Verstehen der Zahlen

Hanns Sommer

Einführung

In seinem Beitrag, „Anregungen zum Nachdenken über Mathematikdidaktik als Wissenschaft“ hat Jürgen Maaß ([1]), mit Bezugnahme auf N. Luhmann, dargelegt, dass auch die Mathematik, als Wissenschaft durch den Konsens unter den Mathematikern konstituiert ist. Dies hat zur Folge, dass im Mathematikunterricht ein definierter Wahrheitsbegriff der Mathematik noch nicht verfügbar ist, denn dessen Kenntnis würde ja ein Eingeführtsein in die Mathematik voraussetzen. Der Lehrende der Mathematik muss daher, der Wissensstufe der Schüler angemessen, eine Grundvorstellung entwickeln ([2]), bezüglich der die jeweils eingeführte Mathematik als ‚wahr‘ begründet werden kann. Diese Grundvoraussetzung der Mathematikdidaktik soll hier an einem Beispiel veranschaulicht und bezüglich ihrer Konsequenzen diskutiert werden.

Wir wollen einen Verstehensrahmen für die Natürlichen Zahlen einführen, der auf der Betrachtung finit konstruierter Bilder (analog zur Geometrie Euklids) begründet ist. Innerhalb dieses Rahmens ergibt sich die Heyting-Arithmetik (d. h. die Arithmetik ohne Tertium-non-datur) als objektive und konsistente Theorie, aber wir erhalten mehr:

> Es existieren Objekte, als Teil der Zahlen, die finit darstellbar sind, z. B. die Quadratzahlen und solche, wie die Primzahlen, für die dieses nicht gilt.

Der Verstehensrahmen liefert daher ein Wissen, das über das hinausgeht, was aus den Axiomen der Heyting-Arithmetik gefolgert werden kann. Wir werden die Bedeutung dieses Wissens erläutern. Für die Mathematikdidaktik als Wissenschaft folgt aus unseren Überlegungen, dass diese nicht nur eine Kombination aus Mathematik und Didaktik ist, sondern ein eigenständiger Forschungsbereich, der Ergebnisse liefert, die weder der Mathematik, noch der Didaktik zugänglich sind.

Methode zur Begründung von Aussagen mittels finiter Bilder

Die Grundvorstellung unserer Begründungsmethode wurde im alten Griechenland eingeführt, um objektive Aussagen über die Größe von Grundstücken zu machen. Über einem Grundraum, einer ebenen Fläche (deren Herstellung umgangssprachlich beschrieben wurde), wurden mit Zirkel und Lineal Figuren konstruiert, über deren Größenverhältnisse dann objektive Aussagen begründet werden konnten ([3]). Objektivität hatte hier also die Bedeutung der Kommunizierbarkeit und Wahrheit bedeutete die Bestätigung bzw. Sichtbarkeit in einem finit konstruierten Bild. Die Logik, die diesen Argumentationen zu Grunde liegt, ist die Logik der Bildbetrachtung. Wird z. B. Aussage A durch ein Bild und Aussage B durch ein zweites Bild bestätigt, so wird die Aussage $A \wedge B$ (A und B) durch die Zusammenfügung beider Bilder bestätigt. Da Bestätigung Sichtbarmachung bedeutet und das Gegenteil, nämlich Unsichtbarkeit, nicht sichtbar sein kann und da die Bilder von allen Beteiligten in gleicher Weise gesehen werden, erhalten wir die Folgerung:

Satz 1. Eine mit der eingeführten Methode bestätigte Aussagenmenge ist objektiv und konsistent.

Die Idee, mit dieser Methode auch die Aussagen über die natürlichen Zahlen zu bestätigen, geht auf einen Beweis des ganz jungen Gauß zurück. Den Nachweis der Formel (1) gibt Gauß mit Abbildung 1.

$$2s = 2 \sum_{(i=1)}^{n} i = \big((n+1) \times n\big) \tag{1}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + \ldots + & 2 & + & 1 \\ 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) & + & (n+1) \\ & = & n \cdot (n-1) & & & & & & \end{array}$$

Abbildung 1. Der Gauß’sche Beweis der Formel (1)

Diesem Beispiel folgend, benötigen wir zur Herstellung von Bildern, um Aussagen über die Zahlen zu bestätigen, die Symbole:

- Folgen von Strichen ‚|‘ zur Darstellung der Zahlen, z. B. ||||||| für die Zahl 7.
- Das *etc.-Symbol* ‚. . . ‘ zur Darstellung des Begriffs ‚und so weiter . . . ‘.
- Verbindungslinien, um Zusammengehöriges zu kennzeichnen.

Eine beliebige Zahl, der Zahlenmenge $\mathcal{N}$, wird dann dargestellt durch $|\ldots|$, und um zu kennzeichnen, dass zwei beliebige Zahlen nicht gleich sein müssen, können dem etc.-Symbol zur Unterscheidung Indizes angefügt werden. $|\ldots_m|$ und $|\ldots_n|$ sind also zwei beliebige, nicht notwendig gleiche Zahlen.

Zum Erkennen der Gleichheit von Zahlen, oder Strichmengen, verwenden wir die *Vergleichsoperation für Mengen A und B*:

- Entferne ein Element aus jeder der Mengen.
- Stopp, falls eine der Mengen leer ist.
- Falls Stopp wegen A erfolgt und nicht wegen B, dann definiere: $\#(A) < \#(B)$
- Falls Stopp wegen B erfolgt und nicht wegen A, dann definiere: $\#(A) > \#(B)$
- Falls Stopp gleichzeitig für beide Mengen erfolgt, dann definiere: $\#(A) = \#(B)$

$\#(A)$ wird als Mächtigkeit der Menge A bezeichnet. (Da die Elemente der Mengen ungeordnet sind, kann das Entfernen in beliebiger Reihenfolge erfolgen.)

Das *Erkennen von Gleichheit* ist damit auf zwei Arten möglich:

1. Gleich Konstruiertes ist gleich.
2. Durch die Vergleichsroutine als gleich Erkanntes ist gleich.

Um Aussagen über die Zahlen zu formulieren, werden auf den Zahlen Operationen eingeführt:

- die Nachfolgeoperation $S(|\ldots|) := |\ldots||$,
- die Addition $+$ (oder das Zusammenfügen von Strichfolgen) und
- die Multiplikation $\times$ (oder das Ersetzen jedes Strichs der ersten Folge durch die zweite Folge).

Mittels Bildern, die mit den beschriebenen Symbolen gezeichnet werden, können dann alle Aussagen der Peano-Axiome bestätigt werden. Als Beispiel zeigt Bild 2 eine Bestätigung des Kommutativgesetzes der Addition.

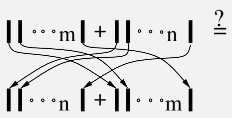

Abbildung 2. Kommutativgesetzes der Addition (Die mit einem Pfeil zugeordneten Striche werden im gleichen Schritt entfernt.)

Wir bezeichnen ein, mit den Symbolen in endlich vielen Schritten konstruiertes Bild, eine *finite Darstellung*.

Wichtig ist die Feststellung: Es gibt auch unendliche Teilmengen der Zahlen, die finit darstellbar sind. Als ein Beispiel, unter vielen möglichen, zeigt Abbildung 3 die Menge der Quadratzahlen.

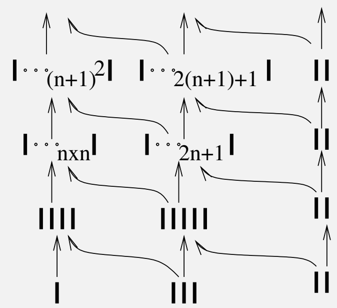

Abbildung 3. Die Quadratzahlen entstehen auf der linken Seite in der Zeichnung. Jede Zahl entsteht als Summe der Zahlen, von denen Pfeile ausgehen, die auf sie weisen.

Die Primzahlen

Um die Primzahlen zu verstehen, muss zunächst auf einen prinzipiellen Unterschied zwischen der Addition und der Multiplikation hingewiesen werden. Die Umkehrfunktion zur Addition, die zu zwei Zahlen $|\ldots_m| \geq |\ldots_n|$ $(m \geq n)$ die Zahl

$$|\ldots_k| = |\ldots_m| - |\ldots_n| \quad (k = m - n)$$

liefert, kann im finiten Bild dargestellt werden, ohne Verwendung der Mess- oder Vergleichsoperation (vgl. Bild 4).

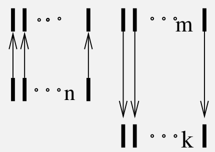

Abbildung 4. Minus-Operation (Die mit einem Pfeil nach oben zugeordneten Striche werden entfernt. Die Pfeile nach unten ergeben die Zahl k.)

Dagegen ist die Umkehrfunktion der Multiplikation, die Division, im Allgemeinen nicht ohne Benutzung der Vergleichsoperation beschreibbar, denn es muss ja gemessen werden, ob nach k-fachem Abziehen der Zahl n von der Zahl m ein Rest übrigbleibt, der ein Abziehen eines weiteren n möglich macht.

Mit den eingeführten Begriffen sind nun die Primzahlen $\mathcal{P}$ definiert mit der *Suchroutine zum Finden der Primzahlen kleiner M:*

(1) Seien die Primzahlen $p_1 < p_2 <, \ldots < p_k$ gefunden,
Setze $m = p_k$

(2) $m = S(m)$, IF $m > M$ THEN STOPP,
FOR i=1 TO k DO:
IF p_i teilt m THEN GOTO (2),
ENDFOR
Setze $k = k + 1, p_k = m$ GOTO (1)

Wir erkennen aus der Herstellung der Primzahlen, dass jeweils eine neue Primzahl in jedem Suchschritt bestimmt wird und dass jeder dieser Suchschritte zur Beantwortung der Frage ‚p_i teilt m?' die Vergleichsoperation benötigt, um festzustellen, ob k-faches Abziehen der Zahl p_i von m den Rest $= 0$ ergibt. Da diese Konstruktion von $\mathcal{P}$ damit unendlich oft durch Messungen Information aus dem Grundraum in das Konstruierte (die Primzahlen) überträgt, ist sie nicht finit.

Eine Struktur, bei der zur Konstruktion ihrer einzelnen Elemente jeweils auf eine Messung Bezug genommen werden muss, ist nicht mit etc-Symbolen finit darstellbar, denn mit dem etc-Symbol kann ja immer nur auf das bereits Konstruierte und nicht auf eine Information aus dem Grundraum zugegriffen werden. Ist dagegen eine Konstruktion des nächsten Elements ohne Bezug zum Grundraum möglich, dann ist jedes Element eindeutig nur mittels der Konstruktionsvorschrift beschreibbar und in diesem Falle können auch alle Beziehungen zwischen den Elementen nur von der Konstruktionsvorschrift abhängen.

Können wir daher feststellen, dass die Konstruktionsvorschrift für die Primzahlen $\mathcal{P}$ (die Suchroutine zum Finden der Primzahlen), auf einem geänderten Grundraum eine völlig andere Struktur ergibt, so erkennen wir, dass $\mathcal{P}$ nicht finit darstellbar ist.

Primzahlen bezüglich dem Grundraum $2\mathcal{N}$

In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit der Konstruktion der Primzahlen mit der Suchroutine vom Grundraum nachgewiesen werden.

An Stelle des Grundraums $\mathcal{N}$ verwenden wir nun den Grundraum:

$$2\mathcal{N} = \{||, ||||, ||||||, ||||||||, \dots\}$$

mit den Operationen S($|\dots|$):=$|\dots|||$, + und $\times$.

Obwohl die Konstruktion von $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ auf $2\mathcal{N}$ mit exakt der selben Suchroutine durchgeführt wird, die $\mathcal{P}$ über $\mathcal{N}$ ergab, erhalten wir nun ein völlig anderes Ergebnis.

Für eine gerade Zahl g, eine ungerade Zahl u von $\mathcal{N}$ und 2 gilt: $2gu = 2 \times gu$, wohingegen $2u$ in $2\mathcal{N}$ nicht in Faktoren aus $2\mathcal{N}$ zerlegbar ist.

Daher besteht $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ aus allen Zahlen der Form $2u$:

$$\mathcal{P}_{2\mathcal{N}} = \{2 \times (2n+1) \text{ mit } n \in \mathcal{N}\} \tag{2}$$

Auf $2\mathcal{N}$ gilt auch nicht die Eindeutigkeit der Faktor-Zerlegung denn es gilt für Primzahlen $p, q \in \mathcal{P}$:

$$2p \times 2q = 2 \times 2pq.$$

Die Darstellung durch Gleichung (2) offenbart, eine völlige strukturelle Verschiedenheit zwischen $\mathcal{P}$ in $\mathcal{N}$ und $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ in $2\mathcal{N}$ auf. Wir erhalten somit das Ergebnis:

Satz 2. $\mathcal{P}$ ist nicht finit darstellbar.

Dieser Satz konnte nicht ausschließlich mit den Axiomen Peanos begründet werden, er ist wesentlich das Ergebnis eines Reflexionsprinzips, d. h. einer Argumentation, die auf den Verstehensrahmen Bezug nimmt, den wir für die Zahlen bereitgestellt haben.

Wie sind Aussagen über die Primzahlen $\mathcal{P}$ bestätigbar?

Da die Primzahlen $\mathcal{P}$ nicht in einem finit konstruierten Bilde darstellbar sind, ergibt sich die Frage: Wie sind Aussagen über die Gesamtheit der Primzahlen $\mathcal{P}$ beweisbar?

Die bekannten Beweise (vgl. das Buch von Paulo Ribenboim [4]) beruhen auf zwei Methoden:

1. Finde eine *vereinfachende Sichtweise*, die das untersuchte Objekt in einem finit konstruierten Bilde zeigt und die fragliche Aussage bestätigt.
2. Finde eine *Teilansicht des untersuchten Objekts*, die finit konstruierbar ist und mittels der die Aussage bestätigt werden kann.

Wir besprechen beide Methoden am Beispiel der *Bestätigung der Aussage* '$\#(\mathcal{P}) = \infty$'.

Eine vereinfachende Sichtweise der Primzahlen

In dieser Sichtweise abstrahieren wir von der genauen Position der Primzahlen in $\mathcal{N}$ und reduzieren unser Wissen auf deren Anordnung. Mit dem etc-Symbol erhalten wir folgendes Bild von $\mathcal{P}$:

$$p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_k \dots$$

Wir müssen nachweisen, dass die Suchroutine die jeweils nächste Primzahl auf einem endlich begrenzten Suchbereich auch auffindet. Angenommen, wir hätten $p_1, p_2, \dots, p_k$ gefunden und suchen nun p_{k+1}.

Definiere $\pi_k := \prod_{i=1}^{k} p_i + 1$, dann lässt π_k geteilt durch p_i den Rest 1. Daher ist p_i kein Teiler von π_k und somit ist π_k selbst Primzahl oder es kann zwischen p_k und $\pi_k + 1$ eine neue Primzahl p_{k+1} mit der Suchroutine gefunden werden.

Das Buch von Ribenboim enthält viele andere Beweise dieser Aussage, die diese vereinfachende Sichtweise verwenden, vergleiche z. B. Thues oder Aurics Beweis.

Beschränkung der Sichtweise auf einen Teilbereich der Zahlen

Wir schränken die Betrachtung ein auf die Fermat-Zahlen

$$\{F_n = 2^{2^n} + 1 \quad \text{für} \;\; n \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N}.$$

Für die Fermat-Zahlen kann man einfach nachweisen, dass jeweils zwei verschiedene Fermat-Zahlen teilerfremd sind (vgl. [4]). Daher muss in jeder Fermat-Zahl wenigstens eine neue Primzahl als Teiler auftreten. Da es unendlich viele Fermat-Zahlen gibt, existieren somit auch unendlich viele Primzahlen.

Da wir hier unsere Sichtweise auf einen kleinen Teil von $\mathcal{N}$ eingeschränkt haben, finden wir auf diese Weise natürlich nur einen kleinen Teil vom $\mathcal{P}$.

Diskussion der Methode

Die vorgestellte Methode zur Begründung der Aussagen über die Zahlen kann, als Beispiel eines Verstehensrahmens, dazu dienen, die Bedeutung der Verstehensrahmen im Mathematikunterricht zu diskutieren. Jedem Schüler werden die Zahlen, im Laufe seiner Schulzeit in immer neuen Verstehenskontexten vermittelt. Wir wollen im Folgenden aufzeigen, dass jede, so erlangte Verstehensstufe, nicht nur das Wissen über die Mathematik, sondern auch das generelle Verstehen erweitert.

Verstehen der Mathematik

Der vorgestellte Begründungshorizont zur Heyting-Arthmetik macht Aussagen über die Zahlen verständlich, die mittels den reinen Peano-Axiomen nicht verstanden werden können.

Satz 1 begründet die Konsistenz der Heyting-Arithmetik. Natürlich ist dieser Satz weit schwächer als Gentzens Konsistenz-Satz, der ja auch das ‚Tertium non datur' mit einschließt. Da Gentzen die Widersprunchsfreiheit der Zahlentheorie aber mittels einem Herleitungskalül nachweist, könnte er bezüglich dessen Konsistenz auf Satz 1 verweisen, denn alle Herleitungen können ja auf Papier aufgeschrieben und damit finit dargestellt werden [6].

Satz 2 erklärt die qualitative Verschiedenheit zwischen den Quadratzahlen und den Primzahlen. Obwohl beide Zahlenmengen mathematisch exakt spezifiziert sind, sind sie prinzipiell unterschiedlich. Während die Quadratzahlen in einem finit konstruierten Bilde dargestellt werden können, gilt dies nicht für die Primzahlen. Das ‚stochastische Verhalten' der Primzahlen ist eine Konsequenz dieses Unterschieds. A. Fraile, R. Martinez und D. Fernandez haben viele Tests für das stochastische Verhalten von Zahlenfolgen an den Primzahlen überprüft und deren Erfüllung durch die Primzahlen aufgezeigt ([5]).

Die finite Darstellbarkeit der Umkehroperation zur $+$-Operation hat zur Folge, dass Antworten zu Fragen, die mit der Struktur $(\mathcal{N}, S, +)$ formulierbar sind, direkt in einem finit konstruierten Bilde sichtbar gemacht werden können. Für einige Fragen bezüglich der Struktur $(\mathcal{N}, S, +, \times)$ mussten wir dagegen zuerst eine geeignete Sichtweise finden. Diese entspricht einer *neuen Idee*, die uns über den eingeführten Verstehenshorizont hinausführt.

Der prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Strukturen spiegelt sich wider in Mojzesz Presburgers Vollständigkeitssatz für $(\mathcal{N}, S, +)$ und Kurt Gödels Unvollständigkeitssatz für $(\mathcal{N}, S, +, \times)$.

Erweiterung des generellen Verstehens

Unsere Betrachtungen sind ausgegangen von der Feststellung, dass die Mathematik, wie alle anderen Wissenschaften, durch einen Konsens unter den Wissenschaftlern gebildet wird. Damit erhebt sich aber die Frage: *Warum sind die Aussagen der Mathematik in den letzten 2500 Jahren unverändert gültig geblieben und nur erheblich vermehrt worden, wohingegen die Aussagen der anderen Naturwissenschaften weitreichenden Änderungen unterworfen waren?*

Unser Beispiel gibt darauf eine einfache Antwort. Bei der Schaffung eines Verstehensrahmens für die Mathematik wurden wir von zwei Normen geleitet: *Objektivität und Begründbarkeit*. Diese beiden Normen sind aber weitgehend unabhängig vom Erkenntniszugewinn, den unsere heutige Zeit gegenüber derjenigen des alten Griechenlands aufweist. In der Mathematik stehen diese Normen am Anfang, bei der Bildung eines Verstehensrahmens, wohingegen in den Naturwissenschaften und der Physik sich das Verstehen an den Messdaten ausrichten muss. Es ist das Kennzeichen der modernen Physik, dass diese zum Verstehen ihrer Messdaten nur Verstehenskonzepte aus der Mathematik zulässt.

(Es wäre natürlich denkbar, dass das Zulassen von Computer-Beweisen, die vom Menschen nicht mehr überprüfbar sind, einen neuen Begründungsbegriff impliziert.)

Wichtige Begriffe der Phänomenologie Edmund Husserls ([7]), die auch für die Physik von Bedeutung sind, können mit der dargelegten Verstehensweise veranschaulicht werden.

Mit dem Begriff des *Vermeinens* (NOESIS) weist Husserl darauf hin, dass der Prozess der Meinungsbildung nicht ohne aktive Mitwirkung des Betrachtenden vollzogen werden kann. Wir haben einen solchen Prozess kennengelernt beim Erkennen der Aussage

$$\#(\mathcal{P}) = \infty.$$

Ohne die Erschaffung einer geeigneten Sichtweise, wäre dies Aussage nicht erkennbar.

Ein Objekt, dessen Erfassen mehrere unterschiedliche Sichtweisen erforderlich macht, wird von Husserl als *Zwittereinheit* bezeichnet. Ein solches Objekt, das dem Vorstellungsvermögen nur schwer zugänglich ist, wird von den Primzahlen repräsentiert, denn diese erfordern verschiedene Sichtweisen, eine um ihre Elemente exakt zu erkennen und eine andere zum Nachweis ihrer Unendlichkeit.

Lehrende anderer Fachrichtungen werden dieses Beispiel für eine Zwittereinheit, aus der Mathematik, gerne in ihr Fachgebiet übernehmen. Der Religionslehrer bei der Diskussion der Frage, die einst die Bilderstürmer auf den Plan rief, *ob man sich ein Bild von Gott machen kann*, und der Physiklehrer bei der Frage, *ob Wahrscheinlichkeit ausschließlich vom Nichtwissen des Beobachters bedingt wird*.

Wahrscheinlichkeitsbegriffe der Physik

Rauschen wird in der klassischen Mechanik häufig als ein unbekannter äußerer Einfluss verstanden, der eine exakte Berechnung unmöglich macht. Würden wir dagegen die genauen Rauschwerte kennen, so wäre eine exakte Berechnung möglich. Bei einem Objekt aber, das prinzipiell unterschiedliche Sichtweisen erfordert, liegt eine völlig andere Situation vor. Es ist hier ja gerade nicht möglich, die unterschiedlichen Sichtweisen in einer einzigen zu vereinen und somit kann die eine Sichtweise für die andere Betrachtungsweise nur unexakte Wahrscheinlichkeitsaussagen liefern.

Eine solche Situation liegt in der Quantenmechanik vor. Wir haben hier einerseits die lokale Sichtweise, das Teilchenbild, die ein Teilchen am Ort der Messung erfasst, und andererseits das vom Kontext abhängige, d. h. von den globalen Verhältnissen abhängige Wellenbild.

Beide Bilder sind, wie man zeigen kann, nicht in einem Bilde vereinbar, und daher kann die Information aus dem Wellenbild, nur als Wahrscheinlichkeitsaussage (mittels der Born'schen Regel), in das Teilchenbild, zur Vorhersage eines konkreten Messwertes übernommen werden.

Die Quantenmechanik zeigt gegenüber der klassischen Mechanik prinzipiell neue Möglichkeiten auf, so bei der Entwicklung der Quantencomputer.

Ein Quantencomputer erzeugt zunächst mittels dem Teilchenbild Zustände, die dann von Quanten-Gates, die bezüglich dem Wellenbild wirken, transformiert werden. Am Ende wird, durch die Messung dieser Quantenzustände, wieder zum Teilchenbild übergegangen.

Quantencomputer verwenden somit zwei prinzipiell unvereinbare Sichtweisen, und das kann kein klassischer Computer nachmachen.

(Eine ausführlichere Darstellung dieser Argumente ist erhältlich unter der Adresse: http://141.51.54.2/MRT/Lehre/Kurse/MSys/visualization.pdf)

Schlussbemerkung

Mit dem betrachteten Beispiel soll die Bedeutung des Verstehenshorizonts bei der Einführung mathematischer Strukturen diskutiert werden. Wir knüpfen an, an eine den Schülern wohlbekannte Idee, derjenigen des Spiels. Auf einem Grundraum, dem Spielfeld, werden von den Spielern Bilder erzeugt, die einer gemeinsamen, einheitlichen Interpretation fähig sind. Durch die aktive Teilnahme am Spiel, entsteht bei den Teilnehmenden eine Vorstellungswelt.

Aufgabe des Lehrenden ist es, mittels dem so gebildeten Verstehenshorizont, das unhinterfragte Handeln der Schüler in bewusstes Wissen über mathematische Sachverhalte zu überführen. Diese Aufgabe wurde an Hand des vorgestellten Beispiels diskutiert.

Danksagung. Mein Dank gilt Vincent J. Sommer und Friedrich T. Sommer für hilfreiche Diskussionen.

Literatur

[1] Maaß, Jürgen (2023), Anregungen zum Nachdenken über Mathematikdidaktik als Wissenschaft. *GMD-Mitteilungen* 114:40–46.

[2] Salle, Alexander & Clüver, Tomma (2021), Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *J. Math. Didakt.* 42:553–580.

[3] Blåsjö, Viktor (2022), Operationalism: An interpretation of the philosopy of ancient Greek geometry. *Foundations of Science* 27:587–708.

[4] Ribenboim Paulo (2010), *Die Welt der Primzahlen – Geheimnisse und Rekorde.* 2. Auflage, Springer Lehrbuch.

[5] Fraile, Alberto, Martinez Roberto, & Fernandez Daniel (2017), Jacob's ladder: Prime numbers in 2d. arXiv:1801.01540v1 [math.HO] 19 Dec 2017.

[6] Gentzen, Gerhard (1969). *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung – Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

[7] Husserl, Edmund (2009), *Ideen zu einer reinen Phänomenologischen Philosophie.* Meiner Verlag für Philosophie.

Hanns Sommer, Universität Kassel
E-Mail: hjsommer@uni-kassel.de