

Vermuten – Beweisen – Überzeugen mit Diagrammen der ebenen Euklidischen Geometrie

Hermann Kautschitsch

Beweisen ist eine wesentliche Tätigkeit in der Mathematik. Dazu benötigt man eine brauchbare Vermutung und speziell in der Schulmathematik Schlussfolgerungen, die auch „überzeugen“. Für diese drei Tätigkeiten gibt es Bezüge zum diagrammatischen Denken nach Peirce (Dörfler & Kadunz 2006).

Dabei wird Mathematik als eine Schreib- und Zeichentätigkeit mit Diagrammen angesehen. Diese sind ikonische Zeichen, die zur Darstellung von Relationen dienen. Mathematische Diagramme zeichnen sich gegenüber „gewöhnlichen“ Diagrammen dadurch aus, dass sie nach Regeln hergestellt und umgeformt werden. Demnach sind neben den traditionellen figürlichen Darstellungen auch alle Formeln, Tabellen, usw. ebenfalls Diagramme, der Regelgebrauch bestimmt das durch Diagramme Bezeichnete. Der durchgehende Regelgebrauch bewirkt, dass mathematische Diagramme untereinander zusammenhängen, sie bilden ein *Diagrammsystem* (Brunner 2015). Beispiele dafür sind die elementare Algebra, die Körper der reellen oder komplexen Zahlen, die Polynomringe oder die Vektorräume. Durch das Aufschreiben oder Aufzeichnen auf Papier oder auf dem Bildschirm (Inskriptionen) besitzen Diagramme eine materielle und damit wahrnehmbare Form. Das regelgeleitete Manipulieren und Beobachten der Ergebnisse wird so zu einem Handwerk mit materiellen und nicht abstrakten Objekten (Dörfler 2006). Dieses Handwerk wird im Idealfall selbsttätig ausgeführt oder es werden beim Lehren von Mathematik zumindest Lernaktivitäten angeregt, die diese Selbsttätigkeit unterstützen.

Es ist für das Erreichen von *Überzeugung* hilfreich. *Vermutungen* sind Invarianten, die bei solchen handwerklichen Tätigkeiten, eventuell computerunterstützt mittels DGS bzw. CAS, beobachtet werden. Beim *Beweisen* einer Regel wird ein „geschicktes“ Ausgangsdiagramm so lange umgeformt, bis ein Diagramm erreicht wird, an dem die entscheidende Regel „abgelesen“ werden kann. Die neue Regel wird dem Diagrammsystem hinzugefügt.

Das Erfinden von Ausgangsdiagrammen und die Entdeckung von brauchbaren Umformungen erfordern Kreativität und Schreib- bzw. Lesekompetenzen.

Anhand des Satzes von Thales wird nun dargelegt, wie die Veränderung von Diagrammsystemen

die Beweistechniken und den damit einhergehenden Kompetenz- und Kreativitätsaufwand verändert, bis hin zu fast „automatischen“ Beweisen. Dadurch gelingt eine Algorithmisierung der Geometrie, die z. B. eine Anwendung in der Robotik gestattet.

Diesen Vorgang kann man historisch nachverfolgen (Dorninger 2024), er könnte aber auch Eingang in die Klassenzimmer und Hörsäle finden, wenn man den Unterricht fallweise diagrammatisch organisiert.

Mit diesem Artikel soll gezeigt werden, wie der vorhin beschriebene Umgang mit Diagrammen die drei Tätigkeiten Vermuten, Beweisen und Überzeugen unterstützt. Darüber hinaus werden die drei Geometrien, nämlich die synthetische, analytische und algebraische Geometrie semiotisch beschrieben und ihre entsprechenden Beweisarten anhand des Satzes von Thales demonstriert.

Den Satz von Thales benützen wir in folgender Form:

Sei C ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis über der Strecke AB . Dann hat das Dreieck ABC in C einen rechten Winkel.

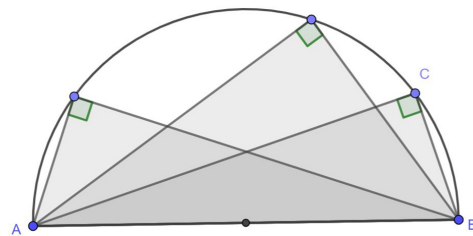


Abbildung 1. Grafische Realisierung des Satzes von Thales mithilfe der Software Geogebra

Synthetische euklidische Geometrie

Ausgehend von den Euklidischen Axiomen werden mittels zugelassener logischer Regeln, wie z. B. dem *modus ponens*, durch Zusammenfügung (Synthese) bereits hergeleiteter Gesetze neue Gesetze (Regeln) gefunden.

Das Diagrammsystem für die synthetische Geometrie ist die Menge der Euklidischen Axiome und der daraus hergeleiteten Sätze.

1. Beispiel: Synthetische Behandlung des Satzes von Thales

Mehrere Auswahlen von C in Abbildung 1 bzw. ein computerunterstütztes Wandern von C auf dem Halbkreis führen experimentell und anschaulich zur Vermutung des Satzes. Für eine Begründung werden z. B. folgende, zuvor aus den euklidischen Axiomen hergeleitete Winkelsätze in Erinnerung gerufen: Wechselwinkel sind gleich groß, im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß und die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt 180° (das Winkelmaß eines gestreckten Winkels).

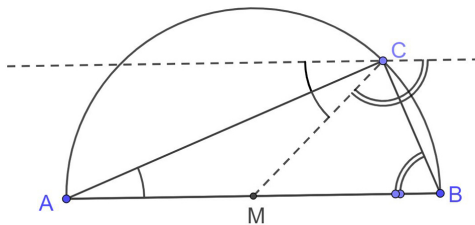


Abbildung 2. Ein synthetischer Beweis des Satzes von Thales

Die Begründungen erfordern die „Idee“ ($\hat{=}$ Erweiterungsdiagramm) der Parallelen zur Strecke AB und der Verbindungsstrecke CM (siehe Abbildung 2). Es taucht natürlich die Frage auf, wie man zu solchen Ideen kommen kann. Jedenfalls schließt man mit Abbildung 2: *Der Satz von Thales gilt, weil das Doppelte des Winkels bei A und B einen gestreckten Winkel ergibt.*

Beobachtungen: Das Manipulieren mit den Diagrammen erfordert im Allgemeinen eine hohe Kreativitäts-, Erinnerungs- und Vorstellungsleistung. Das Anfertigen von Bildern ist nicht unbedingt notwendig (so gibt es in den Elementen von Euklid keine Bilder), sie erweisen sich aber als besonders erkenntnisleitend und überzeugungsgewinnend.

Analytische euklidische Geometrie

Eine wesentliche Vereinfachung erfuhr das „Geometrie-Betreiben“ durch Einführung eines Koordinatensystems und die Umwandlung von geometrischen Eigenschaften in *Koordinatengleichungen*. Im Fall der ebenen Geometrie sind es Gleichungen in zwei Variablen. Sie sind die Diagramme der analytischen Geometrie und das Manipulieren bzw. Beweisen erfolgt durch Rechnen nach den Methoden der Linearen Algebra.

Das Diagrammsystem für die ebene analytische Geometrie ist der reelle 2-dimensionale Skalarproduktraum.

2. Beispiel: Analytische Behandlung des Satzes von Thales

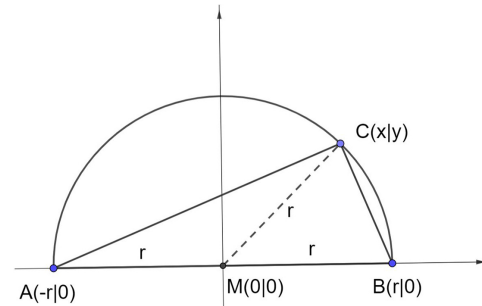


Abbildung 3. Ein analytischer Beweis des Satzes von Thales

Wie in der synthetischen Geometrie benötigt man eine brauchbare Idee. Die beliebige Lage von C erreicht man durch die beliebige Wahl der kartesischen Koordinaten x, y von C . Das rechtwinklige Koordinatensystem kann auf den pythagoreischen Lehrsatz führen. Wir verwenden für die Begründung des Satzes von Thales daher den Satz von Pythagoras und seine Umkehrung. In der Literatur gibt es aber auch analytische Begründungen ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras. Da dieser Aussagen über Streckenlängen tätigt, richten wir unser Augenmerk auf die Streckenlängen des Dreiecks ABC .

Die Streckenlänge von AB beträgt $2r$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Koordinaten x, y des Punktes C nach Abbildung 3: $x^2 + y^2 = r^2$.

Mit den Formeln eines Skalarproduktraumes erhält man für die Streckenlängen

$$\overline{AC}^2 = (r + x)^2 + y^2$$

und

$$\overline{BC}^2 = (r - x)^2 + y^2.$$

Damit ist nach Rechnung

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= 2r^2 + 2(x^2 + y^2) = 2r^2 + 2r^2 \\ &= 4r^2 = \overline{AB}^2. \end{aligned}$$

Mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras schließt man aus dem Diagramm der Abbildung 3, dass das Dreieck ABC in C rechtwinklig ist.

Der Satz von Thales gilt, weil $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

Die Verwendung von Vektoren erleichtert die Schreibe- und Ideenfindung. Wegen des zugrunde liegenden Skalarproduktraumes genügt es, das Produkt der Vektoren \vec{AC} und \vec{BC} zu berechnen. Dies stellt die Erinnerungslleistung dar.

Setzt man $\vec{a} := \overrightarrow{AM} := \overrightarrow{MB}$ und $\vec{b} := \overrightarrow{MC}$, dann gilt nach den Regeln im Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\ &= -r^2 + r^2 = 0,\end{aligned}$$

damit steht \overrightarrow{AC} senkrecht auf \overrightarrow{BC} .

Der Satz von Thales gilt, weil $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Beobachtung: Für das Finden einer Beweisidee ist nach wie vor eine gewisse Kreativitäts- und Erinnerungsleistung notwendig, der „Kalkül“ des zugrunde liegenden Diagrammsystems lässt die Umformungen beinahe „automatisch“ ablaufen. Nicht jede Umformung benötigt wie im synthetischen Fall eine neue Idee. Natürlich gibt es kompliziertere geometrische Eigenschaften und Umformungen in der ebenen Geometrie als beim Satz von Thales, diese können jedoch auch computerunterstützt erfolgen. Um dann vom Beweis überzeugt zu sein, muss man jedoch auf den Computer vertrauen, weil man die Umformungen nicht selbst durchgeführt hat! („Chipbeweis“).

Der Kreativitäts- bzw. Erinnerungsaufwand kann durch die Methoden im Ring der Polynome in mehreren Variablen („multivariate Polynome“) erheblich verringert werden. Für den Schulunterricht bedeutet dies, dass Misserfolge bei Lernenden infolge Ideenmangels oder zu geringem Wissen vermieden werden. Das Interesse für Beweise und Anwendungen der Geometrie kann infolge der Algorithmisierung der Geometrie gesteigert werden. Darüber hinaus erfährt man die Macht eines Kalküls.

Algebraische euklidische Geometrie

Die neue Idee, Geometrie zu betreiben, besteht in der Umwandlung geometrischer Eigenschaften in Polynomgleichungen in mehreren (nicht nur zwei) Variablen und deren Nullstellenbestimmung. Diese Polynomgleichungen in n Variablen sind die Diagramme der algebraischen Geometrie, ein Beweis ist erbracht, wenn die Nullstellenmenge des polynomialen Gleichungssystems alle n -Tupel enthält.

Das Diagrammsystem der algebraischen Geometrie ist die Algebra $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ der Polynome in n Variablen über einem Körper \mathbb{K} .

3. Beispiel: Algebraische Behandlung des Satzes von Thales mittels Polynomen

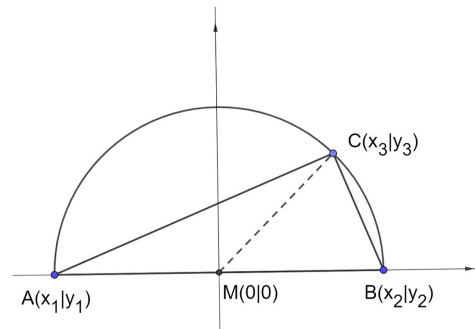


Abbildung 4. Ein algebraischer Beweis des Thales mittels Polynomen

Nach Wahl eines geschickten Koordinatensystems werden die Voraussetzungen und die Behauptung in Polynomgleichungen umgewandelt.

M ist Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(x_1 | y_1)$, $B(x_2 | y_2)$ und $y_1 = y_2 = 0$ bedeutet in Gleichungen: $x_1 + x_2 = 0$ und $y_1 + y_2 = 0$. In Abbildung 4 treten die Variablen $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ auf, daher fassen wir die letzten beiden Gleichungen als multivariate Polynomgleichungen in diesen sechs Variablen auf, d. h.

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1 + x_2 = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := y_1 + y_2 = 0.$$

Da C auf dem Halbkreis liegt, sind die Strecken MA und MC gleich lang: $\overline{MA} = \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA}^2 = \overline{MC}^2$ (man quadriert, um Polynome zu erhalten).

Nach dem Satz von Pythagoras ist $\overline{MC}^2 = x_3^2 + y_3^2$ und $\overline{MA}^2 = x_1^2 + y_1^2$, also

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2 &\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 \\ &=: r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.\end{aligned}$$

Umwandlung der Behauptung in eine Polynomgleichung: Der rechte Winkel in C kann analytisch beschrieben werden durch:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2 + y_3^2 - y_2y_3 - y_1y_3 + y_1y_2 \\ =: f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.\end{aligned}$$

Formulierung des Satzes von Thales in Polynomform: $\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$ gilt: Aus

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

folgt

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Der Teil-Term $x_3^2 + y_3^2$ von f kommt in $-r = -x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2$ vor. Den überflüssigen Term $-x_1^2$ eliminiert man durch Addition von $(x_1 - x_3)(x_1 + x_3)$, die hinzukommenden Terme passen für f . Analog macht man es mit dem Term $-y_1^2$.

Durch solche Termbeobachtungen erhält man:

$$f = (-1)r + (x_1 - x_3)p + (y_1 - y_3)q$$

Damit schließen wir: Ist $p = q = r = 0$, dann gilt auch $f = 0 \forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$.

Der Satz von Thales gilt, weil das die Behauptung darstellende Polynom eine Linearkombination der die Voraussetzungen darstellenden Polynome ist.

Für alle (!) Sätze bewährt sich also folgende Beweisstrategie:

Stelle die Polynomgleichung der Behauptung als Linearkombination der Polynomgleichungen der Voraussetzungen dar.

Es sind daher keine Kreativitäts- bzw. Erinnerungsleistungen für die Ideenfindung notwendig. Nur für die Umformung von geometrischen Sachverhalten in Polynomgleichungen benötigt man Kenntnisse aus analytischer Geometrie. Anspruchsvoll können hingegen die Termumformungen sein. Mit MATHEMATICA kann mittels des Befehls *PolynomialReduce* die Termumformung „automatisiert“ werden. Dazu benötigt man jedoch eine spezielle Basis, nämlich die *Gröbnerbasis* eines *Polynomideals*.

Es wird eine stark vereinfachte Darstellung vorgestellt, genaueres kann man aus Aichinger (2020) und Cox (2005) entnehmen. Die oben angesprochene Menge der Linearkombinationen bildet im Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ bekanntlich ein Ideal. Die Menge $I := \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ heißt das von den Polynomen f_1, \dots, f_m erzeugte Ideal. Für ein Polynom f gilt:

$$f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle \Leftrightarrow \exists h_i(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \\ \text{mit } f = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m.$$

Die Bestimmung dieser $h_i(x_1, \dots, x_n)$ ist i. A. schwierig (Ideal-Membership-Problem). Man orientiert sich am eindimensionalen Fall $\mathbb{K}[x]$. Bekanntlich ist $\mathbb{K}[x]$ ein Hauptidealring, also $I := \langle g \rangle$ für ein $g \in \mathbb{K}[x]$ und es gilt: $f \in I$ genau dann, wenn man bei Division von f durch g den Rest 0 erhält.

Im mehrdimensionalen Fall wäre eine analoge „multivariate Division“ wünschenswert. Dafür benötigt man den Begriff der „Monomordnung“ eines multivariaten Polynoms, die dem Grad eines eindimensionalen Polynomes entspricht. Darauf wird in diesem Artikel nicht eingegangen (Pargfrieder, 2024). Wegen obiger Problemstellung ist man an einer Darstellung der Form $f = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m$ interessiert, man „dividiert“ also durch ein m -Tupel von Polynomen und nicht durch ein einziges Polynom. Die „multivariate Division“ von f durch ein m -Tupel (f_1, \dots, f_m) bedeutet daher, eine Darstellung von f der Form

$$f = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m + r$$

mit einem *Restpolynom* r von „minimaler Monomordnung“ zu finden. Leider sind diese Reste nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen von der Wahl einer Ordnung ab. Eine *Gröbnerbasis* $G := \{g_1, \dots, g_m\}$ ist nun gerade so definiert, dass sie die gewünschten Eigenschaften besitzt, d. h., die Reste r sind eindeutig bestimmt und $f \in I$ genau dann, wenn der Rest 0 ist.

Der *Buchberger-Algorithmus* erzeugt aus einer gegebenen Basis eines Ideals dieses Wundermittel Gröbnerbasis. In MATHEMATICA ist er im Befehl *GroebnerBasis* verwirklicht. Der Befehl *PolynomialReduce* wiederum bestimmt in der zweiten Komponente der Ausgabeliste den Rest von f bei multivariater Division durch eine Liste von Polynomen, eben der Liste der Gröbnerbasis.

```

p = x1 + x2;
q = y1 + y2;
r = x1^2 + y1^2 - x3^2 - y3^2;
f = (x3 - x1) (x3 - x2) + (y3 - y1) (y3 - y2);

In[ ]:=
polys = {p, q, r};

In[ ]:= gb = GroebnerBasis[polys, {x1, x2, x3, y1, y2, y3}];
      |Groebnerbasis

In[ ]:= PolynomialReduce[f, gb, {x1, x2, x3, y1, y2, y3}] [2]
      |reduziere Polynom

0

```

Abbildung 5. Computerunterstützter algebraischer Beweis des Satzes von Thales mittels Linearkombination von Polynomen

Man sieht, dass die zweite Komponente in *PolynomialReduce* 0 ist. Das bedeutet, dass das „Behauptungspolynom“ f eine Linearkombination der „Voraussetzungspolynome“ p, q, r ist. Damit folgt, dass mit $p = q = r = 0$ auch $f = 0$ ist, somit gilt der Satz des Thales.

Der Satz von Thales gilt, weil die multivariate Division des „Behauptungspolynoms“ durch die Gröbnerbasis der „Voraussetzungspolynome“ den Rest 0 ergibt (im Diagramm der Abbildung 5 tritt die Null als letzte Zeile auf).

4. Beispiel: Algebraische Behandlung mittels eines polynomialen Gleichungssystems

Für algebraisch abgeschlossene Körper, wie z. B. den Körper der komplexen Zahlen, der die reellen Zahlen \mathbb{R} enthält, gibt es eine weitere Vereinfachung, die keine Linearkombinationsdarstellung des „Behauptungspolynoms“ benötigt. Dabei wird dem geometrischen Sachverhalt ein System von multivariaten Polynomgleichungen zugeordnet und dessen Nullstellenmenge berechnet.

Für den Problemkreis des Satzes von Thales hatten wir oben hergeleitet (an Stelle von f schreiben wir ab nun h):

$\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ gilt: Aus

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

folgt

$$h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Mittels einer Wahrheitstafel kann man zeigen:

$$(A \implies B) \iff \neg(A \wedge (\neg B)).$$

Obige Aussage ist also logisch äquivalent zu:

$$\nexists x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R},$$

sodass gilt:

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \neq 0.$$

Nun wird noch $h \neq 0$ in eine Gleichung umgewandelt.

Sei z neben $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ eine neue Variable. Weil \mathbb{R} ein Körper ist, gilt: $h \neq 0 \iff h \cdot z - 1 = 0$. Denn ist $h \neq 0$, dann gibt es ein h' mit $h \cdot h' = 1$ oder $h \cdot h' - 1 = 0$, d. h., die Gleichung $h \cdot z - 1 = 0$ hat eine Lösung. Hat umgekehrt $h \cdot z - 1 = 0$ eine Lösung $z = h'$, dann ist $h \cdot h' = 1$ und h ist wegen der Nullteilerfreiheit von \mathbb{R} ungleich 0.

Damit erhalten wir folgendes *polynomiale Gleichungssystem* für den Satz von Thales:

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1 + x_2 = 0$$

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := y_1 + y_2 = 0$$

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 = 0$$

$$h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := \\ = [(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)] \cdot z - 1 = 0.$$

Der Satz des Thales gilt nach obiger Äquivalenz also genau dann, wenn das polynomiale Gleichungssystem $p = q = r = h = 0$ keine Lösung hat.

Allgemein können wir formulieren: Seien m, n natürliche Zahlen und p_1, \dots, p_n und q Polynome in den m Variablen t_1, \dots, t_m . Gilt für alle m -Tupel (x_1, \dots, x_m) die Implikation, dass aus $p_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = p_n(x_1, \dots, x_m) = 0$ auch $q(x_1, \dots, x_m) = 0$ folgt, dann hat das Gleichungssystem mit der zusätzlichen Variablen z $p_1(t_1, \dots, t_m) = 0, \dots, p_n(t_1, \dots, t_m) = 0$ und $q(t_1, \dots, t_m) \cdot z - 1 = 0$ keine Lösung und umgekehrt.

Damit kommt der Hilbertsche Nullstellensatz ins Spiel, der eine weitreichende Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Algebra darstellt:

Sei \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein echtes Ideal in $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$, d. h., $I \neq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$. Dann gibt es ein m -Tupel $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ mit $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ für alle $f \in I$. Es gibt also ein gemeinsames Lösungs- m -Tupel aller $f \in I$. Gibt es keine gemeinsame Lösung, dann ist I kein echtes Ideal, sondern $I = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$. Insbesondere ist $1 \in I$. Bemerkung: Die Voraussetzung $I \neq \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$ entspricht im 1-dimensionalen Fall der Voraussetzung $\text{Grad } f(x) \neq 0$.

Für ein Gleichungssystem bedeutet dies: Sei $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$ ein polynomiales Gleichungssystem von n Gleichungen in m Variablen und I das von den f_1, \dots, f_n aufgespannte Ideal, also $I := \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Hat das Gleichungssystem keine Lösung in \mathbb{K}^m , dann ist I kein echtes Ideal, sondern $I = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$ und damit gilt $1 \in I$ oder $1 = h_1 f_1 + \dots + h_n f_n$. Ob das Gleichungssystem $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$ keine Lösung hat, kann nun wieder mittels der Gröbnerbasis von $I := \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ entschieden werden (Pargfrieder 2024): Das Gleichungssystem $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$ hat genau dann keine gemeinsame Lösung, wenn die Gröbnerbasis von $I := \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ das konstante Polynom $c \neq 0$ und damit wegen der Abgeschlossenheit des Ideals I bezüglich aller Multiplikationen auch $1 \in \mathbb{K}$ enthält. Der Satz von Thales gilt also genau dann, wenn die Gröbnerbasis von $I := \langle p, q, r, h \rangle$ die $1 \in \mathbb{K}$ enthält.


```

In[ ]:= p = x1 + x2;
q = y1 + y2;
r = x1^2 + y1^2 - x3^2 - y3^2;
h = ((x3 - x1) (x3 - x2) + (y3 - y1) (y3 - y2)) z - 1;

In[ ]:= polys = {p, q, r, h};
gb = GroebnerBasis[polys, {x1, x2, x3, y1, y2, y3, z}]
      |Gröbnerbasis

Out[ ]:= {1}

In[ ]:= Solve[{p == 0, q == 0, r == 0, h == 0}, {x1, x2, x3, y1, y2, y3, z}]
      |löse

Out[ ]:= {}

```

Abbildung 6. Computerunterstützter algebraischer Beweis des Satzes von Thales mit polynomialem Gleichungssystem

Bemerkung 1: Für manche, eher einfache polynomiale Gleichungssysteme kann die Nullstellenmenge auch mit dem MATHEMATICA-Befehl `Solve` berechnet werden. Dies ist z. B. beim Satz von Thales der Fall, als Lösungsmenge ergibt sich die leere Menge {}, siehe letzte Zeile in obiger Abbildung.

Bemerkung 2: Oben hatten wir bemerkt, dass der Hilbert'sche Basissatz im Allgemeinen nur für algebraisch abgeschlossene Körper gilt. Das bedeutet, dass mit der oben vorgestellten Methode eventuell nicht alle Sätze bewiesen werden können. Aus Abbildung 6 und Bemerkung 1 schließen wir:

Der Satz von Thales gilt, weil die 1 in der Gröbnerbasis des Ideals, das von den dem Satz von Thales zugeordneten Gleichungen aufgespannt wird, enthalten ist (im Diagramm der Abbildung 6 tritt {1} als letzte Zeile auf).

oder

Der Satz von Thales gilt, weil die Lösungsmenge des dem Satz zugeordneten polynomialen Gleichungssystem leer ist.

Beobachtung: Die algebraischen Beweise sind alles andere als anschaulich, aber dafür überzeugend, wenn man die Theorie versteht und den Computerrechnungen vertraut. Der Verlust der Anschaulichkeit in Bildern hat dafür den ungeheuren Vorteil, dass nicht für jeden geometrischen Sachverhalt und für jede Diagrammumformung neue Ideen kreiert werden müssen. Mathematiker haben eine für alle (?) geometrischen Sachverhalte effiziente Beweisstrategie entwickelt. Erinnerungen an zahlreiche Lehrsätze der analytischen Geometrie sind nur notwendig, um die geometrischen Voraussetzungen in multivariate Polynomgleichungen umzuformen. Aber auch dafür gibt es standardisierte Verfahren für Kollinearität, Mittelpunkt, Abstand, Skalarprodukt, Parallelität usw., die wie in einem Lexikon nachgeschlagen werden können.

Das Vermuten kann durch Veränderungen der Polynomgleichungen für die Voraussetzungen und die Behauptung erfolgen, oder man vertauscht Voraussetzungen mit der Behauptung Man verändert solange,

bis die 1 oder die 0 in den Abbildungen 5 bzw. 6 auftreten.

Beispiel: Man könnte bei der Behandlung des Satzes von Thales die Voraussetzung r mit der Behauptung f vertauschen. Man nimmt also an, dass bei C ein rechter Winkel sein soll und fragt sich, auf welcher Bahn sich der Punkt C bewegt. Mittels einer DGS vermutet man, dass C sich auf einem Halbkreis bewegt. Die 0 in Abbildung 7 zeigt, dass die Vermutung stimmt. Damit ist die Umkehrung des Satzes von Thales bewiesen.

```

In[ ]:= p = x1 + x2;
q = y1 + y2;
r = x1^2 + y1^2 - x3^2 - y3^2;
f = (x3 - x1) (x3 - x2) + (y3 - y1) (y3 - y2);

In[ ]:= polys = {p, q, f};

In[ ]:= gb = GroebnerBasis[polys, {x1, x2, x3, y1, y2, y3}];
      |Gröbnerbasis

In[ ]:= PolynomialReduce[r, gb, {x1, x2, x3, y1, y2, y3}][[2]]
      |reduziere Polynom

Out[ ]:= 0

```

Abbildung 7. Thales, Umkehrung

Zusammenfassung

Die Behandlung des Satzes von Thales in den drei verschiedenen Geometrien zeigt auf:

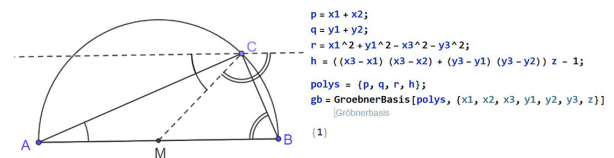


Abbildung 8. Thales, Zusammenschau

1. Verschiedene Diagrammsysteme erfordern verschiedene Kreativitäts- und Erinnerungsleistungen. Je umfangreicher die dahinterstehende mathematische Theorie ist, desto geringer werden diese, jedoch um den Preis einer immer größer werdenden Termumformungs- und Lesekompetenz. Diese kann auf leistungsstarke CAS-Pakete abgewälzt werden. Damit kann die Beweis- und Vermutungsfindung beinahe „automatisch“ ablaufen. Tritt in den algebraischen Diagrammen in der letzten Zeile die 0 oder die 1 auf, ist die Behauptung bewiesen. Überzeugung erreicht man, wenn man die für die Diagrammumformungen notwendige Theorie versteht und Vertrauen in die notwendigen Computerberechnungen hat.
2. Durch die beinahe „automatisch“ möglichen Beweise in der algebraischen Geometrie erreicht man eine *Algorithmisierung* der Geometrie. Wie so oft in

der Mathematik haben einige Mathematiker Theorien und Verfahren zur Erreichung von bestimmten Zielen entwickelt, die dann von Benutzern meist unreflektiert verwendet werden. Denken wir z. B. an das schriftliche Rechnen in Stellenwertsystemen oder an das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

3. Natürlich wurde algebraische Geometrie nicht für den Einsatz in der ebenen euklidischen Geometrie entwickelt. Diese wurde historisch durch die synthetische und analytische Geometrie bereits erschöpfend behandelt. Dasselbe gilt auch für den Unterricht an der S1 und S2. Trotzdem soll erwähnt werden, dass noch 1986 während einer Computer-Mathematik-Tagung in Exeter ein weiterer, neben den bisher $\approx 65\,000$ (Stand August 2024, siehe de.wikipedia.org/wiki/Ausgezeichnete_Punkte_im_Dreieck) bekannten ausgezeichneten Punkten im Dreieck, entdeckt wurde und daher *Exeterpunkt* genannt wird. Auch der seit 1899 bekannte *Satz von Morley* wurde erst in neuerer Zeit analytisch und algebraisch bewiesen (Messerschmidt 2004).
4. Methoden der algebraischen Geometrie werden gerade wegen der dadurch möglichen Algorithmisierung der Geometrie auch außerhalb der Geometrie verwendet, z. B. bei der Versuchsplanung, beim Testen von Hypothesen und in der Robotik.

Das sind Gründe genug, um algebraische Verfahren auch im Unterricht zu behandeln. Die dazu notwendige Theorie wird skizzenhaft wie in diesem Artikel vorgestellt, CAS-Programme übernehmen die Rechenarbeit. Das ist für den Mathematikunterricht nichts Ungewöhnliches, auch beim Einsatz des Taschenrechners wird so vorgegangen. Da die ebene euklidische

Geometrie relativ gut bekannt ist, bietet sie ein ausgezeichnetes Übungsfeld, um die Wirksamkeit obiger Verfahren kennen zu lernen.

Literatur

- Aichinger, E. (2020). *Vorlesungsskript: Notizen zu den Vorlesungen: Kommutative Algebra und algebraische Geometrie und Gröbnerbasen*. Johannes Kepler Universität, Linz. www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/GroebnerBases/w20/
- Brunner, M. (2015). Diagrammatische Realität und Regelgebrauch. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 9–49). Berlin & Heidelberg, Deutschland: Springer.
- Cox, D. A., Little, J., & O’Shea, D. (2005). *Using algebraic geometry*. New York, NY: Springer.
- Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, 27, 200–219.
- Dörfler, W., & Kadunz, G. (2006). Rezension von „Erkenntnisentwicklung“. *Journal für Mathematikdidaktik*, 27, 300–318.
- Dorning, D. (2024). *Beweisen in der Elementargeometrie – klassisch, analytisch, automatisch*. Unveröffentlichtes Manuskript.
- Messerschmidt, V. (2004). *Automatisches Beweisen in der ebenen Geometrie mittels Gröbnerbasis*. Universität Kassel, Kassel. www.mathematik.uni-kassel/~koepf/Diplome/Messerschmidt.pdf
- Pargfrieder, J. (2024). *Automatisches Beweisen in der Geometrie mithilfe von Gröbnerbasen*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Johannes Kepler Universität Linz, Linz. epub.jku.at/obvulihs/download/pdf/9958149

Hermann Kautschitsch, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
hermann.kautschitsch@aau.at