

Ein Beitrag zur Diskussion MMS versus CAS, DGS usw.

Jens Weitendorf

Einleitung

Bzgl. der Einführung des MMS Standards gibt es erheblichen Diskussionsbedarf. Es könnte zur Klärung beitragen, wenn man die Abituraufgaben, die für den Einsatz von MMS vorgesehen sind, analysiert. Als Beispiele haben wir die Aufgaben von 2025 ausgewählt. Hinsichtlich der Vergleiche beziehen wir uns auf den ClassPad. Die Aufgaben findet man im Netz auf www2.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2025/mathematik/erhoeht. Zur besseren Lesbarkeit sind sie jeweils vorangestellt.

Analysis Vorschlag 1

Aufgabe 1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit:

$$f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2(x-2k)^2 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

- Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.
- Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.
- Betrachtet wird die Fläche, die G_k , die x -Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:
Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^1 f_k(x) dx$ den Inhalt der betrachteten Fläche an.
- Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x-2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:
- Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5 .

Zu den Lösungen

- Die Lösung ist direkt ablesbar, es ist kein MMS erforderlich.
- Auch b. ist händisch lösbar. Der Einsatz von CAS bzw. MMS stellt eine Erleichterung dar.

$\frac{d}{dx}(f(k, x))$	$\frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot k \cdot x^2 + 4 \cdot k^2 \cdot x}{k}$
$\text{solve}\left(\frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot k \cdot x^2 + 4 \cdot k^2 \cdot x}{k} = 0, x\right)$	$\{x=0, x=2-k, x=k\}$
$f(k, 0)$	0
$f(k, 2k)$	0
$f(k, k)$	$\frac{k^3}{2}$

Aus dem obigen wird deutlich, dass der ClassPad gegenüber einem MMS keinen Vorteil bietet. Der Rest ist ohne weitere digitale Unterstützung lösbar.

- Die Begründung ergibt sich direkt aus den Hoch- und Tiefpunkten mit $k > 0$. Für die Schülerinnen und Schüler könnte es hilfreich sein, einige Grafen plotten zu lassen. Dies wäre sowohl mit MMS als auch mit dem ClassPad möglich.

$\text{solve}(f(k, x) = h(k, x), x)$	$\{x=-k, x=2-k, x=k\}$
--------------------------------------	------------------------

Im Bereich $[-k; k]$ gilt: $h_k(x) \geq f_k(x)$ $[k; 2k]$:
 $f_k(x) \geq h_k(x)$

$\int_{-k}^k h(k, x) - f(k, x) dx$	$\frac{14 \cdot k^4}{5}$
$\int_k^{2k} f(k, x) - h(k, x) dx$	$\frac{k^4}{10}$
$\frac{14 \cdot k^4}{5} + \frac{k^4}{10}$	$\frac{29 \cdot k^4}{10}$

Für $k > 3$ gilt $k^5 > \frac{29k^4}{10}$ da $3 > 2,9$.

Auch hier wird wieder deutlich, dass der Einsatz des ClassPad bzw. MMS den Umgang mit den Termen erleichtert. Prinzipiell wäre auch eine händische Lösung möglich. Sehr rechenaufwendig wäre aber die Berechnung der Integrale. Bzgl. dieses Aufgabenteils bietet der ClassPad gegenüber dem MMS keinen Vorteil.

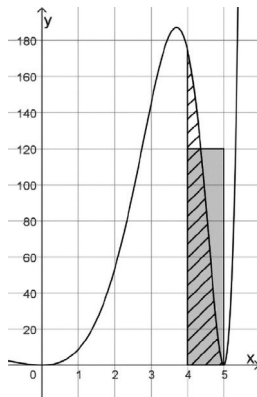
Aufgabe 2

Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in IR definierte Funktion r mit $r(x) = e^x \cdot f_{2,5}(x)$ für $0 \leq x \leq 5$ modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{m^3}{h}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar aus Aufgabe 1 mit $k = 2,5$.

- Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum.
- Im Intervall $[0; 5]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1 . Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100,5$ und $r'(x_1) \approx -240,2$ sowie $r(0) = 0$ und $r(5) = 0$. Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang.
- Die Abbildung zeigt den Graphen von r mit einigen Eintragungen. Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:

$$\int_4^5 r(x) dx < 120$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.



- Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit $186 m^3$ Regenwasser gefüllt. Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben. Geben Sie einen

Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt.

Zu den Lösungen

```
a. define r(x)=e^x*f(2.5,x)
done
d. (r(x))
x^4*e^x-6*x^3*e^x-5*x^2*e^x+50*x*e^x
solve(x^4*e^x-6*x^3*e^x-5*x^2*e^x+50*x*e^x=0,x)
{x=0,x=5,x=-sqrt(41)/2+1/2,x=sqrt(41)/2+1/2}
r(0)
0
r(5)
0
r(-sqrt(41)/2+1/2)
187.1588797
```

Für die Ränder des Intervalls gilt: $r(0) = 0$ und $r(5) = 0$. Der minimale Wert beträgt also $0 \frac{m^3}{h}$ und der maximale Wert ca. $187,16 \frac{m^3}{h}$.

Wie die obigen Rechnungen zeigen, ist es hier schon angebracht, digitale Medien einzusetzen. Alternativ wäre die Nullstelle der ersten Ableitung $x = 0$ ist ablesbar. Die Stelle $x = 5$ müsste geraten werden und dann eine Polynomdivision durchgeführt werden.

- Hier handelt es sich um eine Interpretation, für die ein CAS oder MMS nicht hilfreich ist.
- Gedacht ist wahrscheinlich, dass mit Hilfe der Zeichnung argumentiert wird. Dies ist aber rein mathematisch kein Argument. Des Weiteren bleibt unklar, wie exakt eine Argumentation mit Hilfe der Zeichnung sein müsste. Mit dem ClassPad oder auch MMS lässt sich der Wert exakt bestimmen:

```
integrate(r(x),x,4,5)
87.96794529
```

Wenn digitale Medien erlaubt sind, stellt sich die Frage, wie sich ein Einsatz verhindern lässt, wie es ja wohl von den Autoren der Aufgabe gedacht ist.

- Auch für diesen Aufgabenteil ist ein CAS nicht hilfreich. Wenn eine Konstante für das Abpumpen angegeben wäre, könnte man den aufgestellten Term anhand der vorgegebenen Daten verifizieren.

Fazit

Insgesamt ist nicht erkennbar, dass der Einsatz des ClassPad gegenüber MMS einen Vorteil bietet. Wie oben beschrieben wäre auch insgesamt eine Lösung ohne den Einsatz digitaler Hilfsmittel möglich.

Analysis Vorschlag 2

Aufgabe 1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_b : x \rightarrow \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-b \cdot x + 4b}$ mit $b \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_b wird mit G_b bezeichnet.

- Geben Sie das Verhalten von f_b für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.
Zeigen Sie, dass der Funktionswert von f_b an der Stelle 4 unabhängig von b ist.
- Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der beiden Extrempunkte von G_b .
Berechnen Sie einen Wert von b , für den die beiden Extrempunkte den Abstand 6 haben, und geben Sie diesen Wert auf Hundertstel gerundet an.
- Begründen Sie, ohne Terme von Stammfunktionen zu bestimmen, dass die folgende Aussage wahr ist: *Der Graph jeder Stammfunktion von f_b hat mit der positiven x -Achse höchstens einen gemeinsamen Punkt.*

Zu den Lösungen

- a. `define f(b,x)=1/16*x^2*e^-b*x+4b`

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(b, x))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(b, x))$$

$$f(b, 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 \cdot e^{-b \cdot x + 4b}}{16} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \cdot e^{-b \cdot x + 4b}}{16} \right)$$

1

Bzgl. der Grenzwerte gibt der ClassPad keine Ergebnisse an. Dies liegt daran, da ja für den ClassPad $b > 0$ nicht vorausgesetzt wurde. Selbst wenn man b durch den Betrag von b ersetzt, gibt es ebenfalls kein Ergebnis. Da dem MMS ja ein CAS zugrunde liegt, hätte man auch hier keine Ergebnisse. Für die Diskussion des Falles $x = 4$ ist ein CAS nicht erforderlich.

- b. $\frac{d}{dx} (f(b, x))$

$$\text{solve} \left(\frac{-(b \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot e^{-b \cdot x + 4b}}{16} = 0, x \right)$$

$$f(b, 0)$$

$$f(b, 2/b)$$

$$\frac{-(b \cdot x^2 - 2 \cdot x) \cdot e^{-b \cdot x + 4b}}{16}$$

$$\left\{ x=0, x=\frac{2}{b} \right\}$$

0

$$\frac{e^{4-b-2}}{4 \cdot b^2}$$

$$\text{solve} \left(\sqrt{\frac{4}{b^2} + \frac{(e^{4-b-2})^2}{(4 \cdot b^2)^2}} = 6, b \right)$$

$$\{b=-0.3333631469, b=0.3395329561, b=1.486158827\}$$

Da $b > 0$, ist $E_1(0; 0)$ ein Minimum und $E_2(\frac{2}{b}; \frac{e^{4-b-2}}{4b^2})$ ein Maximum. Man hätte auch die 2. Ableitung bilden und die Vorzeichen untersuchen können. Als

Lösung für den Abstand kommen die beiden letzten in Frage. Da $b > 0$, scheidet die erste aus. Es handelt sich um eine Wurzelgleichung; daher ist die Probe zu machen.

$$0.3395329561 \approx b$$

$$\text{approx} \left(\sqrt{\frac{4}{b^2} + \frac{(e^{4-b-2})^2}{(4 \cdot b^2)^2}} \right)$$

$$1.486158827 \approx b$$

$$\sqrt{\frac{4}{b^2} + \frac{(e^{4-b-2})^2}{(4 \cdot b^2)^2}}$$

$$\frac{3564601}{10498542}$$

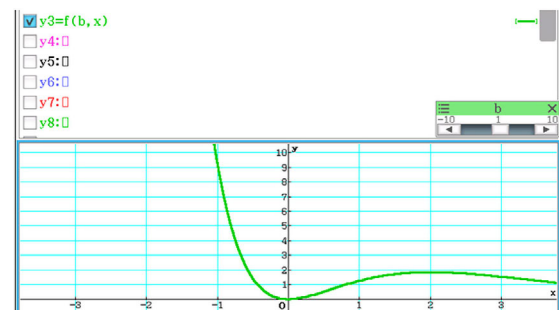
6

$$\frac{1493710}{1005081}$$

$$6.000000001$$

Näherungswerte lassen sich mit Hilfe des `approx` Befehls, der aber unter Umständen nicht zulässig ist, oder mit Hilfe der Taste $\left[\frac{\square}{\square} \right]$ vornehmen. Es ergeben sich also für b die beiden Lösungen $b_1 \approx 0,34$ und $b_2 \approx 1,49$. In der Bewertung ist nur die erste Lösung angegeben? Die Bestimmung der Extrema ist händisch möglich. Für die Wurzelgleichung ist ein CAS erforderlich. Ein Vorteil, den ein CAS gegenüber dem MMS hätte, ist nicht erkennbar. Näherungen sind auch mit MMS möglich.

- c. Für die Argumentation ist der ClassPad nicht erforderlich. Es soll zwar keine Stammfunktion bestimmt werden; man kann sich aber den Graphen von $f_b(x)$ plotten lassen.



Geplottet ist die Ableitung der Stammfunktion. Daraus folgt, dass jede Stammfunktion monoton steigend ist, woraus sich die Behauptung ergibt. Das Plotten wäre auch mit MMS möglich.

Aufgabe 2

Betrachtet wird nun die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $r : x \rightarrow \frac{1}{16}x^2 \cdot e^{-0,25x+1}$. Somit ist r die Funktion $f_{0,25}$ der Schar aus Aufgabe 1. Ihr Graph wird mit G bezeichnet. Die Konstruktion einer Wasserrutsche, die aus einer Rutschbahn und einem horizontalen Startpodest besteht, wird geplant. Dabei beschreibt G für $-4 \leq x \leq 10$ die Profillinie der Rutschbahn und die x -Achse den horizontalen Boden sowie die Wasseroberfläche (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im

Koordinatensystem entspricht dabei 1 m in der Realität.

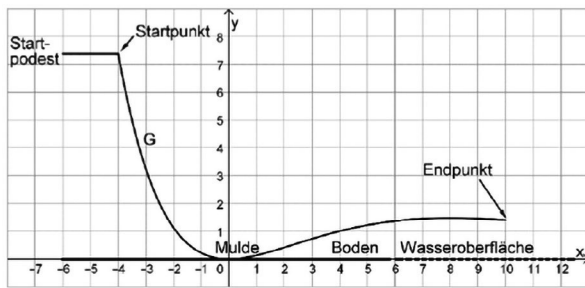


Abbildung 1

- Berechnen Sie die Höhe des Startpodests über dem Boden und die Höhe des Endpunkts der Rutschbahn über der Wasseroberfläche.
- Betrachtet wird der Winkel β , der im Sachzusammenhang von Bedeutung ist. Mithilfe der folgenden beiden Gleichungen kann die Größe des Winkels β ermittelt werden:

$$r'(-4) = \tan(\alpha) \quad \alpha \in]-90^\circ; 0^\circ[$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

Zeichnen Sie die Winkel α und β in Abbildung 1 geeignet ein und geben Sie die Bedeutung von β im Sachzusammenhang an.

- Da die 1,5 m breite Rutschbahn durch vertikale Wände begrenzt werden soll, kann sich Wasser in der Mulde sammeln. Berechnen Sie das Volumen des Wassers in der Mulde in Litern, wenn es dort an der tiefsten Stelle eine Höhe von 5 cm hat (vgl. Abbildung 2).

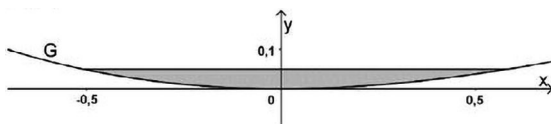


Abbildung 2

- In der folgenden Untersuchung wird erneut nur die Profillinie der Rutschbahn betrachtet. Um die Sicherheit der Badegäste zu erhöhen, soll eine in alle Richtungen drehbare Überwachungskamera angebracht werden, deren Position im Modell durch den Punkt (12 | 3) beschrieben wird. Die Sichtlinie der Kamera in Richtung eines Punktes der Rutschbahn, der durch $(a | r(a))$ mit $-4 \leq a \leq 10$ dargestellt wird, kann durch die Gerade g_a mit der Gleichung

$$y = \frac{3 - r(a)}{12 - a} \cdot x + \left(3 - \frac{3 - r(a)}{12 - a} \cdot 12 \right)$$

beschrieben werden. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Teil der Rutschbahn, der durch den rechtsgekrümmten Teil von G dargestellt wird, von der Kamera vollständig einsehbar ist.

Zu den Lösungen

a.	$f(0,25,-4)$	7.389056099
	$f(0,25,10)$	1.394563501

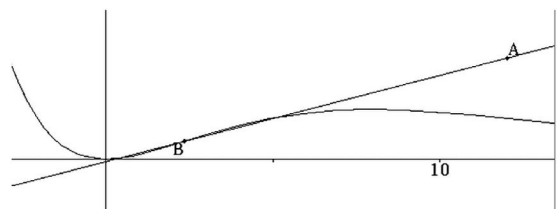
Die Anfangshöhe beträgt ca. 7,39 m und am Ende ist die Rutsche ca. 1,39 m hoch. Die Werte könnten natürlich auch mit einem WTR bestimmt werden. Es zeigt sich hier insbesondere, dass es sehr hilfreich ist, zu Anfang $f_b(x)$ zu definieren.

- Ein digitales Hilfsmittel ist nicht erforderlich.

c.	$\text{solve}(f(0,25,x)=0,05,x)$	$\{x=-0.5090528763, x=0.5835481843, x=32.82116217\}$
	$\int_{-0.5090528763}^{0.5835481843} f(0,25,x) dx$	0.01831213682
	$(0.5835481843+0.5090528763) \cdot 0.05$	0.05463005303
	$0.05463005303 - 0.01831213682$	0.03631791621
	$0.03631791621 \cdot 1.5$	0.05447687432

Die obige Abbildung zeigt, dass ein Einsatz eines digitalen Hilfsmittels erforderlich ist. Ein herkömmlicher ClassPad bietet gegenüber eines MMS keinen Vorteil.

- Es bleibt unklar, warum die Autoren der Aufgabe die Gleichung für die Gerade vorgeben. Wenn wir keine Beschränkung durch MMS hätten, könnten die Schülerinnen und Schüler die folgende Zeichnung anfertigen.



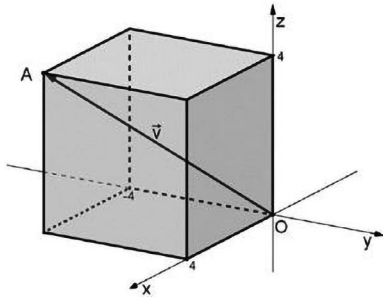
Der Punkt B ist der vorher berechnete Wendepunkt. Der Punkt A ist der gegebene Punkt. Die Zeichnung ist im DGS-Bereich des ClassPad erstellt worden. MMS sieht keinen DGS-Bereich vor. In MMS wäre es aber möglich die Geradengleichung durch die Punkte A und B zu bestimmen und danach zu zeigen, dass es außer dem Punkt B einen weiteren gemeinsamen Punkt gibt.

Aufgabe 1 Algebra

Die Abbildung zeigt einen Würfel, bei dem ein Eckpunkt im Koordinatenursprung liegt und jede Kante parallel zu einer der drei Koordinatenachsen verläuft. Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist der Verbindungsvektor zwischen den beiden Eckpunkten O und A des Würfels.



- a. Geben Sie einen Vektor $\vec{u}$ an, der die folgenden drei Eigenschaften hat:
- $\vec{u}$ ist Verbindungsvektor zwischen zwei Eckpunkten des Würfels.
 - $\vec{u}$ hat die gleiche Länge wie $\vec{v}$.
 - $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind nicht kollinear.
- b. Betrachtet werden alle Dreiecke OAB, wobei B ein weiterer Eckpunkt des Würfels ist. Begründen Sie, dass alle diese Dreiecke kongruent sind. Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines dieser Dreiecke.

Zu den Lösungen

Für a. und b. ist kein digitales Hilfsmittel erforderlich.

Aufgabe 2

In einem zweistufigen Produktionsprozess stellt ein Betrieb aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 zunächst die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her, aus denen dann die drei Endprodukte E_1, E_2 , und E_3 gefertigt werden. Den Tabellen ist zu entnehmen, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Zwischenprodukte bzw. der Rohstoffe zur Herstellung von jeweils einer ME der Endprodukte verarbeitet werden.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	3	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	5	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	9	12	0
R_2	3	42	12
R_3	0	20	8
R_4	0	10	4

Für einen Auftrag sollen 10 ME von jedem der drei Endprodukte produziert werden.

- a. Berechnen Sie, wie viele ME des Rohstoffs 2R benötigt werden.
- b. Bei diesem Auftrag sollen die gesamten Fertigungskosten für die Zwischenprodukte 1250 Geldeinheiten (GE) betragen. In diesem Zusammenhang wird die folgende Gleichung betrachtet:

$$(2z \text{ z } 2z) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 1250$$

Erläutern Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung und deuten Sie die Lösung im Sachzusammenhang.

Nach einer Lieferung von Rohstoffen befinden sich 400 ME des Rohstoffs R_3 und 200 ME des Rohstoffs R_4 im Lager. Zudem sind die Rohstoffe R_1 und R_2 in beliebiger Menge verfügbar. Für einen anderen Auftrag sollen 10 ME des Endprodukts E_2 und 25 ME des Endprodukts E_3 produziert werden. Für diesen Auftrag soll der komplette Lagerbestand der Rohstoffe R_3 und R_4 aufgebraucht werden und der Anteil des Rohstoffs R_1 unter allen vier Rohstoffen 25 % betragen.

- c. Ermitteln Sie die Anzahl von ME des Endprodukts E_1 dieses Auftrags.

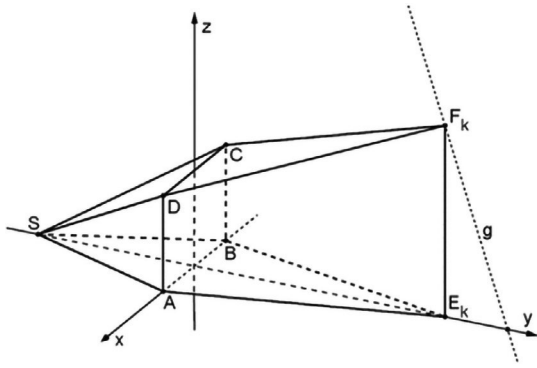
Zu den Lösungen

Die für a., b. und c. erforderlichen Rechnungen kann man mit digitalen Hilfsmitteln durchführen. Die benutzten Zahlen sind aber so gewählt, dass es auch im Prinzip möglich wäre, die Rechnungen im Kopf durchzuführen. Für c. ist eine Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten einzugeben. Dies ist z. B. beim ClassPad nicht möglich. Man kann dies umgehen, indem eine 3×3 -Matrix gewählt wird und „0“ in die letzte Zeile eingegeben wird. Ein Vorteil z. B. des ClassPads gegenüber MMS ist nicht erkennbar.

Aufgabe 2 Algebra

Betrachtet werden die Punkte $A(2 | 0 | 0)$, $B(-2 | 0 | 0)$, $C(-2 | 0 | 3)$, $D(2 | 0 | 3)$, $S(0 | -5 | 0)$, $E_k(0 | k | 0)$ und $F_k(0 | k | 30 - 3k)$ mit $0 < k \leq 10$.

Die Abbildung zeigt einen zusammengesetzten Körper, der aus der Pyramide $ABCD S$ und einem Körper $ABCD E_k F_k$ besteht.



- Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck. Untersuchen Sie, ob $ABCD$ auch ein Quadrat ist. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCD S$.
- Jeder Punkt F_k liegt auf der Gerade g (vgl. Abbildung). Geben Sie den Ortsvektor eines Punkts auf g an und zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor von g ist.

- Begründen Sie, dass die xz -Ebene für keinen Wert von k eine Symmetrieebene des zusammengesetzten Körpers ist.
- Die Punkte C , D und S liegen in der Ebene L . Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. Ermitteln Sie den Wert von k , für den der Eckpunkt F_k ebenfalls in L liegt.
- Im Dreieck $DF_k C$ wird der Innenwinkel im Punkt F_k betrachtet. Ermitteln Sie denjenigen Wert von k , für den die Größe dieses Winkels maximal ist, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Zu den Lösungen

Insgesamt ist anzumerken, dass alle Aufgabenteile ohne digitale Hilfsmittel zu lösen sind. Etwas aufwendiger ist e.; daher geben wir die Lösung unten an.

$$e. \quad \overrightarrow{F_k D} = \begin{pmatrix} 2 \\ -k \\ -27 - 3k \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{F_k C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -k \\ -27 - 3k \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass das Dreieck gleichschenkelig ist. Die Basis ist $\overline{DC}$. Je kleiner die Höhe in dem Dreieck ist, desto größer ist der Winkel beim Punkt F_k . Die Höhe gibt den Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Seite $\overline{DC}$ und dem Punkt F_k .

$$M_{CD}(0; 0; 3) \quad d = \sqrt{k^2 + (27 - 3k)^2}$$

```
define f(x)=sqrt(x^2+(27-3x)^2)
done
d
dx
10*x-81
sqrt(10*x^2-162*x+729)
```

$$f(k) = 0 \leftrightarrow k = 8, 1$$

Dass es sich um ein Minimum für die Höhe bzw. ein Maximum für den Winkel handelt, ergibt sich aus dem Sachzusammenhang.

Man könnte auf die Idee kommen, direkt eine Funktion für den Winkel aufzustellen, die Ableitung zu bilden und so das Maximum zu bestimmen. Dies führt zu sehr komplexen Gleichungen, die auch mit dem ClassPad nicht beherrschbar sind.

Da, wie gesagt, digitale Hilfsmittel nicht wirklich erforderlich sind, erübrigt sich die Frage, ob es einen Vorteil des ClassPad gegenüber MMS gibt.

Aufgabe 1 Stochastik

1. Bei einer Naturkostkette besitzen die meisten Kundinnen und Kunden ein Konto für Online-Bestellungen. Im Folgenden werden ausschließlich diese Personen betrachtet. 72 % der Personen sind jünger als 50 Jahre. 18 % der Personen sind jünger als 50 Jahre und wohnen nicht in einer Großstadt. Der Anteil der Personen, die in einer Großstadt wohnen, beträgt 75 %. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Personen die Anzahl derjenigen, die in einer Großstadt wohnen, binomialverteilt ist.

- Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.
- Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person in einer Großstadt wohnt und nicht jünger als 50 Jahre ist, ist etwa halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person entweder in einer Großstadt wohnt oder nicht jünger als 50 Jahre ist.
- Es werden 160 Personen zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als drei Viertel dieser Personen in einer Großstadt wohnen.

Zu den Lösungen

Die Aufgabenteile a. und b. sind ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

- c. Da Formelsammlungen nur Werte bis $n = 100$ angeben, ist hier ein digitales Medium erforderlich, das die Möglichkeit bietet, Werte für die kumulierte Binomialverteilung anzugeben. Zwischen ClassPad und MMS gibt es hier keinen Unterschied in der Handhabung.

2. Eine Abfüllanlage der Naturkostkette füllt veganen Brotaufstrich in Gläser ab, auf denen als Füllmenge „250 g“ aufgedruckt ist. Die tatsächliche Füllmenge kann jedoch von der auf dem Glas aufgedruckten Füllmenge abweichen. Um festzulegen, welche Abweichungen der tatsächlichen von der aufgedruckten Füllmenge toleriert werden, wird die sogenannte Minusabweichung verwendet. Bei einer aufgedruckten Füllmenge von 250 Gramm beträgt die Minusabweichung 4,5 Gramm.

250g e

Abbildung 1

Die Gläser können gemäß einer Richtlinie mit der in der Abbildung 1 dargestellten Füllmengenkennzeichnung versehen werden, wenn drei Bedingungen erfüllt sind. Diese können modellhaft wie folgt formuliert werden:

- *Bedingung I: Der Erwartungswert der tatsächlichen Füllmenge in Gramm liegt nicht unter der aufgedruckten Füllmenge.*
- *Bedingung II: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die tatsächliche Füllmenge in Gramm von der aufgedruckten Füllmenge um mindestens eine Minusabweichung nach unten abweicht, beträgt höchstens 6%.*
- *Bedingung III: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die tatsächliche Füllmenge in Gramm von der aufgedruckten Füllmenge um mindestens zwei Minusabweichungen nach unten abweicht, beträgt höchstens 0,2%.*

- a. Die tatsächliche Füllmenge der Gläser ist normalverteilt mit der Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-250}{2}\right)^2},$$

wobei x die tatsächliche Füllmenge eines Glases in Gramm beschreibt. Untersuchen Sie, ob jede der drei Bedingungen erfüllt ist.

- b. Eine weitere Produktion von Gläsern mit einer aufgedruckten Füllmenge von 250 Gramm stammt

von einer anderen Abfüllanlage für vegane Brotaufstriche. Die tatsächliche Füllmenge in Gramm ist normalverteilt mit den Parametern $\mu = 250$ und σ . Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Wenn diese Produktion die Bedingung II erfüllt, dann erfüllt sie auch die Bedingung III.

Zu den Lösungen

Für diesen zweiten Teil sind digitale Hilfsmittel erforderlich. Daher geben wir Lösungen an und diskutieren diese.

- a. $\mu = 250$ und $\sigma = 2$. Die Werte sind direkt ablesbar.

```
normCDF(0, 245, 5, 2, 250)      0.01222447286
normCDF(0, 241, 2, 250)          3.397673125E-6
```

$0,01222 \dots < 0,06$. Die Bedingung 2 ist erfüllt.

$0,00000339 \dots < 0,002$. Die Bedingung 3 ist erfüllt.

- b. Es soll gelten $P(245, 5) < 0,06$.

1	sigma		
2	2.0	0.01222	3.40E-6
3	2.1	0.01606	9.11E-6
4	2.2	0.02041	2.15E-5
5	2.3	0.02520	4.56E-5
6	2.4	0.03040	8.84E-5
7	2.5	0.03593	1.59E-4
8	2.6	0.04175	2.69E-4
9	2.7	0.04779	4.29E-4
10	2.8	0.05401	6.54E-4
11	2.9	0.06036	9.56E-4
12	3.0	0.06681	1.35E-3
13	3.1	0.07330	1.85E-3
14	3.2	0.07982	2.46E-3
15	3.3	0.08634	3.19E-3
16	3.4	0.09283	4.06E-3
17	3.5	0.09927	5.06E-3
18	3.6	0.10565	6.21E-3
19	3.7	0.11195	7.50E-3

In der Tabelle sind die Werte für die Abweichung von einer bzw. zwei Minusabweichungen aufgeführt. Damit die zweite Bedingung erfüllt ist, muss σ kleiner als 2,9 sein. Da $0,0000956 < 0,0002$ ist auch automatisch die 3. Bedingung erfüllt.

Die Möglichkeit, eine Tabelle anzulegen, sollte auch in MMS durchführbar sein.

Alternativ lässt sich die Gleichung auch direkt lösen. Dies ist aber nicht möglich, wenn man die Normalverteilung als Integral eingibt.

```

solve(normCDF(0, 245.5, x, 250)=0.06, x)
(x=2.894312082, x=1625.811344)
solve(0.06=1/(x*sqrt(2*pi))*int_0^245.5 e^(-0.5*((t-250)/x)^2) dt, x)
[[-sqrt(2)*int_0^245.5 e^(-0.5*((t-250)/x)^2) dt + 3/80=0]]
normCDF(0, 241, 2.894312082, 250)
9.368717548e-4
define f(x)=normCDF(0, 245.5, x, 250)
done

```

MMS schließt die Möglichkeit der direkten Lösung nicht aus. Es ist aber nach den von der KMK angegebenen Bedingungen nicht klar, ob eine solche Lösung machbar ist.

Was aber auch noch eine Möglichkeit ist, ist die Darstellung als Graph. Die Funktion des ClassPad der Schnittpunktberechnung ist aber in den MMS-Bedingungen wohl nicht enthalten.

Aufgabe 2 Stochastik

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

1. Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.

2. Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich on-line gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

- Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.
- Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14 %.“ Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiterzubetreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

- Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
- Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

Zu den Lösungen

1. Für die beiden Aufgabenteile sind digitale Hilfsmittel erforderlich, da es für $n = 300$ keine Tabellenwerte gibt.

2. a. und b. Es gibt keine Unterstützung durch MMS oder ClassPad.

C. define f(x)=1-binomialCDF(0, x, 500, 0.14)

done

	A	B	C
1	70		0.46818
2	71		0.41755
3	72		0.36844
4	73		0.32156
5	74		0.27753
6	75		0.23682
7	76		0.19976
8	77		0.16653
9	78		0.13720
10	79		0.11170
11	80		0.08985
12	81		0.07140
13	82		0.05606
14	83		0.04349
15	84		0.03332

Die Werte für die Funktion sind in Spalte C eingetragen.

Das heißt, ist die Anzahl größer als 80 ergeben sich ca. 9 % und für Werte größer als 81 ca. 7,1 %.

d. `define f(x)=binomialCDF(0,35,200,x)`

done

	A	B	C
1	0.15	0.86127	
2	0.16	0.75394	
3	0.17	0.61841	
4	0.18	0.47114	
5	0.19	0.33161	
6	0.20	0.21507	
7	0.21	0.12843	
8	0.22	0.07065	
9	0.23	0.03584	
10	0.24	0.01680	
11	0.25	7.29E-3	
12	0.26	2.93E-3	
13	0.27	1.10E-3	
14	0.28	3.81E-4	
15	0.29	1.23E-4	
16	0.3	3.72E-5	
17	0.31	1.05E-5	
18	0.32	2.77E-6	

Die Werte für die Funktion sind in Spalte C eingetragen.

Das heißt, ist die Anzahl größer als 80 ergeben sich ca. 9 % und für Werte größer als 81 ca. 7,1 %.

Für c. und d. Alternative Lösungen wie in Aufgabe 1 bezogen auf die Normalverteilung sind hier nicht möglich. Da MMS auch die Tabellenkalkulation beinhaltet, entsteht durch den ClassPad kein Vorteil.

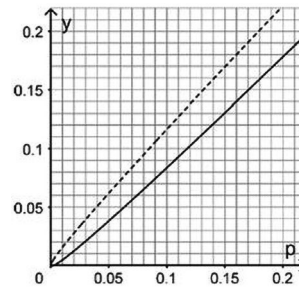
Aufgabe 3 Stochastik

Die Aufgabenteile 1a. und b. und 2a. und b. sind identisch zu denen aus Aufgabe 2.

Der Tourismusverband vermutet, dass der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen durch den Einsatz der Shuttlebusse nun 20 % beträgt. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 % einen Schätzwert für den Anteil der Radausflügler unter den Touristen zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 900 zufällig ausgewählten Touristen betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0; 1]$ definierten Funktionen

$$g_1: p \rightarrow p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{900}},$$

$$g_2: p \rightarrow p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{900}}.$$



c. In der Stichprobe werden 153 Radausflügler gezählt. Ermitteln Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 % und beurteilen Sie damit, ob die Vermutung des Tourismusverbandes mit dem Stichprobenergebnis verträglich ist.

d. Betrachtet wird eine Stichprobe vom Umfang n mit einem Anteil $h = 0,17$ sowie das zu diesem Anteil gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %. Betrachtet wird die folgende Aussage:

Der Wert 0,17 liegt in der Mitte zwischen 0,14 und 0,20. Trotzdem ist es möglich, dass die Annahme $p = 0,14$ mit dem Stichprobenergebnis nicht verträglich ist, die Annahme $p = 0,20$ hingegen schon.

Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung der folgenden beiden Rechnungen:

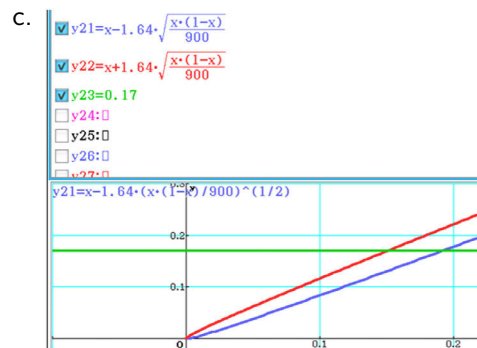
$$0,17 = 0,14 + 1,64 \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{n}} \quad (\text{I})$$

$$\Rightarrow n \approx 359,8$$

$$0,17 = 0,20 - 1,64 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \quad (\text{II})$$

$$\Rightarrow n \approx 478,2$$

Zu den Lösungen



Die vorgegebene Zeichnung ließe sich auch mit dem ClassPad oder MMS erzeugen. Die sich ergebenden Schnittpunkte lassen sich direkt in der

Zeichnung ablesen (was zwar nach MMS nicht vorgesehen ist) und im Bereich main berechnen. Es war ja aber die Aufgabe, diese aus der Zeichnung abzulesen.

Die Herleitung der vorgegebenen Formeln ließe sich auch mit Unterstützung von CAS durchführen (für die Herleitung siehe z. B. Jahnke, T. & Wuttke, H. (Hrsg.): *Mathematik Stochastik*. Cornelsen, Berlin, S. 216–224.).

$$\begin{aligned} \text{d. } & \text{solve}\left(0,17=0,14+1,64\cdot\sqrt{\frac{0,14\cdot 0,86}{x}},x\right) & \{x=359,8087111\} \\ & \text{solve}\left(0,17=0,2-1,64\cdot\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{x}},x\right) & \{x=478,1511111\} \end{aligned}$$

Die vorgegebenen Rechnungen mit Ergebnissen wären nicht erforderlich. Es ergibt sich ein Annahmehereich $[360,478]$. Aus den Rechnungen folgt, dass für $p = 0,14$ der Wert nicht mehr im Annahmehereich liegt, für $p = 0,2$ hingegen schon, wie die zweite Rechnung zeigt. Beide Rechnungen müssten nach Voraussetzung auch mit MMS ausgeführt werden können. Auch eine händische Lösung wäre möglich, wenn auch rechenaufwendig.

Insgesamt zeigt sich, dass bezogen auf die Aufgabenstellung digitale Hilfsmittel nur für 1 erforderlich wären. Es zeigt sich aber auch, dass bei gewissen Abwandlungen der Einsatz des ClassPad hilfreich wäre.

Fazit

Betrachtet man die Aufgaben insgesamt, so war ein Vorteil des ClassPad gegenüber eines MMS nicht erkennbar. Insgesamt vermittelt sich der Eindruck, dass ein digitales Hilfsmittel eher als eine digitale Formelsammlung gesehen wird. Vor allem wäre es möglich, Aufgaben zu stellen, in denen die Hilfsmittel eher zur Unterstützung eines Prozesses genutzt werden. Für eine solche Art von Aufgaben wäre es natürlich von großem Vorteil, wenn MMS auch eine DGS beinhalten würde. Bzgl. der Bewertung müsste dann auch der Umgang mit dem Medium ein Teil dieser sein. So zeigt sich an einigen Aufgabenteilen, dass es sehr zur Übersicht beiträgt, wenn Funktionen definiert werden. Auch dieses müsste in MMS machbar sein. Wenn die Struktur der Aufgaben beibehalten werden soll, ist es nicht verstehbar, warum die Fähigkeiten der digitalen Hilfsmittel eingeschränkt werden sollen. Will man die Struktur ändern, so setzt das natürlich einen entsprechenden Unterricht voraus. Für solche Änderungen gibt es in der Literatur vielfältige Beispiele.

Jens Weitendorf, ehemals Gymnasium Harksheide, IQSH
jweitendorf@t-online.de