich ursprünglich gar nicht im Fokus standen. Und das ist grundsätzlich für die Einbeziehung jedweder historischer Aspekte und Beispiele mathematisch anmutender Bereiche in den Unterricht zu bedenken. So können WIR von unserem heutigen Kenntnisstand aus beispielsweise in die Zenonsche Aporie von Achilles und der Schildkröte manche Aspekte der Analysis hineindenken, obwohl diese damals, wie bereits angedeutet, noch nicht Gegenstand der Betrachtungen waren. Insbesondere waren Parmenides und Zenon ja „nur“ Philosophen und nicht Mathematiker.

Jedoch können und sollten historische Aspekte und Beispiele *nicht nur* im damaligen Kontext betrachtet werden (sofern dieser denn geklärt ist), sondern auch in Bezug auf Implikationen für heutige Sichtweisen und Begriffsbildungen, wenn denn klargestellt wird, dass diese damals nicht notwendig oder ganz und gar nicht Gegenstand des Interesses waren. So bietet die hier angesprochene Aporie des Wettlaufs von Achilles und der Schildkröte eine Vielfalt an Vertiefungs- und Untersuchungsmöglichkeiten, die zwar nicht der historischen Bedeutung entsprechen, die jedoch gleichwohl mathematisch sind und im Rahmen einer „historischen Verankerung“ und mit Bezug auf Otto Toeplitz (s. o.) zu den „Wurzeln der Begriffe“ *hinführen* (!) können. Die Literatur bietet z. B. für diesen „Wettlauf“ viele Beispiele, die kritisch-konstruktiv untersucht werden können bzw. sollten – was aber nicht Anliegen dieses Essays ist.

Die Einbeziehung historischer Aspekte und Beispiele in den Mathematikunterricht kann diesen beleben, bereichern und attraktiv machen – was genutzt werden sollte! Doch grundsätzlich ist dabei zu beachten, dass WIR aus heutiger Sicht in ihnen u. a. wichtige Stationen zur Begriffsbildung sehen und präsentieren können, was allerdings nicht zu der Schlussfolgerung führen sollte, dass eine solche Sichtweise auch damals schon zu Grunde gelegen hat.

Literatur

- Diels, H. (1951). *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Band 1 (6., verbesserte Auflage). Weidmannsche Verlagsbuchhandlung.
- Felgner, U. (2020). *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*. Birkhäuser.
- Hischer, H. (2021). *Grundlegende Begriffe der Mathematik. Entstehung und Entwicklung: Struktur – Funktion – Zahl*. Springer Spektrum.

- Kirk, G. S., Raven, J. E., & Schofield, M. (2001). *Die Vorsokratiker Philosophen*. Metzler.
- Riezler, K. (1970). *Parmenides* (zweite, ergänzte Auflage). Vittorio Klostermann.
- Sonar, Th. (2011). *3000 Jahre Analysis*. Springer.
- Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 36, 88–100.
- van der Waerden, B. L. (1940). Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Mathematische Annalen*, 117(2), 141–161.
- Vollmer, G. (1993). *Wissenschaftstheorie im Einsatz*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft.
- Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik. I: Von den Anfängen bis Leibniz*. Springer.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

Publikationsbasierte Dissertation?!

Argumente – Aktueller Stand – Offene Fragen

Julia Joklitschke, Sebastian Geisler, Silke Ruwisch, Bärbel Barzel und Torsten Fritzlar

Die Frage „Dissertation als Monographie oder als kumulative Dissertation?“ wird aktuell an vielen Standorten und im Rahmen der GDM-Nachwuchsvertretung kontrovers und oft auch leidschaftlich diskutiert.

Auslösende Faktoren dieser Diskussion sind Anforderungen an Promovierende, bereits während der Promotionszeit wissenschaftlich zu publizieren, um die Sichtbarkeit der eigenen Forschung zu erhöhen, eventuelle Ansprüche von Drittmittelgebern zu erfüllen oder gut vorbereitet zu sein für die aktuelle wissenschaftliche Praxis.

Angeregt durch konkrete Anfragen an den GDM-Beirat haben wir uns als Kleingruppe zusammengefunden. Uns vereint, dass wir die Möglichkeit einer publikationsbasierten Dissertation befürworten, ohne dass diese die monographische Form ersetzen sollte.

Mit diesem Artikel möchten wir die bisherigen Diskussionen öffnen und transparent machen. Deshalb beginnen wir mit einer Sammlung von Argumenten aus dem aktuellen Diskurs. Im Anschluss stellen wir die Ergebnisse einer informellen Abfrage vor, die Silke Ruwisch bei Kolleg/-innen verschiedener mathematikdidaktischer Standorte durchgeführt hat und mit der sich ein grober Überblick über gängige, einschlägige Praxen gewinnen ließ. Wir schließen mit offenen Fragen zur Thematik, die zur gemeinsamen Diskussion anregen sollen.

Deshalb laden wir herzlich ein zum gemeinsamen Austausch im Rahmen des Diskussions-

forums „Publikationsbasierte Dissertation?!“ auf der GDM-Jahrestagung in Frankfurt. Weitere Informationen dazu entnehmen Sie bitte der Tagungsseite www.gdm-tagung.de.

Argumente

Die Kommunikation mathematikdidaktischer Forschung läuft seit jeher über unterschiedliche Medien. Neben der Diskussion von Vorträgen auf Konferenzen findet diese zum großen Teil über nationale und internationale Zeitschriftenartikel statt, bei denen zumeist durch intensive Reviewverfahren eine gewisse inhaltliche Qualität sichergestellt wird. Ähnliches gilt auch für Beiträge in Sammelbänden. Beides eignet sich in besonderer Weise dazu, Forschungsergebnisse (auch international) sichtbar zu machen. Zugleich können internationale Forschende an die veröffentlichten Erkenntnisse anschließen, Netzwerke können entstehen oder erweitert werden. Dementsprechend haben derartige Publikationen eine besondere Bedeutung für die Weiterentwicklung unserer Disziplin.

Darüber hinaus ergeben sich Mehrwerte auf personenbezogener Ebene. Bei Promotionen auf der Grundlage von Publikationen in internationalen Zeitschriften und Sammelbänden werden Doktorand/-innen unterstützend an diesen wichtigen Bestandteil wissenschaftlichen Arbeitens herangeführt und können bereits früh nicht nur rezeptiv, sondern auch produktiv am wissenschaftlichen