Modellbildung versus Modellisieren und Scheinmodellierung

Hans-Jürgen Bandelt

Verschmelzung von Realität mit Fiktion

Was ist mathematische Modellierung? Diese Frage wird Semester um Semester an vielen Universitäten zu Beginn einer Vorlesung, die ‚Modellierung' im Titel trägt, rhetorisch gestellt. Dabei sind meist Dynamische Systeme zur Analyse realer zeitabhängiger Prozesse in den Naturwissenschaften und der Technik (aber nicht ausschließlich) Gegenstand der Untersuchung. In Wikipedia wird sich an einer allgemeinen Definition versucht, die nur den formalen Aspekt hervorhebt:

> Ein mathematisches Modell verwendet mathematische Notation zur Beschreibung eines Systems … und ermöglicht damit die systematische Erforschung des Themas mit mathematischen Methoden.

Der englische Wikipedia Eintrag zu ‚Mathematical model' warnt überdies den Leser:

> An artifact that is used to illustrate a mathematical idea may also be called a mathematical model, the usage of which is the reverse of the sense explained in this article.

Die Verkleidung einer mathematischen Idee bedeutet metaphorischen Gebrauch, der einer Modellbildung genau entgegengesetzt ist.

Damit stößt man auf einen fundamentalen Unterschied im Gebrauch von Modellen. Es gibt offenbar an den Fachhochschulen und Universitäten zwei Pole bezüglich der verschiedenen Grundauffassungen über Modellierung – man könnte salopp sagen, eine der Praktiker und eine der Nichtpraktiker: Die eine sieht in Modellierung die Präsentation und systematische Aufbereitung einer Fülle von erfolgreich bearbeiteten Fallbeispielen aus der Praxis ihrer mathematischen Spezialdisziplin(en), die andere sieht in ihr ein übergeordnetes Regelwerk („Modellierungskreislauf“) mit Gesetzmäßigkeiten, das universellen Charakter hat und sozusagen die Eintrittspforte der ‚Realität' in die Mathematik darstellt. Da gerade die reinen Theoretiker unter den Angewandten Mathematikern von ihrem eigenen Anspruch her doch Anwendungen suchen, besteht in der Lehre, aus schierem Mangel an wirklich ausgeführten Anwendungen, die Neigung, gängige Metaphern zu vorgedachter Mathematik als Realprobleme zu deuten und passende ‚Anwendungen' zu erfinden. Ein solchermaßen anwendungsorientiert verbrämter Ansatz läßt Realität mit Fiktion eins werden und ist von der realen Modellierung zu unterscheiden: Hier soll dafür der Kunstbegriff ‚*Modellisieren*' verwendet werden, der (außer singulären Fällen von Lehnübersetzung aus dem Französischen) noch unbelastet ist.

Verschmelzung von Modell mit Metapher

Metaphern haben stets eine Rolle in der Mathematik gespielt, sei es, um einen abstrakten Begriff durch eine konkrete Analogie leichter begreiflich zu machen oder um einen mathematischen Sachverhalt nachhaltig zu memorieren. Durch Wecken von nicht zufälligen Assoziationen wird eine bessere Vernetzung im Gedächtnis erzielt. Beim Denken suchen wir permanent in der Einbildungskraft nach begleitenden Bildern und haften an Bildern, auch wenn wir wissen, daß sie falsch und irreführend sind, wie es Brandt (2011, S. 190) formuliert. Bisweilen sind Metaphern dem wirklichen mathematischen Verständnis tatsächlich geradezu hinderlich, z. B. die „metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozeßes“ (Marx 2013).

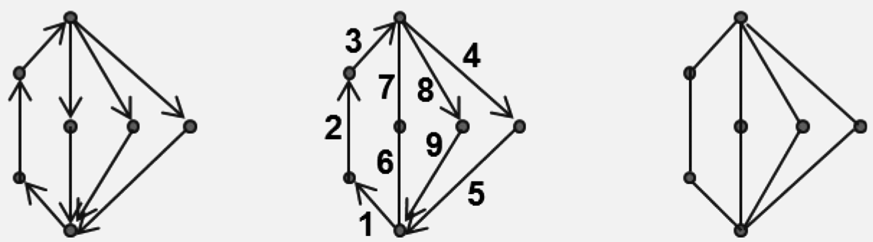
Metaphern werden aber auch bewußt eingesetzt, um eine scheinbar realitätsnahe Interpretationen zu suggerieren oder lediglich der unmißverständlichen Zitierung halber. Z. B. erfährt der kombinatorische Satz von Hall durch eine Metapher seine eindeutige Benennung, nämlich als *Heiratssatz*, der unter dieser Bezeichnung sogar einen Wikipedia Eintrag für sich reklamieren kann. Natürlich muß kein Heiratsvermittler diesen Satz kennen – es ist ja nur eine Metapher, die obendrein vom kulturellen Kontext abhängig ist und in polygamen Gesellschaften gewiß spontan anders verstanden würde.

> Die in der Bezeichnung Heiratssatz angedeutete Einkleidung dient also nicht der Auskunft über die Realität sondern über den Inhalt des Satzes. (Jahnke 2005)

Niemand käme auf die Idee, die Fragestellung des Heiratssatzes, unter welchen formalen Umständen man n Frauen mit n Männern (monogam) verheiraten kann, wenn allein potentielle gegenseitige Zuneigung (reduziert zu einer symmetrischen binären Relation) vorab bekannt und allein relevant sei, als ein reales Problem zu begreifen, das mit

Touren in gemischten Graphen

Ein *gemischter Graph* (engl.: ‚mixed graph') besteht aus einer (endlichen) Menge von sogenannten Knoten (alias Ecken) und einer Menge bestehend aus geordneten Knotenpaaren (*Pfeilen*) und ungeordneten Knotenpaaren (*Kanten*); dabei darf ein Pfeil (u, v) mit einer Kante $\{u, v\}$ koexistieren. Gibt es nur Pfeile, so heißt der Graph *gerichtet*, und gibt es nur Kanten, so spricht man von einem *ungerichteten* Graphen. Wollte man stattdessen auch mehrfache Pfeile bzw. Kanten für dasselbe Knotenpaar zulassen, dann hätte man es mit *Multigraphen* und einer etwas anderen Notation zu tun. Im Kontext dieses Artikels sollen Knotenpaare stets aus zwei verschiedenen Knoten bestehen. Somit sind in der Terminologie von Gritzmann (2013) unsere ‚gemischten Graphen' genau seine ‚schlingenfreien schlichten allgemeinen Graphen'.
Eine *Tour* ist eine zyklische Abfolge von Knoten und Pfeilen/Kanten, die zwischen Knoten und Pfeilen/Kanten hin und her wechselt und die Richtungsvorgaben entlang der Pfeile einhalten muß, wobei jeder beteiligte Pfeil (u, v) als Vorgänger seinen Anfangsknoten u und als Nachfolger v hat: $\ldots, u, (u, v), v, \ldots$. Im Falle einer Kante $\{w, x\}$ ist entweder $\ldots, w, \{w, x\}, x, \ldots$ oder $\ldots, x, \{w, x\}, w, \ldots$ in der Abfolge verlangt. Jede Tour ist durch die zyklische Abfolge ihrer Pfeile/Kanten eindeutig festgelegt. ‚Tour' bedarf immer einer Spezifizierung: Unter einer *TSP-Tour* (alias Hamiltonkreis) versteht man eine Tour, die jeden *Knoten* des Graphen genau einmal enthält. Hingegen ist eine *Eulertour* so definiert, daß jeder *Pfeil* und jede *Kante* genau einmal zu durchlaufen ist.
In keinem der drei Beispiele (a), (b), (c) gibt es eine TSP-Tour. Im Falle (a) gibt es auch keine Eulertour (weil die Pfeilrichtungen einzuhalten sind), aber in (b) (und erst recht in (c)) schon, da die beiden Kanten Nr. 6 und 7 in gewünschter Richtung durchlaufen werden können: Eine mögliche Abfolge der Pfeile/Kanten ist mit 1 bis 9 durchnumeriert.



(a) gerichtet (b) gemischt (c) ungerichtet

den Mitteln der Graphentheorie *modelliert* und *gelöst* wird. Wirklich niemand? Im fachdidaktischen Modellierungsbuch, das von Borromeo Ferri et al. (2013) herausgegeben wurde, wird unter Abschnitt 9.3.2 („Der Traummann") die Frage *modelliert* und schließlich mit digitalen Werkzeugen *gelöst*, wie viele Männer eine Frau als Heiratskandidaten ablehnen sollte, bevor sie das „Ja-Wort" gibt. Hier liegt entweder ein Scherz (als Humor in der Mathematik) oder eine Verwechslung einer lustigen Metapher mit einem Modell für ein reales Problem vor. Dazu kann man sich in dem zuletzt genannten Buch in Tabelle 1.2 über klassische Aufgabentypen vergewissern, daß schon „Sachaufgaben" als Kontext einen „echten Realitätsbezug" und als Ziel „Umwelterschließung mit Hilfe der Mathematik" haben sollen, wobei natürlich Modellierungsaufgaben „vollständig in die Kategorie der Sachprobleme fallen". Man kann dem Heiratssatz auch nicht als ‚Tanzkurssatz' wirkliches Leben einhauchen, indem man statt Massenhochzeit ein Paartanzvergnügen von n Frauen und n Männern auf gegenseitiger Sympathiebasis organisiert (Hußmann und Lutz-Westphal 2007, S.205). Eine Metapher bleibt eine Metapher.

Auch oder gerade in populären Darstellungen von Mathematik besteht bisweilen die Gefahr, daß sich in der Metapher vergriffen wird, insbesondere wenn es um Rundtouren geht. Der Begriff ‚Rundtour' ist mit über 470 000 Einträgen bei einer Google Suche wirklich populär. Der Nichtmathematiker denkt dabei etwa an einen Rundflug, eine Schiffsrundreise, eine Busrundfahrt oder eine Rundwanderung von Hütte zu Hütte. Der Mathematiker denkt sich auch Unterschiedliches dabei, aber doch etwas ganz Anderes, aller schönen Assoziationen befreit, und was genau, hängt von der Spezifizierung, also letztlich vom Zweck ab. Unter Nutzung graphentheoretischer Sprechweise meint man meist entweder eine Eulertour (hier wird dem großen Euler gehuldigt, auch wenn er in diesem Falle nur eine schlichte Unterhaltungsaufgabe gestellt und gelöst hatte), bzw. allgemeiner die Lösung des ‚Briefträgerproblems' alias ‚Chinesischen Postbotenproblems' (Vorsicht: Metapher!) oder andererseits eine TSP-Tour, wobei ‚TSP' für ‚Travelling Salesman Problem' steht. Auch hier hilft Wikipedia dem interessierten Laien mit jeweiligen Definitionen unter „Eulerkreisproblem" und „Briefträgerproblem" bzw. „Problem_des_Handlungsreisenden" ein wenig weiter. In der niederländischen Version wird auf den metaphorischen Charakter sogar explizit hingewiesen:

> Het Chinese postbodeprobleem is een veelgebruikte metafoor om een bekende probleemstelling in de grafentheorie duidelijk te maken.

Allerdings wird dem Nichtfachmann dabei nicht hinreichend klargemacht, daß nicht nur ungerichtete Graphen, sondern auch gerichtete oder gar gemischte Graphen (mit einem Mix von Kanten und Pfeilen; s. Box auf S. 7) als Modelle infragekommen, die meist relevanter für wirkliche Anwendungen sind.

Eventuell erinnert sich der ZEIT-Leser noch an die Frage 9 der „12 Großen Fragen" in der Online-Ausgabe vom 28. Dezember 2008: „Welches ist die kürzeste Route für die Müllabfuhr?" Gemeint war eigentlich eine Metapher für ein ***NP***-schweres Problem, um zum grundlegenden Problem '$P \neq NP$?' (s. Wikipedia) der theoretischen Informatik vorzudringen. Jedoch wurde vom Journalisten eine Metapher recycelt, die umgedeutet das Müllauto mit dem Handlungsreisenden und (zusammenstehende) Mülltonnen mit den Städten gleichsetzt. Das ist wirklich unglücklich, weil dadurch erstens die Problemgröße gewiß um mindestens eine Zehnerordnung steigt und zweitens ein grundsätzlich ***NP***-schweres Problem (das TSP) aufgerufen wird, während manche Varianten des Briefträgerproblems ***NP***-leicht sind.

Rekord für Rundtouren

Das Verbandeln von Modellierung und Metaphorik kennt man aus der Tages- und Wochenpresse, wenn über neueste Erfolge der mathematischen Forschung berichtet wird. Am 5. November 2014 war im Hamburger Abendblatt eine derartige Meldung zu finden unter dem Titel *„Forscher finden Algorithmus für Rundreisen"*. Der Artikel bemüht die Metapher von touristischen Rundreisen und berichtet, daß ein Verfahren entwickelt wurde,

> um sich der optimalen Route anzunähern – ohne unendlich lange rechnen zu müssen. Allerdings bedeute diese Vereinfachung bei der Rechnung einen Kompromiss bei der Reisedauer. Immerhin: Der Algorithmus ergibt eine Reiseroute, die maximal 1,4-mal so lang ist wie die optimale Strecke.

Nun, da es sich um ein endliches Problem handelt, muß niemand unendlich lange rechnen. Die wirklich gemeinten Anwendungen werden am Ende des Artikels im Konjunktiv genannt:

> Die Erkenntnisse ließen sich auch für die Logistikbranche nutzen und dafür, die optimale Reihenfolge von Arbeitsschritten herauszufinden.

Die dieser Meldung zugrundeliegende Pressemitteilung der Universität Bonn titelte sogar „Forscher der Universitäten Bonn und Grenoble liefern bestes Ergebnis für das Rundreiseproblem" und endete den enthusiastischen Bericht mit den Worten hinsichtlich des potentiellen Nutzens:

> Zum Beispiel bei Himmelsdurchmusterungen der Astronomen ist ebenfalls die kürzeste Route von Stern zu Stern gefragt.

Der kundige Mathematiker ahnt, daß hier wohl ein neuer Approximationsalgorithmus für das (geo-) metrische TSP mit Gütegarantiefaktor 7/5 gefunden wurde. Was er nicht ahnen kann, ist, daß in dem publizierten Fachartikel selbst (Sebő und Vygen 2014) nur das „graph-TSP" approximiert wurde, d. h. die behandelten Distanzmatrizen sind stets von ungewichteten (d. h. mit Kantenlängen 1 versehenen) zusammenhängenden ungerichteten Graphen abgeleitet. Natürlich ist das ein schönes und unerwartetes Resultat der algorithmischen Graphentheorie. Jedoch keine der genannten Anwendungen macht in diesem Szenario Sinn, weil die konkreten Anwendungen sich eben nicht durch Graphen mit Einheitskantenlängen sinnvoll modellieren lassen. Es wird auch von keiner einzigen Anwendung in dem Originalartikel berichtet. Die angeblichen Anwendungen sind nur mediengängige Metaphern, die die unmittelbare gesellschaftliche Relevanz beschwören und vortäuschen sollen. Daß für Forschungsergebnisse die Pressestellen von Universitäten große Worte finden, die nicht auf Tatsachen beruhen, ist kein Phänomen, welches auf die Mathematik beschränkt wäre (Sumner et al. 2014). Deutsche Akademien fordern in solchem Kontext:

> So soll u. a. die wissentliche, nicht durch Daten bzw. Evidenzen gedeckte Übertreibung von Forschungsergebnissen gegenüber den Medien (Hype) als Verstoß gegen gute wissenschaftliche Praxis gelten und entsprechend sanktioniert werden. (Leopoldina et al. 2014)

Approximationsalgorithmen (s. Wikipedia) dienen in aller Regel rein theoretischen Zwecken, um die ***NP***-Schwere in gewisser Weise unter dem Approximationsaspekt näher auszuloten. Für praktische Zwecke nutzt man andere, im Allgemeinen schnellere Heuristiken. Hinzu kommt, daß das (symmetrische) TSP-Problem selbst für Städtezahlen der Größenordnung 10^5 unter allerhöchstem Einsatz gute Chancen hat, beweisbar optimal gelöst zu werden (Cook 2013). Da muß erst einmal eine Heuristik in der Praxis mithalten können, also den Elchtest überstehen, ehe man einen Rekord feiern kann.

Müll und Briefe

> Dass Müll abholen und Post austragen auf die gleiche mathematische Modellierung führen kann, überrascht zunächst vielleicht, ist aber ein Beispiel für die Macht und Schönheit mathematischer Strukturierung und Generalisierung. (Lutz-Westphal 2005)

Diese so formulierte Meinung überrascht in der Tat den Laien wie den Mathematiker, da die städtische Briefzustellung eben nicht wie bei der Müllabfuhr mit einem großen Fahrzeug erfolgt, sondern zu Fuß und mit dem Fahrrad. Damit sind ganz andere Voraussetzungen, schon allein durch die StVO, gegeben, die auch höchst relevant für die Optimierung sein können: Das eine Problem könnte ***NP***-leicht und das andere ***NP***-schwer sein. Natürlich, ähnlich wie Hußmann und Lutz-Westphal (2007) dann später einräumen, wird auch von Ortlieb et al. (2013) explizit konzediert, daß es gewisse Unterschiede zwischen Müllabfuhr und Briefzustellung gibt:

> Während ein Müllfahrzeug in der Regel die Abfallbehälter beider Straßenseiten auf einmal einsammelt, wird der Postbote mit seinem Rad erst die eine Straßenseite beliefern und dann auf der anderen Seite in die entgegengesetzte Richtung fahren.

Aber stimmt das denn? Im Hamburger Univiertel („Grindel“, siehe Wikipedia) kann man den Müllwerkern und dem Briefzusteller bei der Arbeit zusehen, wenn man im Grindelhof im Freien seinen Kaffee trinkt – ja und mehr noch, man kann sie auch befragen. Also, ein Grindel-Briefzusteller fährt meist dort nicht sein Fahrrad (anders als sein Kollege mit einem E-Bike in einem benachbarten Zustellbezirk mit breiteren Fuß- und Fahrradwegen), sondern er schiebt es, so daß Einbahnstraßen für ihn kein Problem sind. Er sagt klipp und klar, daß er jede Straßenseite vollständig abläuft und nie zwischendurch wechselnd die Straße überquert, einfach aus Sicherheitsgründen. So ist ihm der Abgehplan vorgegeben, der natürlich noch weiteren Präferenzen bzgl. der Überquerungen von Straßen (vorzugsweise an Fußgängerampeln) genügen wird. Das relevante Grobmodell könnte somit zunächst ein ungerichteter Multigraph sein, wo Paare von Knoten (benachbarter Straßenkreuzungen bzw. -einmündungen) mit genau zwei Kanten (den Straßenseiten entsprechend) verbunden sind. Ein solcher Multigraph ist trivialerweise eulersch, d. h. er erlaubt eine Eulertour. Also liefert der Algorithmus von Hierholzer (s. Wikipedia) in Linearzeit sofort eine mögliche Briefzustellertour. Dies gilt auch für den Fall, daß die Grenze eines jeden innerstädtischen Zustellungsbezirks mittig durch die Grenzstraßen führt, die allein schon durch eine Subrundtour genau einmal durchgangen werden könnten.

Die Müllwerker im Grindel sagen ebenso, daß sie im Prinzip jede Straßenseite getrennt abarbeiten, es sei denn, es handelt sich um eine Einbahnstraße (wo die Fahrtrichtung keine Wahl läßt) oder um eine sehr schmale Wohnstraße, in der das Müllfahrzeug dem Gegenverkehr vollständig den Weg blockiert, so daß die Müllwerker bei ihrer Arbeit keiner unnötigen Gefährdung durch den entgegenkommenden Straßenverkehr ausgesetzt sind. Ergo ist das zu betrachtende Modell ein gemischter Graph, in dem de facto fast alle Verbindungen gerichtet sind, zumindest im Grindel. Da ist man also nah dran an dem Chinesischen Briefträgerproblem für gerichtete Graphen, welches als ein spezielles Minimumkostenflußproblem sich sogar konzeptionell einfacher lösen läßt als das entsprechende ungerichtete Problem (vgl. Reiss und Stroth 2011). Für die Müllabfuhr in anderen Orten oder auf dem platten Lande kann die Modellierung etwas anders ausfallen, zumal es da noch weitere Einschränkungen geben kann. Damit ist, sofern man sich auf den Müll wirklich einlassen will, schon eine gewisse Vorkenntnis über die verschiedenen Varianten des Chinesischen Briefträgerproblems (Edmonds und Johnson 1973; Eiselt et al. 1995a,b) und exakte Lösungsverfahren (Gritzmann 2013) bzw. heuristische Strategien vonnöten. Allein schon die effiziente Verifikation, daß ein vorgelegter gemischter Graph eulersch ist, bedarf der Lösung eines Maximalflußproblems (Ford und Fulkerson 1962; vgl. Gritzmann 2013).

Würde man das ***NP***-schwere Müllautoproblem als Chinesisches Briefträgerproblem in gemischten Graphen in das ***NP***-leichte ungerichtete Chinesische Briefträgerproblem mit Gewalt umwandeln, so müßte man bei anfänglicher Ignorierung der Pfeilrichtung im Nachhinein für die ausgegebene Eulertour in dem (durch Kantenverdopplung) eulerisierten ungerichteten Graphen jede geplante Durchfahrung als Geisterfahrer gegen die Pfeilrichtung statt der angegebenen Pfeillänge (zweimal) die Länge eines kürzesten gerichteten Weges in der umgekehrten Richtung einsetzen und dafür sorgen, daß der Pfeil in der gemäßen Richtung durchfahren wird. Das kann teuer kommen. Betrachten wir einmal für jedes $n > 2$ einen ungewichteten gerichteten Graphen G_n, der aus zwei gerichteten n-Kreisen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_0$ durch Identifikation des Pfeilpaares x_0x_1 und y_0y_1 entsteht, so daß der Graph G_n genau $2n-2$ Knoten und $2n-1$ Pfeile hat. Dieser Graph ist noch nicht eulersch, wird aber (auf eindeutige Weise) optimal eulerisiert durch Verdopplung des amalgamierten Pfeiles $x_0x_1 = y_0y_1$. Eine optimale gerichtete Briefträgertour ist daher gegeben durch $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0 = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_0 = x_0$ mit $2n$ Pfeilen. Wenn nun jedoch die ‚Vereinfachung' (die natürlich hier überhaupt keine ist), die Richtungen ignorierte und mit ungerichteten Graphen arbeitete, zum Ansatz käme, dann könnte der Hierholzer-Algorithmus auch die Eulertour $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0 = y_0, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0 = x_0$ ausgeben, in der die Hälfte der Pfeile geisterfahrerhaft in dem gerichteten Graphen passiert werden müßte. Die umgekehrt orientierte Tour hat ebenso n Geisterfahrerpfeile. Um die StVO zu respektieren, müßte zu jedem dieser widrigen Pfeildurchlaufungen ein kürzester zulässiger gerichteter Weg in umgekehrter Richtung, hier mit $n-1$ Pfeilen, vorgeschaltet werden, dann der Pfeil in der korrekten Richtung genommen und abschließend der zuvor genommene Weg wieder nachgeschaltet werden. So schnellt die Anzahl der zu durchlaufenden Pfeile in einer zulässigen reparierten Tour auf insgesamt $n + 2n(n-1) = 2n^2 - n$ hoch. Das bedeutet, daß diese unsinnige ‚Vereinfachung' nicht einmal einen Approximationsalgorithmus mit Gütegarantiefaktor liefert, es sei denn, man wolle die ungerichtete Lösung umfassender umbauen.

Grundsätzlich liefert eine optimale ungerichtete Chinesische Briefträgertour bei Ignorieren der Pfeilrichtungen in einem gerichteten Graphen nur eine untere Schranke für die Länge einer optimalen gerichteten Chinesischen Briefträgertour, die beliebig schlecht sein kann, wie die folgende Graphenserie zeigt. Der Graph H_k für ungerades k bestehe aus $2k+1$ Knoten und $3k$ Pfeilen, der aus Verkleben von k gerichteten Wegen der Länge 2 an ihren Anfangsknoten und ihren Endknoten entsteht, zu dem genau ein gerichteter Weg der Länge k umgekehrt mit seinem Endknoten an jenen der kurzen gerichteten Wege gemeinsamen Anfangsknoten und entsprechend mit seinem Anfangsknoten an jenen gemeinsamen Endknoten der kurzen gerichteten Wege geklebt wird. Für $k = 1$ entsteht so ein gerichtetes Dreieck und für $k = 3$ der gerichtete Graph, der in der Box in (a) gezeigt ist. Wenn man alle Pfeilrichtungen ignorierte, also den zugehörigen ungerichteten Graph betrachtete, dann wäre der Graph schon eulersch, also hätte die Eulertour die Länge $3k$. Der gerichtete Graph hingegen benötigt für seine Eulerisierung $k-1$ weitere Kopien des gerichteten Weges der Länge k. Die wahre optimale Länge einer gerichteten Chinesischen Briefträgertour ist also $k^2 + 2k$. Der Quotient $(k+2)/3$ der beiden Optimallängen (gerichtet versus ungerichtet) geht also mit k gegen unendlich. Man sollte also das Müllautoproblem grundsätzlich passend zur Realsituation modellieren.

Auch wenn alle Theorie als grau abgetan würde, so zeigt doch schon die Praxis in einem verkehrsberuhigten Viertel wie dem Grindel, daß die Modellierungsstrategie von Ortlieb et al. (2013) und Hußmann und Lutz-Westphal (2007) für die städtische Müllabfuhr nicht gut funktionieren kann. Angenommen, das Müllfahrzeug, nunmehr von der Hamburger Modellierung gesteuert, stünde am Grindelhof, Ecke Allende-Platz und wollte in die etwa 300 m lange Bornstraße einbiegen. Das geht aber nicht wegen eines Einfahrverbots (das übrigens nicht durch Google Maps abgebildet ist). Dann muß das Fahrzeug um den Kreisel wendend den Grindelhof stadtauswärts fahren und dann nacheinander die Straßen Hallerstraße, Beim Schlump, Bundesstraße, Rentzelstraße, Grindelallee und Heinrich-Barth-Straße passieren, bis es nach rund 2,7 km in die Bornstraße gelangt. Kürzer geht es nicht. Die vielen Einbahnstraßen und Abbiegeverbote machen eine vorgenommene Optimierung im ungerichteten Modellgraphen für die Realsituation völlig unbrauchbar.

Nun könnte man einwenden, der ‚Modellierer' und der Student wissen ja beide angesichts solcher ‚Modellierungsprobleme' in den genannten Büchern, daß alles nur Lug und Trug und mit einem Augenzwinkern zu nehmen ist – aber so lernte doch der Student inspiriert und bespaßt durch diese metaphorische Müllverkleidung etwas von der modernen angewandten Diskreten Mathematik quasi nebenbei. Aber das ist überhaupt nicht der Fall. Der Hierholzer-Algorithmus (alias Zwiebelschalen-Algorithmus) wird zwar im Modellierungsbuch von Ortlieb et al. (2013) beschrieben und mit Bildchen illustriert, aber der wirklich einfache Korrektheitsbeweis nicht geführt. Dann wird noch ein weiterer Algorithmus, Fleurys Algorithmus, beschrieben – warum, das wird nicht klar, da der Algorithmus von Fleury Quadratzeit benötigt, während der von Hierholzer in Linearzeit läuft. Der Schlüsselbegriff ‚Komplexität' von Algorithmen wird ohnehin in dem gesamten Modellierungsbuch nicht genannt. Für den nächsten Schritt wird der „Satz" unter optischer Hervorhebung erwähnt, daß die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in einem Graphen gerade ist, aber ohne den simplen kombinatorischen Beweis (mit doppeltem Abzählen), der doch nur ein, zwei Zeilen benötigte. Wie kürzeste Wege berechnet werden, wird nicht beschrieben. Wie man schließlich ein optimales perfektes Matching mit (kürzesten) Wegen für die Knoten ungeraden Grades findet, ist überhaupt nicht trivial und bleibt gänzlich unerwähnt. Alles bleibt nur rezepthaft. Modellierung genügt sich also anscheinend selbst und schert sich nicht um Begründungen – aber ohne Beweise gibt es keine Mathematik.

Um mit Thomas Jahnke zu sprechen, sollten Anwendungsaufgaben die Sache ernst nehmen, die Mathematik ernst nehmen und die Schüler ernst nehmen (vgl. Kirsch 1995). Nichts von dem ist mit dem Müllabfuhrkapitel aus dem Modellierungsbuch erfüllt.

> Eingekleidete Aufgaben benutzen die Welt, um Mathematik zu verstehen. Anwendungsaufgaben benutzen Mathematik, um die Welt zu verstehen. Beide Aufgabenausrichtungen sind sinnvoll, berechtigt und notwendig. Lustig, missverständlich und zuweilen schlimm wird es nur, wenn man die eine mit der anderen verwechselt. (Thomas Jahnke; s. http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/leute/jahnke.php)

Hier ist es schlimm.

Die Originalvorlage zu jenem Kapitel „Optimale Routenplanung bei der Müllabfuhr“ ist das ausführlichere Kapitel „Mathematik für die Müllabfuhr“ aus dem etwas früheren Buch „Kombinatorische Optimierung erleben“ (Hußmann und Lutz-Westphal 2007), das wohl die Berliner Müllabfuhr – metaphorisch gesehen – im Blick hatte. Obwohl kürzeste-Wege-Probleme und spezielle Flußprobleme dort etwas in Länge diskutiert werden, wird das viel aufwendigere gewichtete Matchingproblem in vollständigen Graphen, an dem man nicht vorbeikommt, gar nicht behandelt – weil das den Rahmen dieses Buch gesprengt hätte. Welchen Sinn macht es dann, ein in diesem Kontext zu schweres Problem anzureißen?

Nicht gesprengt hätte diesen Rahmen der abschließende einfache Korrektheitsbeweis für die vorgenommene hierarchische Vorgehensweise zur Lösung des ungerichteten Briefträgerproblems, bei der erst (1) die Distanzen zwischen den Knoten ungeraden Grades bestimmt (und zugehörige kürzeste Wege abgespeichert) werden, (2) das perfekte Matchingproblem in dem vollständigen Hilfsgraphen auf der Menge der Knoten ungeraden Grades bzgl. dieser Distanzen gelöst wird, die Matchingkanten dann durch kürzeste Wege realisiert werden, deren Kanten in dem ursprünglichen Graphen zu verdoppeln sind, und schließlich (3) mit der so vorgenommenen Eulerisierung eine Eulertour mit dem Hierholzer-Algorithmus konstruiert wird. Es ist nämlich *a priori* gar nicht klar, warum die hinzuzunehmenden Kopien von Kanten im Eulerisierungsschritt sich im Optimalfall in kantendisjunkte Wege zwischen Knoten ungeraden Grades gruppieren lassen. Unbewußt ablaufende Plausibilitätsüberlegungen reichen da nicht aus. Für den Beweis kann man die Kantengewichtsfunktion als lediglich nichtnegativ voraussetzen: Jeder Kreis von Kantenkopien für die Eulerisierung beeinflußt nicht die Gradparitäten und kann aus einer optimalen Lösung entfernt werden und hat somit notwendigerweise Gewicht gleich Null. Die restlichen Kantenkopien bilden einen Wald, dessen Zusammenhangskomponenten also Bäume sind. Jeder Baum mit $2k > 0$ Knoten ungeraden Grades, der noch nicht ein Weg ist, kann sukzessive in k *disjunkte* Wege zwischen Knoten ungeraden Grades zerlegt werden, allerdings nicht greedy, sondern peripher etwa mittels einer Extremalwahl: Im rekursiven Schritt sucht man von einem festen Endknoten (Wurzel) aus einen letzten Verzweigungsknoten. Von diesem Knoten aus gibt es von der Wurzel weggerichtet zwei Teilwege, die zusammengesetzt einen gewünschten Weg ergeben, dessen Kanten entfernt werden können, so daß ein Baum mit $2(k-1)$ Knoten ungeraden Grades zurückbleibt, in dem die Gradparitäten immer noch die gleichen sind. Ein solches Finale hätte sich doch der mathematisch interessierte Leser sicher gewünscht, wenn schon das Schwierige einfach beiseite gelassen wurde, um das Lesen zu vereinfachen.

Vereinfachen

Eines der Postulate des Modellierens ist das Vereinfachen. Ein aus der Praxis stammendes Optimierungsproblem kann jedoch nicht nach Gusto und Vermögen des Modellierers vereinfacht werden, ohne daß hinreichende quantitative Argumente ins Feld geführt werden, d. h. daß die Mißachtung gewisser Vorgaben fast gar nicht (jedenfalls in meßbarer und abschätzbarer Weise) die Qualität der Lösung beeinträchtigen kann. Wenn allerdings ein ***NP***-schweres Problem durch den Modellierer flugs in ein ***NP***-leichtes Problem umgewandelt würde, so wäre das keine Vereinfachung sondern Hokuspokus, das den Leser und Lernenden um das wirkliche Bemühen bringt, einer praktischen (Näherungs-)Lösung der schwierigen Aufgabe näher zu kommen. Schon Kirsch (1977) hat das „intellektuell ehrliche“ Vereinfachen eingefordert.

Auch die Südtiroler Hubschrauberaufgabe zur Rettung verletzter Skifahrer aus den beiden schon erwähnten Modellierungsbüchern wurde grob (und unehrlich) vereinfacht und zwar in der Weise, daß die schneebedeckten Berge vom Modellierer platt geklopft wurden, so daß man sich eigentlich in der norddeutschen Tiefebene wähnen könnte, wo man zwar besser mit dem Hubschrauber herumfliegen, allerdings nicht so gut Skifahren kann. Die Distanzen werden euklidisch berechnet, und es wird nicht einmal der Versuch unternommen, wahre Hinflugzeiten (bei nötigem Umfliegen von Bergketten und Aufsteigen zum Unfallort) mit den Distanzen zu vergleichen. Eine euklidische Lösung müßte zumindest heuristisch nachgebessert werden. Der Grund für die Abkehr von den wirklichen und praktischen Erfordernissen ist naheliegend: Es lag und liegt überhaupt kein real gestelltes Problem vor, wo man durch Nachfragen die fehlenden Informationen hätten einholen können; dies ist umso befremdlicher als das Buch von Ortlieb et al. (2013) „Fallstudien“ verspricht. Stattdessen hatte man sich im Internet inspirieren lassen und die 109 Positionsdaten aus einem Projekt der Technischen Universität Kaiserslautern gefischt (vgl. Schwarze und Horn 2004), das ihre Wurzeln hatte in einer Kooperation mit dem Deutschen Schulamt, Schule Südtirol: Im Jahre 1998 hatten die dortigen 3. Modellierungswochen u. a. „Optimale Stationierung von Hubschraubern der Landesflugrettung“ zum Thema (Herbst 2005).

Die Rettungshubschrauber fungieren nur als scheinbar hübsche Metapher für den Bezug auf euklidische Distanzen, denn es handelt sich um eine ganz gewöhnliche Aufgabe der Angewandten Mathematik (aus dem Gebiet der optimalen Standortwahlen des Operations Research), die nur *posthoc* winterlich eingekleidet wurde. Für die Hubschrauberaufgabe ist umgekehrt das simple Entkleiden der einzig nötige Schritt, um zur Mathematik zu gelangen. Das IQB (Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen; http://de.wikipedia.org/wiki/Bildungsstandards) würde bei solchen Aufgaben konstatieren:

> Zu ihrer Bearbeitung ist es meistens ausreichend, den der Einkleidung zugrunde gelegten Algorithmus freizulegen und abzuarbeiten.

Laut IQB reicht das aus zur Aberkennung des Status ‚Modellierungsaufgabe‘.

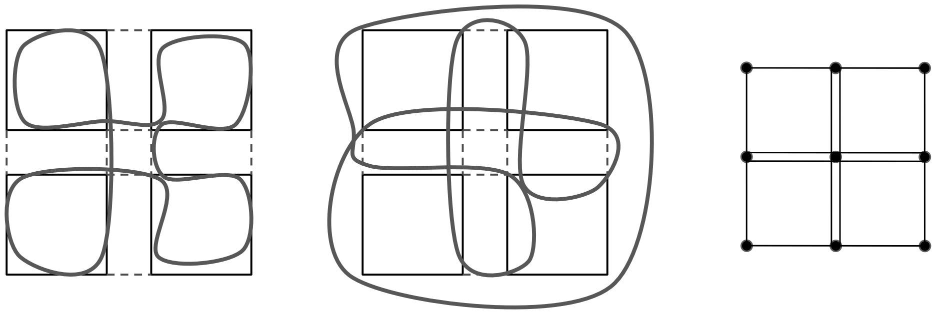
Beim Lösen von realen Problemen ist eine gewisse Form der Vereinfachung sicher legitim und manchmal unabdingbar –

> dies soll jedoch nicht als Freibrief für beliebige Vereinfachungen und Trivialisierungen aufgefaßt werden. (Humenberger und Reichel 1995)

Welche Vereinfachungen angemessen sind, kann nur anhand der wirklichen Problemstellung und den Methoden der Teilgebiete der Mathematik, die dabei zum Tragen kämen, entschieden werden. Im Falle der Optimierung kann das durchaus eine schmale Gratwanderung zwischen Trivialisierung und Machbarkeit sein, die gute Methodenkenntnisse voraussetzt und somit *ad hoc* von einem Lernenden und Fachfremden gar nicht erfolgreich durchgeführt werden kann.

Bei näherer Betrachtung und genauerem Hinhören, was von den betroffenen Briefzustellern erzählt wird, ist auch das Problem des Grindel-Briefzustellers mit dem obigen Grobmodell zu leicht abgetan. Die vorschnelle Umwandlung in den längenbewerteten ungerichteten Graphen ignoriert den Sicherheitsaspekt und die Wartezeit beim Überqueren von Straßen. Benutzung von Fußgängerampeln ist in Hinblick auf eine Unfallvermeidung priorisiert, aber es werden nicht beliebige Umwege akzeptiert. Mittlere Wartezeit kann man umrechnen in die Weglänge, die unterdessen gehend und schiebend zurückgelegt würde. Sicherheit kostet Zeit, und wieviel Zeit gerade noch geopfert werden soll, um etwa zur nächsten Ampel zu gelangen, kann durch einen Weglängenmalus für jede potentielle Risikoquerung einer Straße hinzugerechnet werden. Ein adäquates ungerichtetes Graphenmodell sollte also zumindest zwei Sorten von längengewichteten Kanten haben: einerseits die abzulaufenden Straßenseiten zwischen Einmündungen/Kreuzungen als Knotenpunkten und andererseits die möglichen Querungen zwischen zwei solchen Knotenpunkten (und eventuell weiteren Punkten), deren Gesamtgewicht sich aus Straßenbreite, umgerechneter mittlerer Wartezeit und Sicherheitsmalus zusammensetzt. In Abbildung 1 ist eine Micky-Maus-Version des Grindelzustellungsbezirks mit lediglich vier Straßenblöcken (Achtung: starke Vereinfachung!) zu Demonstrationszwecken gezeigt: Die normalen Straßenseiten sind durchgehend und die potentiellen Überwege gestrichelt gezeichnet (Abb. 1a, b). Alle Kanten haben in der Modellierung ihr eigenes Gewicht (als Länge skaliert, in der Abbildung nicht wiedergegeben). Nunmehr müssen nur alle durchgehenden Kantenstücke mindestens einmal durchlaufen werden. Die verschiedenen Eulertouren in dem Grobmodell (Abb. 1c) unterscheiden nicht die Anzahl (bzw. Gewichte) der tatsächlichen Querungen.

Die detailliertere Problemformulierung macht nun die Bestimmung einer optimalen Briefzustellertour zu einem „rural Chinese Postman Problem“ (Eiselt et al. 1995b), mitten in der Großstadt! Dieses Problem ist im Allgemeinen offensichtlich ***NP***-schwer, denn man kann das schon erwähnte



(a) (b) (c)

Abbildung 1. Zwei Miniatur-Briefzustellertouren mit (a) 4 bzw. (b) 12 Straßenquerungen, die als zwei gleich lange Eulertouren im zugehörigen Eulergraphen (c) gelten. Längengewichte sind nicht angezeigt.

'graph-TSP' auf einem (ungewichteten und ungerichteten) Graphen G mit n Knoten polynomial auf dieses zurückführen, indem man jedem Knoten (Stadt) für das TSP seinen zusätzlichen Knoten (Vorort) mit einer Endkante (Sackgasse) verbindet, die wenigstens einmal zu durchlaufen ist, während alle anderen Kanten des ursprünglichen Graphen G nur der möglichen Verbindung der Paare Stadt/Vorort durch eine kürzeste Rundtour fungieren: In G gibt es genau dann einen Hamiltonkreis, d.h. eine TSP-Tour der Länge n, wenn es in dem erweiterten Graphen eine rural Chinese Postman Tour der Länge $3n$ gibt.

Die metaphorische Verführung durch Graphen

> Die Arbeit mit Graphen eröffnet die Möglichkeit, unbefangen und spielerisch mathematisch zu forschen und dabei abseits vom ansonsten eher kalkülorientierten Mathematikunterricht mathematische Erfolgserlebnisse zu haben. (Lutz-Westphal 2005)

Natürlich kann der Schüler mit etwas Alltagsschläue, Herumspielen und dem festen Glauben an den Dreisatz sich heuristische Strategien überlegen – nur wird er konfrontiert mit dem Briefträgerproblem für ungerichtete Graphen kaum die Lösung von Edmonds (1965) selbst wiederentdecken und beweisen können. Und natürlich sollte dabei ein Kalkül für Matchingalgorithmen aufgebaut werden. Und natürlich sollte zuvor die algorithmische Behandlung kürzester-Wege-Probleme vollzogen sein. Und natürlich sollte schon zu Beginn klar sein, was hier überhaupt Lösen bedeutet, was unter Komplexität von Algorithmen zu verstehen ist. Es gibt keine Abkürzung zur Erkenntnis, die man frei von jeglicher Kenntnis und jeglichem Ballast, in fröhlichem Dilettieren beschreiten könnte. Wer kalkülfeindlich ist, hat offenbar eine falsche Vorstellung von Kalkülen und kann keine Mathematik betreiben und so auch keine wirklichen Probleme, die mathematischer Hilfsmittel bedürfen, lösen. Ein Hamburger Schulbuch („Lernumgebungen Mathematik“) für die 9. Klasse macht bitter ernst mit jenem didaktischen Ansatz und stellt das Problem des Zeitungsausträger (für ein kostenloses Wochenblatt) vor. In einer Fußnote wird da das Stichwort „kürzeste Wege“ genannt. Nun – wenn der Schulbub, der sich als Zeitungsausträger etwas Geld verdienen will, aus Sicherheitsgründen die Straßen abgeht wie der Grindel-Briefzusteller, so zerfällt das Problem in das Finden einer Eulertour (in einem eulerschen ungerichteten Multigraphen) und der Suche nach kürzesten Wegen von der Wohnung des Buben hin zum Zeitungsdepot und weiter zum Austragungsbezirk und von demselben Einstiegspunkt der Zustellungstour zurück zur Wohnung. Aber wo bleibt da in dieser Umgebung die stoffliche Vorbereitung, nämlich die Erstellung kürzester-Wege-Algorithmen?

Die Verführung durch Graphen besteht auch in dem Sinne, daß man allzu leicht verkennt, daß die graphentheoretische Sprechweise gar nicht notwendig ist, um etwa das Problem des Grindelbriefzustellers (unter Ignorierungen der Straßenquerungen) zu lösen – schließlich hat auch Euler nicht Graphentheorie als solche betrieben. Da wird die graphentheoretische Sprechweise als der entscheidende Schritt der 'Modellierung' angesehen, obwohl jemand, der nichts von dem kennt, was sich heutzutage alles unter dem Sammelsurium 'Graphentheorie' verbirgt, gar keinen Gewinn in der bloßen Umetikettierung sehen kann. Es lenkt den Blick von den zielführenden Argumenten und Konstruktionen eher ab, indem man fälschlicherweise meint, die Reduzierung auf Punkte und Striche in der Anschauungsebene führten schon an sich zur Lösung. Wenn man willens ist, ein Straßennetz in einen Graphen umzuwandeln, dann ist es ziemlich egal, ob danach ein kürzestes-Wege-Problem ansteht oder ein Briefträgerproblem zu lösen ist. Das Abkoppeln der Lösungsmethoden von dem anfänglichen banalen Modellierungsschritt ignoriert, daß in manchen Fällen z. B. erst mit der ganzzahlig-linearen Beschreibung die wirkliche Modellierung und mathematische Arbeit beginnt. Da hat der *Modellisierer* aber schon längst das Interesse verloren, weil hier die technische Methodenkenntnis einsetzt, für die er sich dann nicht mehr zuständig hält – er will ja nur kalkülfrei ‚modellieren'.

Ein Schüler oder Student kann nicht „unbefangen mathematisch forschen", wenn ihm keine mathematischen Werkzeuge in die Hand gegeben wurden, die schon durch wiederkehrende Übung vertraut und verinnerlicht sind. Es sollte eigentlich eine Selbstverständlichkeit sein, daß Mathematik im Schulunterricht systematisch aufgebaut wird, so daß sich die mathematische Werkzeugkiste langsam füllt. Tut sie aber nicht mehr, wie Wittmann (2014) deutlich macht. Schon Lehramtsstudenten (und andere) unterliegen oft der Illusion, daß Graphen etwas unmittelbar Anschauliches und somit Einfaches darstellen. Selbst Argumente und Beweise, durch ein paar Striche und Punkte illustriert, bedürfen nur scheinbar nichts Anderes als des reinen Hinschauens. Da wird leicht die metaphorische Repräsentation verwechselt mit dem kombinatorischen Satz und seinem Beweis. Selbst das kürzeste-Wege-Problem für Graphen mit nichtnegativ gewichteten Kanten bzw. Pfeilen stellt eine Herausforderung für den Unterricht dar, auch für Lehramtsstudenten an der Universität: Daß überhaupt der Dijkstra-Algorithmus eines Korrektheitsbeweises bedarf, wird gerne mit dem Argument „das sieht man doch" abgewehrt, weil die unmittelbare Anschauung überhaupt keine Probleme sieht, wenn zuvor nur die Plausibilität des Algorithmus an Beispielen vorgeführt wurde. Zu leicht interferiert die ebene geometrische Anschauung mit dem eigentlichen kombinatorischen Inhalt. So wird beispielsweise der Korrektheitsbeweis des Dijkstra-Algorithmus bei Hußmann und Lutz-Westphal (2007) de facto nur für positive Kantengewichte geführt, obgleich für nichtnegative Gewichte behauptet. Dieser unzureichende ‚Beweis' wurde übrigens (ohne Zitierung) von Reiss und Stroth (2011) in ihrem Buch für Lehramtsstudenten übernommen.

Modellisieren

Mathematische Modellbildung (alias mathematischer Modellbau oder mathematische Modellierung) ist schon immer Teil mathematischer Tätigkeit gewesen bei der praktischen Lösung von Aufgaben, von Archimedes über Euler und Gauß bis in die heutige Zeit – damals und vor wenigen Jahrzehnten allerdings noch in selbstverständlicher Weise und ohne großes Aufheben. Die Ziele können dabei ganz unterschiedlich sein, z. B. hieß es im Falle Dynamischer Systeme weiland: „*Ein Ziel des Modellbaus ist, die Organisation eines Systems zu simulieren und sie damit zu verstehen*" (Ebenhöh 1975). Verstehen der Phänomene war also hier gefragt. Das ist durchaus etwas Anderes als eine Modellbildung auf dem Gebiet der Optimierung, um rein technisch eine (fast) optimale Lösung innerhalb akzeptabler Computerzeit zu erreichen. Das Verstehen betrifft hier den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und bedarf einiger spezifischer inhaltlicher Vorbereitungen:

> Um verständlich zu machen, warum einige Modellformulierungen gutartiges, andere ein klägliches Laufzeitverhalten haben, werden in angemessenem Umfang Algorithmen zur gemischt-ganzzahligen, linearen und nichtlinearen sowie globalen Optimierung methodisch behandelt,

wie Kallrath (2013) in seinem Buch zu Fallstudien hervorhebt. Der Modellzweck ist für die Vorgehensweise entscheidend. Mathematische Modellbildung sollte nicht als ein eigenes Gebiet der Angewandten Mathematik angesehen werden, sondern als ein technisch-konzeptioneller Zwischenschritt in der Behandlung eines Problems aus der Wirklichkeit, der unter Umständen erst nach einer interdisziplinären Phase der Zusammenarbeit von Theoretikern und Praktikern erfolgt und sich schließlich auf ein bestimmtes Methodenarsenal (*vulgo* Werkzeugkiste) bezieht. Das zur Verfügung stehende Arsenal als kollektives Fachwissen ist dann geeignet einzusetzen, anzupassen und gegebenenfalls zu erweitern.

Ganz im Gegensatz zu diesem Konzept mathematischer Modellbildungen steht das universelle und verabsolutierte Konzept des Modellierens, welches mit dem Buch von Ortlieb et al. (2013) propagiert wird, das von den konkreten Erfordernissen der involvierten mathematischen Teilgebiete völlig abstrahiert (obgleich Dynamische Systeme dabei Gevatter stehen; vgl. Jetschke 1989, Anhang A.1). Da können letztlich nur Plattheiten allgemeiner Natur, eventuell philosophisch verbrämt, übrigbleiben. Die Loslösung von den Inhalten führt zwangsläufig zur Schematisierung und formalen Abarbeitung des gedachten Modellierungskreislaufes, der in seiner einfachsten kolportierten Form vierschrittig ist, mit ‚Modellbildung – Analyse & Simulation – Interpretation – Überprüfung' als die benannten Tätigkeiten. In Wirklichkeit käme es jedoch auf das Verstehen und Behandeln der konkreten Problemstellung an – das Schema als solches benennt eher Selbstverständlichkeiten, selbst, wenn ein reales und nicht nur ein metaphorisch formuliertes Problem am Anfang steht. Mit einem solchen Schema ist der Weg zur Kompetenzorientierung geebnet, in dem Glauben, es gäbe so etwas wie eine abstrakte und übertragbare „Problemlösekompetenz“ und „Modellierungskompetenz“. Auch mit Blick auf das dazu korrespondierende kompetenzorientierte Buch von Borromeo Ferri et al. (2013) wird hier Modellierung überdidaktisiert zu einem fast selbstreferentiellen System, das nicht davor zurückschreckt, die gedachten Schritte des Modellierungskreislaufes in „Teilkompetenzen“ umzubenennen (s. auch Greefrath 2010, Tabelle 3.1).

Zur besseren Unterscheidbarkeit möchte ich für vorgeschobene ‚Modellierung‘ solcher Art einen anderen Begriff verwenden, nämlich *Modellisieren* (= *Modellieren* + *Didaktisieren*). Beim Modellisieren zum alleinigen Zwecke des Unterrichtens an Hochschule oder Schule ist es im Gegensatz zur Modellbildung irrelevant, ob die gegebene Fragestellung real oder erdacht ist. Selbst bei realen Fragen kommt es nicht mehr darauf an, die Teile einer Theorie zu verstehen, die bei einer mathematischen Lösung letztlich zum Einsatz kommen, sondern nur darauf, Detailfragen an der Oberfläche zu diskutieren und dabei die Hauptkomponenten des gesamten mathematischen Modellbildungsprozeßes beweislos vorwegzunehmen oder teilweise schlicht zu ignorieren. Das Ziel ist also, nicht mehr ein wirkliches Problem zu verstehen und zu lösen, sondern nur einen *didaktischen Stellvertreter* nach gewissen formalen Regeln abzuarbeiten – wie man mit Gruschka (2011) formulieren könnte – in der Illusion, man würde dabei lernen, wie man praktische Probleme mit Hilfe der Mathematik löste.

Scheinmodellieren

Die Schule geht noch einen Schritt weiter, indem dort in der Regel sowieso keine komplexe Modellierung, noch nicht einmal Modellisierung im Hochschulsinne durchgeführt werden kann (außer bei fachübergreifenden Projektthemen), sondern nur Häppchen davon als sogenannte „Modellierungsaufgaben“. Diese sind jedoch oft keiner Modelli(si)erung entnommen, sondern sind ganz gewöhnliche, oft mehrfach unterteilte Aufgaben, die an den Haaren herbeigezogen in ein alltagssprachliches Gewand gehüllt wurden (Bandelt und Weidl 2015). Diese Künstlichkeit sieht man solchen Aufgaben, insbesondere den Zentralabituraufgaben unmittelbar an (Jahnke et al. 2014). Im Unterschied zu einer üblichen eingekleideten Aufgabe, die als solide Alltagsfragestellung durchgehen könnte, fällt die kohärente Einkleidung der Teilaufgaben einer sogenannten Modellierungsaufgabe insgesamt oft recht barock aus, so daß man schon von karnevalistischer Verkleidung oder *Kostümierung* sprechen kann. Das *Entkostümieren* wird dann als anspruchsvolle ‚Modellierung‘ deklariert und von Aufgabenstellern über Fachdidaktikern bis Schulsenatoren als ernsthafte mathematische Tätigkeit angesehen. Manchmal fällt die Kostümierung einer solchen Aufgabe aber auch so mager aus, daß – um in der Karnevalsmetapher zu bleiben – nur eine Narrenkappe auf- bzw. abgesetzt werden muß. Z. B. in Abschnitt 9.3.4 („Die Abwasserleitung“) des Buches von Borromeo Ferri et al. (2013) muß man lediglich für „Orte“ ‚Punkte‘ und für „Leitung“ ‚Strecke‘ sagen (und ein wenig präziser formulieren), und die (wohlbekannte) rein mathematische Aufgabe steht da. Es geht sogar noch schlichter, sozusagen mit einer Pappnase als einziges Utensil der Kostümierung, etwa im Falle der Aufgabe *2.2.3 „Apfelkauf (Anforderungsbereich I)“*, gemäß Auszug aus den Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009 des IQB:

> 4 kg Äpfel kosten 9,60 €. Berechne wieviel 6 kg von derselben Sorte kosten.

Dazu schreibt das IQB:

> Dies ist eine – empirisch – sehr einfache Modellierungsaufgabe, die gleichsam bei ihrer Bearbeitung das Durchlaufen der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs erfordert.

Da muß gleichsam Adam Ries ein Pionier des Modellierungskreislaufens gewesen sein, obwohl er das mit dem Apfelkauf in weit weniger als sieben Schritten geschafft hätte. Sein weiland populäres „Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Hanthierung“ könnte dann eine Lektüre für fächerübergreifenden problemorientierten Unterricht in Mathematik, Deutsch und evtl. Latein abgeben, z. B. die *Regula Detri* behandelnd (Ries 1574, S.16–21).

MAU an der Schule

Wenn Mathematik sich ausschließlich in der Öffentlichkeit und im Unterricht hinter Alltags- und Umweltproblemen verschanzen muß, um wahr- und aufgenommen zu werden, dann verliert die Mathematik schleichend ihre Eigenständigkeit als Unterrichtsfach. Dann könnte etwa die Schulmathematik eines Tages in einen Verbund MAU (Modellierung – Alltag – Umwelt) aufgehen (bzw. untergehen), was sich perfekt gesellen würde zu den schon real existierenden Verbünden NWA (Naturwissenschaftliches Arbeiten) und EWG (Erdkunde – Wirtschaft – Gesellschaft) im neuen baden-württembergischen Bildungsplan für die Gemeinschaftsschule. Andere Bundesländer sind auch schon auf diesen Verbundzug „der neuen Disziplinlosigkeit“ (Liessmann, 2014, Kap. 4) aufgesprungen. In letzter Konsequenz braucht man dann keine Mathematiklehrer mehr, sondern nur noch solche, die didaktisch instruiert als Lernbegleiter schülerorientiert MAU unterweisen können.

Problemorientierung, Realitätsbezug, Realitätsnähe und Authentizität sind die Worthülsen, die das Lehren von Mathematik mit erdachten Aufgaben in fiktiven Lernumgebungen begleiten. Es verschmilzt Realität mit Fiktion. Für die Kennzeichnung der echten Probleme der echten Wirklichkeit, aus denen die Mathematik auch, aber nicht nur, schöpft, fehlen dann die Worte, so daß sie in dieser Umgebung mehr als real, geradezu surreal wirken müssen. ‚Modellierung' ist heutzutage, metaphorisch gesprochen, wie ein Weißer Zwerg, der in seinem vorläufigen Endstadium alles an Aufgaben und Problemen, was es in seinem Einzugsfeld gibt, akkretiert, von der Regula de tri des Apfelkaufs auf dem Markt bis hin zur Frage, wie ein Stern Materie im interstellaren Medium akkretiert (Hoffmann und Witterstein 2013, Kap. 6.3).

Es ist bezeichnend, daß Beweisen und Verstehen bei dem Problemkreis „Optimierungsprobleme" in der Sekundarstufe II nicht als explizite Ziele des Mathematikunterrichts genannt werden, sondern nur „heuristisches und algorithmisches Arbeiten" (Leneke 2011). Der Unterschied zwischen „Algorithmus" und „Heuristik" wird dabei verwischt. Hier wird also nicht nur die Mathematik ausgeklammert, sondern auch noch das nötige Grundwissen hinsichtlich Algorithmen und Datenstrukturen der Informatik banalisiert. Es fehlt der systematische stoffliche Aufbau, der fächerübergreifend natürlich schon viel früher hätte Grundlagen legen müssen anhand Themen der Arithmetik, wie etwa schriftlicher Rechenverfahren, des euklidischen Algorithmus, Horner-Schemas mit all ihren historischen Bezügen. Im Allgemein(un)wissen *„wird der Algorithmusbegriff noch sehr stark mit dem des Rechenvorgangs identifiziert"* (Ziegenbalg et al. 2010). Das spiegelt sich auch in den zu nationalen und internationalen Testzwecken verordneten Bildungsstandards für den Schulunterricht wider, bei denen das Thema „Algorithmus" unverständlicherweise unter der „Leitidee Zahl" zwecks Klassifikation abgelegt wird. Stattdessen sind die Merkmale ‚Effektivität' (Endlichkeit, Korrektheit) und ‚Effizienz' (hinsichtlich Speicherplatz und Laufzeit) fundamental für Algorithmen.

Zentralabituraufgaben der Schule – als extremer Reflex des herrschenden Modellierungsdogmas – dokumentieren den Kostümzwang, bei dem eher die Kostüme denn die dahinterstehenden einfachen mathematischen Aufgabentypen jährlich auswechselt werden (Jahnke et al. 2014). Immer wieder werden bei technischen (Schein-) Anwendungen die physikalischen Notwendigkeiten gar nicht adäquat berücksichtigt (Baumann 2011, 2014; Walser 2011). Für das „teaching to the test" muß der Schüler nur darauf vorbereitet werden, daß er sich nicht darin verliert, die eigentlich nötige Physik, Biologie etc. dabei zu durchdenken und begreifen (weil es ja gar nicht darum geht), und geschult werden, sich in die Phantasievorstellungen der Lehrkräfte, die solche Aufgaben willens sind zu entwerfen, einzufühlen, damit die rein schematische Entkostümierung schnell und unproblematisch gelingt. Das hat mit Mathematik nichts zu tun. Der Rest geht dann meist nach einübbarem Schema, rezepthaft halt.

Wirkliche mathematische Modellierung jenseits einfacher Sachaufgaben wäre vom Schwierigkeitsgrad her ohnehin für eine Abiturprüfung unangemessen. Solche Realprobleme sind in der Regel komplex und schwierig und würden nur unwirklich werden durch eine zu Prüfungszwecken vorgenommene Trivialisierung. Dennoch könnte im Unterricht sehr wohl bei ausgewählten Themen mathematische Modellierung, etwa bei Behandlung einfacher physikalischer Probleme, zum Tragen kommen, die dann vertieft wird (Bender 2007). Jedoch gerade die vordergründig nutzen- und kompetenzorientierte Ausrichtung der Schulmathematik des letzten Jahrzehnts hat solchen Ansätzen faktisch die fachliche Grundlage entzogen (Wittmann 2014).

MAU an der Universität

Was sich an den Hochschulen, gerade in der Lehrerausbildung, unter „Einführung in die (mathematische) Modellierung" verbirgt, kann im Extremfall plumpes Modellisieren sein, bei dem eine bekannte Metapher für eine wohlbekannte mathematische Problemstellung – entweder so wie sie ist oder neu eingekleidet – als Problem aus dem Alltag oder der Umwelt vorgestellt wird. Dabei kommt durchaus das Mittel der Täuschung in Hinblick auf „Fallstudien" zum Einsatz, indem eine reale Information (*„Im Jahr 2005 wurden in Hamburg 753 990 t Müll aus privaten Haushalten und Geschäften durch die Stadtreinigung Hamburg entsorgt"*) vorweggeschickt wird, die nur der Einstimmung und Ausschmückung dient und letztlich völlig irrelevant ist. Im Falle der Hubschrauberaufgabe desselben Buches (Ortlieb et al. 2013) werden zwar nachvollziehbare geographische Positionsdaten (Tabellen 8.1 und 8.2) präsentiert, die dem Leser vorgaukeln, daß ihm alle nötige Information zur Verfügung stünde. Hier würde eine wirklich interdisziplinäre Aufgabe, die die Zusammenarbeit von Hubschrauberpiloten, Ärzten, Polizei, Krankenhausbetreibern und anderen erforderte, unbotmäßig abgekürzt – wenn sie denn in der Praxis überhaupt in dieser Weise so gestellt würde.

Das ‚Modellieren', wie es in den beiden Springer Spektrum Bänden ex catedra gepredigt wird, läßt einen redlichen Realitätsbezug vermissen. Obendrein widerspricht die Praxis einiger der aufgeführten Fallbeispiele bzw. Aufgaben eklatant den angeblichen theoretischen Anforderungen an Modellierung – in ein und demselben Buche. Die traditionellen Lernschwierigkeiten, was Mathematik betrifft, werden nicht dadurch eliminiert, daß man die Mathematik faktisch entsorgt und durch Kompetenzsurrogate im simulierten Modellkreislaufen ersetzt und dabei so auf das mühevolle Verstehen und Beweisen fast völlig verzichtet. Diese Welt ist weder die der wirklichen Modellierung noch der Mathematik schlechthin, sondern nur eine Scheinwelt, die sich reißerisch interessanter (und meist viel zu schwerer) Probleme oberflächlich bedient, die sie gar nicht wirklich lösen will und kann.

Modellisieren hat nicht das Ziel, Mathematik zweckorientiert systematisch zu entwickeln, sondern aus der Vielfalt von Fragestellungen einige scheinbar ansprechende Probleme knapp zu umreißen und höchstens ein paar elementare Mathematikschritte auszuführen. Alles soll interessant und nichts beschwerlich sein und doch das gute Gefühl hinterlassen, daß man sich mit der wirklichen Realität, ganz konkret und nicht abstrakt, auseinandergesetzt hat, auch wenn alles in Wirklichkeit nur reine Fiktion bleibt. Für die fehlende Mathematik wird Ersatz geschaffen, indem man das Modellisieren theoretisch und didaktisch dadurch überhöht, daß man scheinbare Gesetzmäßigkeiten der Bearbeitung postuliert und Kompetenzerwerb als Gewinn in Aussicht stellt.

Ein legitimes Ziel an der Universität wäre hier, statt Modellisierens z. B. Grundtypen von mathematischen Anwendungsaufgaben mit ihren Lösungen systematisch zu behandeln. Natürlich bedeutet Lösen immer, daß zuvor oder dabei eine Theorie mit Methoden aufgebaut wird, die für solche Aufgabentypen zum Einsatz kommen kann. Insofern ist der Ansatz von Reiss und Stroth (2011) durchaus ein mathematischer: „*Wir wollen dabei nicht nur die Anwendung darstellen, sondern auch die Theorie am konkreten Problem entwickeln*." Die Autoren entscheiden sich auch konsequent, nur das gerichtete Chinesische Briefträgerproblem durchgängig zu behandeln, weil sie in dem Rahmen ihres Buches die nötige Theorie auch präsentieren können.

Ein Kurs oder ein Buch mit dem Titel „Einführung in die (mathematische) Modellierung" ist in der Regel irreführend bezeichnet, weil er suggeriert, es gäbe *die* Modellierung schlechthin, die man ohne konkreten inhaltlichen Ballast einüben könnte, etwa unter dem Motto „*Wer Modellieren lernen will muss modellieren*" (Ortlieb et al. 2013). Natürlich sollte auch mal Raum sein, darüber zu reflektieren, was in erkenntnistheoretischer Sicht Modellbildung in verschiedenen Kontexten bedeutet und welche Rolle die Mathematik dabei spielt oder spielen könnte (vgl. Glinz 2004). Auf jeden Fall setzt ein solcher Kurs bereits eine gewisse Kenntnis von Mathematik/Informatik und realen Problemsituationen voraus. Ein begleitender „Galopp durch's Instrumentarium" der Mathematik (Bungartz 2005) würde im Lehramtsstudium an den Zuhörern nur vorbeirauschen.

Stattdessen sollten Kurse konkreter den Ausschnitt des Teilgebiets benennen, der mit Blick auf wirkliche Anwendungen und echte Fallstudien exemplarisch erarbeitet werden soll, also z. B. „Lineare Optimierung mit Fallbeispielen" oder „Lineare Differentialgleichungssysteme mit Anwendungen". Gerade die Beschränkung auf verschlankte und relativ einfache Theorien, die aber doch reichhaltige Anwendung bieten und somit wirklich Theorie mit Praxis verbinden, sind im Lehramtsstudium für die Sekundarstufen überzeugender als ein oberflächliches Modellisieren, das Problemlösen mit Wirklichkeitsverlust einlöst (Wiechmann 2014) und der schulischen Scheinmodellierung Tür und Tor öffnet (Bandelt und Weidl 2015).

Literatur

H.-J. Bandelt, T. Weidl: Der falsche Schein der Modellierens. Diskussionsbeitrag, Mitteilungen der DMV 23 (2015) 4–5.

A. Baumann: Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009. Mathematikinformation 55 (2011) 15–23 (http://www.mathematikinformation.info/pdf2/MI55Baumann.pdf).

A. Baumann: Mathematikdefizite der Studienanfänger. Vortrag auf dem ‚eLearning Fachforum 2014' am 14. November 2014 (http://video.frankfurt-university.de/fr3l.mp4).

P. Bender: Theoretische Vertiefung von Modellen. In: G.N. Müller, H. Schubring, E. Ch. Wittmann (Hrsg.), Arithmetik als Prozess, 2. Aufl., Erhard Kallmeyer Verlag GmbH, 2007, S. 331–361.

R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe. Springer Spektrum, 2013.

R. Brandt: Wozu noch Universitäten? Felix Meiner Verlag Hamburg, 2011.

H,-J. Bungartz: Modellbildung und Simulation. Vorlesungsfolien Kap. 2, TU München, 2005 (http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/mod_sim/SS05/ModSim_02_2auf1.pdf).

W.J. Cook: In pursuit of the Traveling Salesman – mathematics at the limits of computation. Princeton University Press, 2012.

A. Gruschka; Verstehen lehren – ein Plädoyer für guten Unterricht. Reclam, 2011.

W. Ebenhöh: Mathematik für Biologen und Mediziner. UTB Quelle & Meyer, 1975.

J. Edmonds: The Chinese postman problem. Oper Res 13, Suppl l (1965), B73–B77.

J. Edmonds, E.L. Johnson: Matching, Euler tours and the Chinese Postman, Mathematical Programming 5 (1973) 88–124.

H. A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte: Arc routing problems, part I: the Chinese Postman Problem. Oper. Res. 43 (1995a) 231–242.

H. A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte: Arc routing problems, part II: the Rural Postman Problem. Oper. Res. 43 (1995b) 399–414.

L.R. Ford, Jr., D.R. Fulkerson: Flows in networks. Princeton University Press, 1962.

M. Glinz: Vorlesung Informatik II. Institut für Informatik der Universität Zürich, 2004 (https://files.ifi.uzh.ch/rerg/amadeus/teaching/courses/infII_ss04/kapitel_01.pdf).

K.-H. Hoffmann, G. Witterstein: Mathematische Modellierung Grundprinzipien in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Birkhäuser, 2014.

G. Greefrath 2010. *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe* I + II). Spektrum Akademischer Verlag.

P. Gritzmann: Grundlagen der Mathematischen Optimierung – Diskrete Strukturen, Komplexitätstheorie, Lineare Optimierung, Simplex-Algorithmus, Dualität. Springer Spektrum, 2013.

M. Herbst: Mathematik mal anders -10. Mathematische Modellierungswoche in Tramin. Vor Ort ‚Ein buntes Spektrum', Bozen, Südtirol, Mai 2005, S. 24-25 (http://www.schule.suedtirol.it/lasis/documents/info/2005/05_Vor_Ort.pdf).

J. Humenberger, H.-Ch. Reichel: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI Wissenschaftsverlag, 1995.

S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.), Kombinatorische Optimierung erleben. Vieweg, 2007.

IQB: Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren. Auszug aus: IQB (Hrsg.): Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009, http://www.schulentwicklung.nrw.de/lernstand8/upload/download/mat_mathematik/Kompetenzentwicklung_Modellieren.pdf.

T. Jahnke: Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim, 2005, S. 271–272.

T. Jahnke, H.P. Klein, W. Kühnel, T. Sonar, M. Spindler: Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013. Mitteilungen der DMV 22 (2014) 115–121.

G. Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989.

J. Kallrath: Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis. Springer Spektrum, 2. Aufl., 2013.

A. Kirsch: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. Didaktik der Mathematik 5 (1977) 87–101.

A. Kirsch: „Verstehen des Verstehbaren" — auch im anwendungsorientierten Mathematikunterricht, Didaktik der Mathematik, 23 (1995) 250–264.

B. Leneke: Von anderen „Grafen" – Knoten, Wege, Rundreisen und Gerüste im Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht online 2011, S. 535–538 (https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/33665).

Leopoldina, Acatech, Akademienunion: Zur Gestaltung der Kommunikation zwischen Wissenschaft, Öffentlichkeit und den Medien. Juni 2014 (http://www.leopoldina.org/uploads/tx_leopublication/2014_06_Stellungnahme_WOeM.pdf)

K.P. Liessmann: Geisterstunde – die Praxis der Unbildung. Eine Streitschrift. Paul Zsolnay Verlag, 2014.

B. Lutz-Westphal: Mit angewandter diskreter Mathematik neue (Denk-)Wege gehen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim, 2005, S. 360–363.

A. Marx: Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. J. Math. Didaktik 34 (2013) 73–97.

C.P. Ortlieb, C. von Dresky, I. Gasser, S. Günzel: Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2013.

K. Reiss, G. Stroth: Endliche Strukturen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

A. Ries. Adam Risen Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Hanthierung / Geschäfften unnd Kauffmanschafft. Mit neuwen künstlichen Regeln und Exempeln gemehret. Christian Egenollfs Erben 1574 (http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Adam_Risen_Rechbuch_016.jpg?uselang=de).

S. Schwarze, S. Horn: Wohin mit den Hubschraubern? Standortplanung in der Mathematik. Workshop zur 3. Runde Landeswettbewerb – Mathematik Rheinland-Pfalz, 20.–22. April 2004 (http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/aktivitaeten/schulen/landeswettbewerb04_tag1.pdf).

A. Sebő, J. Vygen: Shorter tours by nicer ears: 7/5-approximation for the graph-TSP, 3/2 for the path version, and 4/3 for two-edge-connected subgraphs. Combinatorica, 2014, DOI: 10.1007/s00493-011-2960-3.

P. Sumner, S. Vivian-Griffiths, J. Boivin, A. Williams, C.A. Venetis, A. Davies, J. Ogden, L. Whelan, B. Hughes, B. Dalton, F. Boy, C.D. Chambers: The association between exaggeration in health related science news and academic press releases: retrospective observational study. British Medical J. 349 (2014) g7015.

H. Walser: Die Modellierung des schönen Scheins. Mathematikinformation Nr. 55 (2011) 3–14.

R. Wiechmann: Kompetenzorientierung – Wirklichkeitsverlust als Prinzip von Bildung. Mathematikinformation 60 (2013) 28-39 (http://www.mathematikinformation.info/pdf2/MI60Wiechmann.pdf).

E. Ch. Wittmann:Von allen guten Geistern verlassen – Fehlentwicklungen des Bildungssystems am Beispiel der Mathematik. Profil, Juni 2014, S. 20–30.

J. Ziegenbalg, O. Ziegenbalg, B. Ziegenbalg: Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Verlag Harri Deutsch, 2010.

Hans-Jürgen Bandelt, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
Email: bandelt@math.uni-hamburg.de