

Warum die Quantenmechanik für Lehrende von Bedeutung ist, obwohl sie in der Schule nicht vorkommt

Hanns Sommer

Anforderungen an das Denken

Als Lehrende ist es unsere Aufgabe, das Denken zu vermitteln. Aber verstehen wir diese Aufgabe alle in gleicher Weise? Ich möchte in diesem Beitrag Heideggers Sichtweise diskutieren. Er schreibt in seinem Aufsatz „Was heißt Denken?“ (Heidegger, 1955): „Das Bedenklichste in unserer bedenklichen Zeit ist, dass wir noch nicht denken.“

Heidegger spricht also seiner Zeit das Denken überhaupt ab. Aus Heideggers Sicht müssten wir mit unserem Denken, das Denken selbst erfassen können, um dessen Angemessenheit an unsere Zeit zu überdenken. Unser Denken muss uns 'bedenklich' werden, damit es uns nicht nur Einschränkungen unserer Lebensmöglichkeiten aufzeigt, sondern auch Wege, die aus diesen herausführen. Mittels dem Denken geben wir den Phänomenen in unserer Welt eine Bedeutung, um uns eine Meinung über diese zu bilden. Heideggers Lehrer Husserl nennt diesen Prozess ‚das Vermeinen‘, mittels dem wir Konzepte bilden, die uns ein Denken über die Phänomene möglich machen.

Während diese Konzepte in den Geisteswissenschaften auch individuell bleiben können, müssen diese im Mathematikunterricht, für die Naturwissenschaften, eindeutig und vollständig kommunizierbar (d. h. objektiv) gemacht werden. Wir müssen diese mittels einem Formalismus (einem System von Axiomen) so verfügbar machen, dass wir mit ihnen ‚rechnen können‘. In einfachster Weise können wir uns einen Formalismus als ‚Baukasten‘ vorstellen, mit dem aus einfachen Grundelementen (Backsteinen, Strichen, Grundelementen der Geometrie) komplexe Gebilde wie Häuser, Primzahlen oder Sätze der Geometrie verständlich gemacht werden können.

Das Verständlichmachen mittels der Mathematik gründet daher in einer ‚Bottom-up‘ Methode, bei der Komplexes aus Grundelementen aufgebaut wird.

Im vorliegenden Beitrag soll diese Vorstellung von der Mathematik als ‚bedenklich‘ nachgewiesen werden. Die Auffassung von der Mathematik als ‚Rechnen‘ oder ‚Herleiten von Sätzen‘ erfasst nach Heidegger nur ein ‚berechnendes Denken‘ und gelangt noch nicht zum ‚Besinnen‘, d. h. zu einem Denken, das uns über unser bisheriges Denken hinausführt. Wir wollen die Mathematik aber als eine Wissenschaft verstehen, die auch

Wege zu einer neuen Bedeutung ermöglicht. Das Vermeynen oder die Bedeutungszuweisung sind essentielle Inhalte des Mathematikunterrichts.

Bedenklichkeit einer mathematischen Beschreibung

1905 erschien Einsteins berühmte Erklärung für den Compton-Effekt, die den Nachweis für das Bestehen eines Lichtstrahls aus Lichtteilchen (Photonen) erbrachte. Aber nun entstand die Aufgabe, dieses Wissen mit Youngs *Doppelspaltexperiment* in Einklang zu bringen:

Photonen oder andere Elementarteilchen werden einzeln auf zwei Spalte abgefeuert und einige von ihnen durchqueren diese und bilden auf einem, in einiger Entfernung angebrachten Schirm ein streifen-förmiges Muster, wobei auch dunkle Stellen existieren, die von keinem Photon getroffen werden. Schließt man jedoch einen der Spalte, so treffen auch Photonen auf diese dunklen Zonen.

Da die Lichtquelle sehr schwach ist, können wir annehmen, dass sich die Photonen nicht gegenseitig stören, so dass als Grundelemente, zur Erklärung des Experiments, nur die einzelnen Photonen auf ihren Bahnen in Betracht kommen. Damit erscheint aber das Beobachtete als absurd. Denn durch Schließen eines Spalts kann es doch nur weniger Photonenbahnen geben und daher können keine Photonen die dunklen Zonen erreichen.

Die Bottom-up-Methode zur Erklärung von Youngs Experiment scheitert, da unsere Grundelemente offensichtlich ungeeignet sind. Wenn wir aber über keine geeigneten Grundelemente verfügen, so muss unser ‚Besinnen‘ eine andere Bedeutungszuweisung für das Beobachtete finden. Diese Bedeutungszuweisung kann nicht mehr Teile (oder Grundelemente) für sich erfassen, sondern muss die Bedeutung jedes Teils im Bezug zum Gesamten spezifizieren. Wir benötigen eine Logik für eine kontextabhängige Betrachtungsweise.

Logik einer kontextabhängigen Betrachtungsweise

Unser Denken ist beschränkt auf das Vorstellungsvermögen, das wir in unserer üblichen Lebenswelt gebil-

det haben. Somit muss auch die Logik einer kontextabhängigen Betrachtungsweise (LKB) mit diesem Denken gebildet werden. Wir müssen in unserer üblichen Vorstellungswelt nach Bildern suchen, deren Bedeutung erst im Kontext eines Ganzen fixiert ist. Die formale Beschreibung solcher Bilder führt uns dann zur LKB, d. h. zu einer Logik, in der das Youngsche Doppelspaltexperiment nicht mehr ‚bedenklich‘ erscheint.



Joseph S. Jastrow's Hasen-Ente

Hinführung zur LKB

Betrachten Sie bitte Bild 1. Was sehen Sie?

Wenn Sie Bild 2 als Kontext berücksichtigen, so werden Sie einen Hasen erkennen, wohingegen im Kontext von Bild 3 eine Ente erkennbar wird.

Ihr ‚Vermeinen‘ gab ihnen somit zwei bedeutungsvolle Objekte (Hase und Ente), die beide Bild 1 beschreiben könnten.

Bezeichnet $|Z\rangle$ Ihren Wissens-Zustand, $|Hase\rangle$ das Erkennen des Hasen und $|Ente\rangle$ das Erkennen

der Ente und sind g_H und g_E Glaubenswerte, welche Ihre Sicherheit beschreiben, diese Objekte zu sehen, dann stellt Formel (1) die Summe dieser Einzel-Informationen dar:

$$|Z\rangle = g_H|Hase\rangle + g_E|Ente\rangle \quad (1)$$

Zunächst würden wir natürlich hoffen, dass die Glaubenswerte g_H und g_E den Wahrscheinlichkeiten p_H für das Erkennen des Hasen und p_E für das Erkennen der Ente entsprechen.

Aber so einfach sind, die uns interessierenden Wahrscheinlichkeiten aus Gleichung (1), nicht erhältlich.

Stellen Sie sich vor, Sie würden mit hoher Sicherheit glauben, dass Bild (1) einen Hasen darstellt, aber nun erfahren, dass der Maler dieses Bildes ausschließlich Enten zeichnet, dann würden Sie an Ihrem Glauben zweifeln und g_H vermindern, d. h. die Information über den Maler müsste einen negativen g_H -Wert enthalten. Um ausreichend allgemein zu sein, wählen wir daher $g_H, g_E \in \mathcal{C}$.

Für die Glaubenswerte g und die Wahrscheinlichkeiten p haben wir nun die folgenden Bedingungen:

1. Je signifikanter (von 0 verschieden) g ist, desto größer ist p .
2. $p_H + p_E = 1$, mit $p_H, p_E \in [0, 1]$
3. Da nur die Relation zwischen den g -Werten von Belang ist, können wir die Normierung fordern:

$$|g_H|^2 + |g_E|^2 = 1$$

Alle diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir die Beziehung zwischen den Glaubenswerten und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit der *Bornschen Regel* beschreiben:

$$p = |g|^2 \text{ oder } p_H = |g_H|^2 \text{ und } p_E = |g_E|^2 \quad (2)$$

Formalismus der Quantenmechanik

Die Verallgemeinerung unseres Hase-Ente-Beispiels auf n vermeinte Begriffe $O_1, O_2, \dots, O_n$ (mit $n \in \mathcal{N}$ oder $n = \infty$) ergibt den *Formalismus der Quantenmechanik* (QM):

Unser Wissen über den Ausgang eines Experiments, in dem eines der Objekte O_i gemessen werden könnte, wird dargestellt durch den Zustand:

$$|Z\rangle = \alpha_1|O_1\rangle + \dots + \alpha_n|O_n\rangle \quad (3)$$

Da die Bedeutungszuweisung an die Objekte $O_1, O_2, \dots, O_n$ ein Vorwissen darstellt, das aus dem Experiment-Aufbau folgt, stellen die Koeffizienten α_i den Teil des Wissens dar, das uns den Experiment-Ausgang beschreibt. Diese Koeffizienten beschreiben

daher unser Prognose-Wissen, d. h. den Zustand $|Z\rangle$. Wir können somit vereinfacht schreiben:

$$|Z\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ mit } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1 \quad (4)$$

Die Summengleichung für die α_i beschreibt die Normierungsbedingung. Die Zustände $|Z\rangle$ sind daher beschrieben durch Vektoren aus komplexen Zahlen, mit eventuell unendlicher Dimension, welche die Normierungsbedingung erfüllen. Der Raum dieser Zustands-Vektoren wird *Hilbertraum* ($\mathcal{H}$) genannt. Da wir hier nicht auf Konvergenzfragen eingehen wollen, beschränken wir unsere Betrachtungen auf endlichdimensionale Hilberträume ($n \in \mathcal{N}$).

Bedeutung des Zustandsvektors

Beschreibe P_i einem Projektionsoperator (d. h. es gelte $P_i^2 = P_i$) auf einen eindimensionalen Unterraum von $\mathcal{H}$ und sei

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \vec{a}^T \cdot \vec{b}$$

das Skalarprodukt des Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann gilt nach der *Bornschen Regel*:

Die Wahrscheinlichkeit p_i , dass das Objekt O_i aus $P_i\mathcal{H}$ im Zustand $|Z\rangle$ angetroffen wird, ist

$$p_i = |\alpha_i|^2 = \langle |Z\rangle, P_i |Z\rangle \rangle. \quad (5)$$

Auch für ein beliebiges Objekt O mit Hilbertraumvektor $|O\rangle$ erhalten wir, für die Wahrscheinlichkeit p_O , dass dieses im Zustand $|Z\rangle$ gemessen wird, mit dem Projektionsoperator P_O auf den von $|O\rangle$ aufgespannten Unterraum von $\mathcal{H}$:

$$p_O = \langle |Z\rangle, P_O |Z\rangle \rangle$$

Für Objekte O, W , die zu nicht-vertauschbaren Projektoren gehören ($P_O P_W \neq P_W P_O$), gilt eine *Unschärfebeziehung*. Sie sind nicht beide in einem Zustand $|Z\rangle$ realisierbar.

Ein *Messprozess* kann auf das Auftreten mehrerer Objekte O_i ansprechen. Er wird daher durch einen Operator $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ dargestellt, mit orthogonalen Projektionsoperatoren P_i und $\lambda_i \in \mathcal{R}$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Messung beschreibt der Erwartungswert

$$e_A = \langle |Z\rangle, A |Z\rangle \rangle.$$

Die Operatoren der Form $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, mit $\lambda_i \in \mathcal{R}$ werden *selbstadjungierte Operatoren* genannt.

Zeitentwicklung des Zustandsvektors

Da der Zustandsvektor $|Z\rangle$ das ‚Gesamte‘ beschreibt, kann es keine Störungen geben, die von diesem nicht erfasst werden. Der Zustandsvektor $|Z\rangle$ vollzieht eine ungestörte Zeitentwicklung. Aus unserer Lebenserfahrung wissen wir, dass eine ungestörte Zeitentwicklung exponentiell erfolgt, vergleichbar dem Anwachsen der Frösche in einem Teich bei beliebig großem Nahrungsangebot und ohne Fress-Feinde. Die Zeitentwicklung des Zustandsvektors ist daher $|Z(t)\rangle = \exp(At)|Z(0)\rangle$ mit einem geeigneten Operator A . Da die Normierungsbedingung (4) für jeden Zeitpunkt t erfüllt sein muss, gilt $A = \frac{-i}{\hbar} H$ mit einem selbstadjungierten Operator H . (Der reelle Faktor $-\hbar$ ist historisch bedingt und für das Verstehen bedeutungslos.)

Wir erhalten

$$|Z(t)\rangle = \exp\left(\frac{-i}{\hbar} H t\right) |Z(0)\rangle$$

und damit als Zeitentwicklung die Lösung der *Schrödinger-Gleichung*

$$\frac{d}{dt} |Z(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} H |Z(t)\rangle. \quad (6)$$

Die Schrödingergleichung bedeutet für einen Messpunkt eine Zeitentwicklung der Messwerte mit der Funktion $\exp(\frac{-i}{\hbar} H t)|Z(0)\rangle$. Da Licht-Photonen, bei Nichtberücksichtigung des Spins, nur durch ihre Intensität, d. h. als skalare Größen beschrieben werden, muss hier auch der beschreibende Operator H maximal strukturarm sein, d. h. wir können als Beschreibungsraum einen eindimensionalen Hilbertraum und $H = \alpha$ mit $\alpha \in \mathcal{R}$ annehmen.

α beschreibt die Frequenz der Zeitentwicklung. Da wir wissen, dass die Energie von Lichtquellen proportional ihrer Frequenz α ist, können wir damit folgern, dass der Operator H dem Messoperator für die Energie entspricht.

Die Quantenmechanik führt uns zum Verstehen des Lichts als Welle und damit zum Verstehen des Doppelspaltexperiments mit der Wellenmechanik.

Was ist jetzt erreicht?

Mit dem Beispiel der QM wollten wir aufzeigen, dass es zum Verstehen unserer Welt notwendig ist, über unser Denken selbst nachzudenken. Die Anwendung dieses, von Heidegger geforderten Prozesses der Selbstreflexion, hat uns zur Logik der QM geführt. Aber haben wir so ein wirklich neues Denken erreicht?

Die Vektor- und Matrizen-Rechnungen, die wir nun in unserem Hilbertraum durchführen können, sind

doch nicht neu sondern bereits seit dem 19. Jahrhundert bekannt. Als neu kann nur die Bedeutungszuweisung für den Zustandsvektor $|Z\rangle$ angesehen werden. Er beschreibt den Vektor dessen Komponenten die Glaubhaftigkeitsgrade für die Objekte sind, die wir durch eine Messung eventuell erkennen können. Die Bedeutungszuweisung an diese Objekte selbst haben wir aber vorausgesetzt, als ein bereits aus unserer Lebenswelt bekanntes Wissen, das wir nicht weiter erhellen können. Dieses Wissen musste nun als ein zusammengehöriges Ganzes aufgefasst werden.

(Auch die De Broglie-Bohm-Interpretation der QM kann den Bezug zum Ganzen nicht umgehen. Diese setzt zwar Teilchenbahnen als Grundelemente der Beschreibung voraus, handelt sich dafür aber die Existenz nichtlokaler Wirkungsübertragungen ein.)

Der Unterschied zwischen Formalismus und Bedeutung tritt natürlich in jeder mathematischen Theorie auf. (Darauf hat bereits Benacerraf hingewiesen (Benacerraf, 1965).) Nur mittels ihrer Darstellung alleine sind mathematische Objekte nicht vollständig erfassbar. Je elementarer aber eine Mathematik ist, desto enger ist ihre Bedeutung mit unserer natürlichen Lebenseinstellung verbunden und desto schwieriger ist es daher, diese Bedeutung explizit im Unterricht aufzuzeigen. Eine Didaktik der präoperativen und konkret operativen Mathematik, bis hin zum formalen Denken, ist anspruchsvoller als unsere Hinführung zur QM.

Im nächsten Abschnitt wollen wir die Beziehung des mathematischen Denkens zur KI betrachten. Schon 2007 hat Herbert Dreyfus gefordert, dass die KI ‚heideggerischer‘ werden muss (Dreyfus, 2007). Aber ist dies möglich?

Denkt die KI?

Die Überlegenheit der Computer gegenüber dem Menschen liegt in deren Schnelligkeit. Um diese Schnelligkeit weiter zu vergrößern, wird versucht Computer zu entwickeln, die die Quantenlogik verwenden. Ein *Quantencomputer* kodiert seine Eingangsdaten mittels Zustandsvektoren (mathematisch dargestellt durch Vektoren in $\mathcal{C}^n$), die mit Gates (dargestellt durch Matrizen aus $\mathcal{C}^{n \times n}$) transformiert werden. Die so erzeugten Zustandsvektoren werden dann durch Messoperatoren in Zahlen überführt. Die Entwicklung von Algorithmen mit der Quantenlogik (z. B. Grover's schnelles Suchverfahren für Datenbanken) bleibt aber heute noch weitgehend die Aufgabe der Mathematiker.

Die Beschränkung der KI besteht darin, dass sie nicht selbstreflexiv ist und daher Bedeutungszuweisungen nicht eigenständig erzeugen kann. Sie muss diese vom Menschen übernehmen (z. B. bei Large Language

Modellen vom Internet). In dieser Einschränkung liegt natürlich eine Bedingung für ihre Nützlichkeit, denn sie soll ja dem Menschen dienen und kann dies nur, wenn sie dessen Begriffswelt übernimmt. Mit Heideggers Worten können wir daher sagen: ‚Die KI denkt noch nicht‘

Das Problem der Bedeutungszuweisung bleibt ein Problem für die Mathematik, obwohl es wesentlich in wichtigen Fragen der KI enthalten ist. Dies erläutert eine Betrachtung der Frage (Garey und Johnson, 1979):

$$P = / \neq NP?$$

Betrachtet seien Klassen von Aufgaben, deren mögliche jeweilige Lösungen durch Zeichenfolgen mit fester endlicher Länge n dargestellt werden. Der Test, ob ein solcher Lösungsvorschlag die Aufgabe wirklich löst sei p -schnell durchführbar, d. h. es gäbe zu jeder Klasse ein Polynom $p(x)$ mit Testzeit $\leq p(\text{Länge der Aufgabenbeschreibung})$.

Frage: Sind zu einer Klasse die Lösungen auch p -schnell von einem Algorithmus ALG auffindbar, d. h. gibt es ein Polynom $q(x)$, so dass für die Zeit T_{Suche} zum Auffinden einer Lösung einer Aufgabe mit ALG gilt: $T_{\text{Suche}} \leq q(\text{Länge der Aufgabenbeschreibung})$?

Ein Beispiel für eine solche Klasse von Aufgaben wird durch die SAT-Instanzen beschrieben, welche die logischen Aussagen in n Booleschen Variablen kodieren:

Zur Bildung einer SAT-Instanz werden aus einer Menge von n Variablen X_i und deren Verneinungen $\neg X_i$, d. h. aus der Menge $\{X_1, \dots, X_n, \neg X_1, \dots, \neg X_n\}$ k Teilmengen (Klauseln) ausgewählt. Eine Zuweisung $X_i \mapsto \text{wahr bzw. falsch}$, für $i = 1 \dots n$ heißt Lösung, wenn sie für jede Klausel wenigstens eine richtige Zuweisung macht, d. h. X_i wahr zuweist, wenn X_i Element der Klausel ist, bzw. X_i falsch zuweist, wenn $\neg X_i$ Element der Klausel ist.

Nach dem Satz von Cook würde ein schneller Algorithmus zum Finden der Lösungen der SAT-Instanzen schnelle Lösungsalgorithmen zu jeder der oben spezifizierten Aufgabenklassen ermöglichen.

Beobachtung

Ein Vergleich der Frage $P = / \neq NP$ für die SAT-Instanzen mit dem *Consensus Problem* lässt uns vermuten, dass die Antwort auf unsere Frage ‚nein‘ lautet.

Begründung

1. Wenn allen X_i Wahrheitswerte zugeordnet werden, so muss es eine Reihenfolge geben, in der diese

Zuordnungen endgültig erfolgen. Für jeden endgültigen Zuordnungsschritt für ein X_i können nicht alle anderen Zuweisungen in Betracht gezogen werden, denn ein Vergleich von allen Zuweisungen mit allen anderen würde eine Zeit beanspruchen, die exponentiell mit n anwächst. Jeder endgültige Zuweisungsschritt, in einem insgesamt p -schnellen Zuweisungsverfahren, muss daher eine lokale Teilmenge der Variablenvergleiche spezifizieren, die er berücksichtigt.

2. Betrachten wir die Zuweisungsschritte als Handlungen von Agenten, so erhalten wir eine Analogie zum Consensus-Problem. Jedem Agenten muss ein Teilgebiet der Menge aller Vergleiche von Zuordnungsmöglichkeiten entsprechen, das er betrachtet.
3. Da durch logische Aussagen beliebige globale Abhängigkeiten auf der Variablenmenge $\{X_1, \dots, X_n\}$ beschrieben werden können, müsste es globale Koordinierungsregeln zur Koordination der lokal wirkenden Agenten geben.
4. Die Betrachtung des Consensus-Problems ergibt aber, dass es im Allgemeinen nicht möglich ist, mittels endlich vielen Koordinierungsregeln, an beliebig viele, lokal agierende Agenten sicherzustellen, dass global spezifizierte Bedingungen erfüllt werden. (Dies wurde z. B. von Land und Belew mit der Untersuchung eines Dichte-Klassifizierungsproblems nachgewiesen (Land und Belew, 1995.)

Aber hält diese Begründung einem Überdenken stand? Wesentlich in den dargelegten Überlegungen ist ein Zusammengehörigkeitsbegriff, durch den Elementgruppen zu lokalen Einheiten zusammengefasst werden und eine Topologie entsteht. Aber dieser Begriff ist im Falle der $P = / \neq NP$ -Frage, durch den Begriff der logischen Abhängigkeit, anders spezifiziert, als beim Consensus-Problem, wo die lokalen Bereiche als Untermengen spezifiziert sind. Da es bei unserer Fragestellung aber auf die Grenzbetrachtung $n \rightarrow \infty$ ankommt, bleibt offen, ob beide Begriffsbildungen auch in der Grenzbetrachtung das Gleiche liefern. Vom Vergleich des Riemann-Integrals mit dem Cauchyschen Hauptwert-Integral wissen wir ja, dass bereits hier, unterschiedliche Betrachtungsweisen der approximierenden Treppenfunktionen zu unterschiedlichen Aussagen über den Grenzwert führen.

Die Grenzbetrachtung ist daher nicht durch eine eindeutige Bedeutungszuweisung festgelegt. Es fehlt uns deren Bedeutung innerhalb eines Formalismus, der uns unsere Frage als ein Problem der Mathematik liefern würde. Die Frage $P = / \neq NP$ ist bezüglich ihrer Bedeutung nicht ausreichend spezifiziert, um lösbar zu sein.

Schlussbetrachtung

Die Bedeutungszuweisung hat in der Mathematik nicht nur die Funktion, formale Begriffe verständlich zu machen, sondern sie ermöglicht die Bildung von Konzepten, mittels denen formale Betrachtungen und Rechnungen überhaupt erst möglich werden. Die Bildung formaler Konzepte ist eine wesentliche Fähigkeit, die der Mathematikunterricht vermittelt. Verfügen wir über solche Konzepte (wie im Falle des Zustands in der QM), so ermöglichen sie uns ein neues Verstehen, wohingegen dort, wo diese fehlen (wie im Falle der $P = / \neq NP$ -Frage), keine Antworten möglich sind. Das Entstehen neuer Begriffe mittels Bedeutungszuweisung wird auch als *Emergenz* bezeichnet.

Um zu verstehen, d. h. um im Sinne Heideggers denken zu können, müssen wir lernen, unser eigenes Denken ‚zu bedenken‘. Wir müssen verstehen, dass wir es sind, die Bedeutung erschaffen. Falls wir nur noch der KI vertrauen, wird unsere Welt bedeutungslos. Mit dem Entstehen der modernen Physik ist die Frage nach der Bedeutung aktuell geworden und umgekehrt hat uns nun die QM ein Verstehen des Begriffs der Bedeutung ermöglicht. Es bleibt mir zu hoffen, dass vielen Lehrenden dieser Beitrag bedenklich erscheint.

Literatur

- Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *Philosophical Review*, 74(1), 47–73.
- Dreyfus, H. (2007). Why Heideggerian AI failed and how fixing it would require making it more Heideggerian. *Artificial Intelligence*, 171(18), 1137–1160.
- Garey, M., & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company.
- Heidegger, M. (1955). *Was heißt Denken?* Reklam.
- Land, M., & Belew, R. (1995). No perfect two-state cellular automata for density classification exist. *Physical Review Letters*, 74(25), 5148–5150.

Hanns Sommer, Universität Kassel
hjsommer@uni-kassel.de