Eröffnungsvortrag des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung in Basel 2015

Rudolf vom Hofe

Sehr geehrte Ehrengäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Mitglieder der GDM,

ich freue mich, hier in Basel die 49. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Ich möchte bereits jetzt den Veranstaltern dafür danken, dass wir in dieser wunderbaren Stadt zu Gast sein dürfen. Meinen Eröffnungsvortrag möchte ich einem Kind dieser Stadt widmen, genauer gesagt einem Sohn dieser Stadt, der in vieler Hinsicht etwas mit uns und unserer Gesellschaft zu tun hat. Er war einer der ganz großen Mathematiker mit epochaler Bedeutung und – was vielleicht nicht ganz so bekannt ist – er war auch ein ausgezeichneter Lehrer und Didaktiker: Die Rede ist von *Leonhard Euler*. Ich möchte zunächst von seiner Baseler Zeit berichten, danach kurz sein umfangreiches Wirken in Berlin und St. Petersburg erwähnen und dann einen Blick auf die didaktische Seite dieses großen Mathematikers richten.

Eulers Baseler Zeit

Leonhard Euler, 1707–1783

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Er war der älteste Sohn des Pfarrers Paul Euler und dessen Ehefrau Margaretha. Schon früh kam der junge Leonhard mit Mathematik in Berührung, und zwar durch seinen Vater. Weil dieser ein Schüler von Jacob Bernoulli gewesen war, – so schreibt Euler in seiner Autobiographie – „trachtete er mir sogleich die ersten Gründe der Mathematik beizubringen, und bediente sich zu diesem End des Christoph Rudolphs Coss," – also des Rechnens mit Unbekannten – „worinnen ich mich einige Jahre mit allem Fleiß übte"[1].

Leonhard Euler besuchte dann das Gymnasium am Münsterplatz, 11 Minuten zu Fuß von hier, am linken Rheinufer gelegen. Auch die höhere Schule kannte damals noch keinen systematischen Mathematikunterricht. Um Leonhard weiter zu fördern, engagierte sein Vater einen mathematikbegeisterten Privatlehrer, den jungen Theologen Johannes Burckhardt.

Johann Bernoulli, 1676–1748

Dieser Förderung ist es zu verdanken, dass der 13-jährige Leonhard ab 1720 neben dem Gymnasium auch die Universität Basel besuchte und die Aufmerksamkeit des großen Johann Bernoulli weckte, der den dortigen Lehrstuhl für Mathematik innehatte. Euler hatte ihn zunächst um mathematische Privatvorlesungen gebeten, doch Bernoulli hatte mit ihm etwas anderes vor, eine Art individuelles didaktisches Konzept für Hochbegabte: Er riet ihm, im Selbststudium einige anspruchsvolle mathematische Werke durchzuarbeiten und dann jeden Samstagnachmittag zu ihm zu kommen und mit ihm die aufgetretenen Schwierigkeiten zu diskutieren. Dieses Verfahren bezeichnete Euler später selbst als „gewiss die beste Methode ..., um in den mathematischen Wissenschaften glückliche Progressen zu machen"[2].

Und er machte äußerst glückliche Progresse. 1723 schloss er als 16-Jähriger mit dem Magistergrad das Grundstudium ab und immatrikulierte sich auf Wunsch seines Vaters zum Hauptstudium an der Theologischen Fakultät. Doch die Mathematik ließ ihn nicht mehr los. Den Plan, auch Theologie zu studieren, gab er zwei Jahre später auf. Umso mehr befasste er sich mit Mathematik und Physik. Dabei lernte er zwei junge Kollegen kennen: die beiden ältesten Söhne seines Professors, Nicolaus und Daniel Bernoulli. Diese wurden nicht nur seine wissenschaftlichen Begleiter, sondern gehörten mit der Zeit auch zu seinen engsten Freunden. 1725 bewarb sich Euler mit einer Abhandlung über den Schall in Basel um den Lehrstuhl für Physik, aber er war für die Universität Basel noch zu jung.

[1] Euler 1767, PFA RAN: F. 136, op.1, Nr. 137, 124ob. Zitiert nach: Bredekamp, H. & Velminski, W. (Hrsg.): Mathesis und Graphe: Leonard Euler und die Entfaltung der Wissenssysteme, Akademie Verlag Berlin, 2010

[2] Ebenda, S. 10

Nikolaus Bernoulli, 1695–1726

Daniel Bernoulli, 1700–1782

St. Petersburg und Berlin

Euler begann sich nun auch für andere Orte und Länder zu interessieren. 1727 bekam er Nachricht von seinen Freunden, den Bernoulli-Brüdern. Sie hatten zwei Jahre zuvor gut dotierte Professuren an der neu gegründeten Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg angenommen und konnten ihm dort nun ebenfalls eine Stelle verschaffen, allerdings als Adjunkt in der medizinischen Abteilung. Euler überlegte nicht lange und immatrikulierte sich in Basel rasch an der Medizinischen Fakultät. Doch schon einige Tage später begab er sich auf die lange und beschwerliche Reise an seinen neuen Wirkungsort, von dem er nie wieder in seine Heimatstadt zurückkehren sollte. Hier traf er auf Christian Goldbach, mit dem er jahrzehntelang in Briefwechsel stand. Seine medizinische Karriere dauerte nicht lange, 1730 erhielt Euler die Professur für Physik und bald danach eine für Mathematik.

1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen. Dort entstanden viele seiner berühmten Werke zur Analysis, Zahlentheorie und Algebra. Nebenbei musste sich Euler um den Bau von Kanälen, die Trockenlegung des Oderbruchs und die hydraulischen Systeme der Brunnenanlagen von Sanssouci kümmern. Letzteres führte schließlich zu einem Streit mit Friedrich dem Großen und zum Ende von Eulers Zeit in Berlin: Friedrich wollte mit einem 30-m-Springbrunnen die höchste Fontäne Europas in seinem Schlosspark haben, aber die Fontäne funktionierte nicht. Eulers Hinweise zur Behebung der Störungen wurden nicht akzeptiert, weil sie zu teuer waren. Aber mit reiner Mathematik allein ließen sich die Probleme leider nicht lösen.

Es gelang übrigens zu Friedrichs Lebzeiten nicht, die Fontaine zum Laufen zu bringen. Heute gehört sie zum Weltkulturerbe und funktioniert, und ich kann Ihnen – ohne der Mitgliederversammlung vorzugreifen – schon mal mitteilen, dass wir sie bald auf einer unserer nächsten Jahrestagungen besichtigen können.

Nach 25 Jahren in Berlin kehrte Euler 1766 zurück nach St. Petersburg, wo nun Katharina die Große als Kaiserin von Russland residierte. Sie schenkte ihm zur Begrüßung 8000 Rubel. Heute bekommt man dafür 111 Schweizer Franken, das sind etwa 112 Euro, damals konnte sich Euler dafür ein Palais direkt an der Newa kaufen. 1771 erblindete er vollständig. Trotzdem entstand fast die Hälfte seines Lebenswerks in der zweiten Petersburger Zeit. Leonhard Euler starb 1783 in St. Petersburg. 866 Arbeiten hatte er während seines wissenschaftlichen Schaffens publiziert. Er gilt als der bedeutendste Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Ein Großteil der noch heute verwendeten mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück: das Zeichen π, das Summenzeichen $\sum$, die Beschreibung von Funktionstermen durch f(x) und natürlich die Zahl e.

Euler als Didaktiker

Prinzessin Friederike Charlotte von Brandenburg, 1745–1808

Neben den zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten hat Euler auch Lehrwerke geschrieben, die eine deutliche didaktische Handschrift zeigen. Das berühmteste ist die „Vollständige Anleitung zur Algebra", ein Bestseller, der in 127 Sprachen übersetzt wurde und der bis ins 20. Jahrhundert immer wieder neu aufgelegt wurde. Nicht ganz so bekannt ist ein anderes Werk von Euler, die „Briefe an eine deutsche Prinzessin". Es sind Lehrbriefe an eine Prinzessin von Brandenburg, von ihrem Vater in Auftrag gegeben. Sie residierte übrigens fast in Bielefeld, genauer im damaligen Reichsstift Herford, direkt an der Stadtgrenze von Bielefeld gelegen.

Es geht in diesen Briefen um Philosophie, Physik und auch viel um Mathematik. In den behutsamen Unterweisungen dieser Werke kommen zahlreiche Prinzipen zum Ausdruck, die auch heute noch zu den Methoden guter Lehre gehören; z. B.:

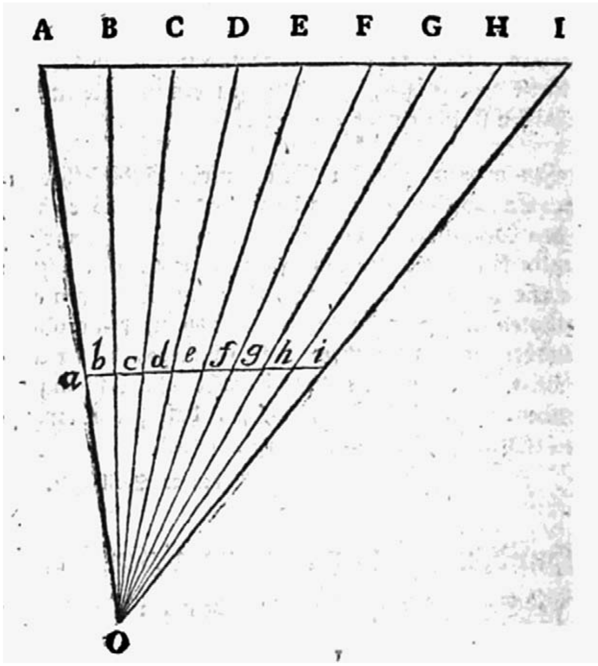
- Erklärung eines Verfahrens zunächst an einem einfachen und greifbaren Fall
- Anwendung auf komplexere, aber immer noch konkret nachvollziehbare Beispiele
- Übertragung der dabei gewonnenen Erkenntnisse auf den allgemeinen Fall
- Überprüfung des Gedankengangs durch Umkehrung der Argumentation

– Vermeidung von Fehlvorstellungen durch das Thematisieren bekannter Irrwege

Neben didaktischem Geschick spürt man beim Lesen dieser Briefe so etwas wie Vertrauen in die Erkenntnisfähigkeit des Lernenden und auch eine gewisse Freude, Verständnis zu wecken.

Ich möchte dies nun anhand einiger Auszüge aus seinem „123. Brief an eine deutsche Prinzessin“ aufzeigen. Es geht um die Frage, inwieweit man eine Strecke in immer kleinere Teile zerlegen kann und was dabei herauskommt.

Euler beginnt mit der Feststellung, dass man eine gezeichnete Strecke leicht in zwei Teile zerlegen kann. Aber kann man auch kleine Strecken in beispielsweise 8 Teile zerlegen?



Streckenteilung (Leonhard Euler [1773]: Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie; Bd. 2, Johann F. Junius: Leipzig, S. 180)

Um dies zu zeigen konstruiert er eine große Strecke, die zu der kleinen parallel ist und aus 8 Teilen besteht. Dann verbindet er die äußeren Punkte beider Strecken und erhält als Schnittpunkt dieser Verbindungen den Punkt O. Nun werden die Punkte der Streckenabschnitte der größeren Strecke mit O verbunden, was zu einer entsprechenden Teilung der kleinen Strecke führt. Seine dann folgenden Überlegungen möchte ich nun in Auszügen zitieren:

> Dieses Verfahren lässt sich immer wiederholen, die gegebene Linie *a i* sei auch so klein, wie sie wolle, und die Zahl der Teile werde so groß angenommen, als man wolle. Es ist zwar wahr, dass die Ausführung uns nicht erlaubt, hierin allzu weit zugehen; denn die Linien, die man zieht, haben immer einige Breite, wodurch sie nahe an ihrem Vereinigungspunkte zusammenfließen, wie es Ew. H. [Eure Hoheit] in der gegebenen Figur nahe am Punkte O bemerken werden; aber es ist hier die Frage von dem, was an sich selbst möglich ist, und nicht von dem, was wir im Stande sind, auszuführen. In der Geometrie haben die Linien ganz und gar keine Breite und fließen daher niemals in einander; dass also ihre Teilung keine Grenzen haben muss.
>
> Sobald mir Ew. H. zugeben, dass eine Linie in tausend Teile zerschnitten werden könne; so müssen Sie auch zugeben, dass sich dieselbe in zweitausend zerschneiden lasse, indem man jeden Teil wieder in zwei gleiche Teile zerschneidet; und aus eben dem Grunde muss sie in viertausend Teile und wiederum in achttausend können zerschnitten werden, ohne dass man jemals auf so kleine Teile käme, die sich nicht weiter zerschneiden ließen. So klein man sich eine Linie vorstellen mag; so ist sie immer in zwei Hälften teilbar, jede Hälfte wieder in zwei, und jede dieser Hälften von neuem in zwei, und so fort bis ins Unendliche.
>
> Wer der Ausdehnung diese Eigenschaft ableugnen würde, der würde behaupten müssen, dass man endlich so kleine Teilchen erhielte, die keiner weiteren Teilung fähig wären, und zwar deswegen, weil sie keine Ausdehnung mehr hätten. Gleichwohl müssen alle diese kleinen Teilchen zusammengenommen das Ganze ausmachen, durch dessen Teilung man auf sie geraten ist; und also würde folgen, da man die Größe jedes dieser Teilchen für nichts oder Zero angibt, dass mehrere Zero zusammengenommen eine Größe ausmachen, welches eine offenbare Ungereimtheit sein würde. Denn Ew. H. wissen aus der Arithmetik, dass mehrere Zero addiert immer wieder Zero ergeben.
>
> Man sagt also in der Geometrie mit Recht, dass jede Größe ins Unendliche teilbar sei, und dass man nie mit einer solchen Teilung so weit kommen könne, dass eine noch weitere Teilung an sich selbst unmöglich würde. Aber man muss hier immer das, was an sich selbst möglich ist, wohl von dem unterscheiden, was wir im Stande sind auszuführen. Unsre Ausübung hat allerdings nur sehr enge Grenzen. Wenn man, zum Beispiele, einen Zoll in tausend Teile zerschnitten hat; so sind diese Teilchen schon so klein, dass sie unserem Auge entwischen, und eine noch weitere Teilung würde uns sicher unmöglich sein.
>
> Aber man darf nur diesen tausendsten Teil eines Zolls durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachten, das zum Beispiele etwa tausend-

> mal vergrößert, so wird uns jeder Teil wieder so groß erscheinen, als der ganze Zoll unserem bloßen Auge erschien. Es lässt sich also die Möglichkeit einsehen, jeden dieser Teile wieder in tausend Teile zu zerschneiden; und der nämliche Schluss lässt sich immerfort wiederholen, weil die Gründe immer die selbigen bleiben.[3]

Euler schrieb diesen Text im Jahr 1762, die Zitate stammen aus der zweiten deutschen Auflage von 1773. Wie aktuell sind diese Gedanken? Haben sie noch etwas zu tun mit dem, was mathematische Schulbildung heute ist oder sein sollte?

Sind dies Inhalte für eine aristokratische oder bildungsbürgerliche Erziehung oder kann das Nachdenken über Prozesse, die ins Unendliche führen, auch heute bei Schülerinnen und Schülern Interesse, Staunen und Faszination wecken, z. B. bei Gesamtschülern aus Gelsenkirchen?

Ich glaube schon, und viele Unterrichtsbeispiele können dies bestätigen. Und ich denke, dass wir auch heute bei der Umsetzung kompetenzorientierten Unterrichts diese Art des Denkens, die mit einer gewissen Grenzerfahrung verbunden ist zwischen dem was real gegeben und dem was gedanklich möglich ist, nicht zu kurz kommen lassen sollten. Denn sind es nicht letztlich mathematische Erfahrungen dieser Art, die viele von uns selbst dazu gebracht haben, sich nach der Schule mit Mathematik zu befassen?

Wenn ich überlege, was mir Euler nach dem Lesen dieser interessanten Briefe sagt – oder sagen würde –, dann ist es mit einem leicht verschmitzten Lächeln vielleicht Folgendes:

> Vergesse er nicht, dass Berechnungen zur Ermittlung des günstigsten Hundefutters, des besten Sparkontraktes oder des größten Vorteils beim Einkaufe nicht alles sind, was die mathematische Bildung der Jugend verlangt. Bedenke er, dass im Geiste gar vieler Discipuli ein Wunsch nach Erkenntnis schlummert, für den die Kunst der Mathematica ein trefflich Spielfeld und ein Brunnen der Erkenntnis ist.[4]

Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche und spannende Tagung. Herzlichen Dank!

[3] Ebenda, S. 181 ff. Die Diktion einiger Wörter wurde der heutigen Schreibweise angepasst.

[4] Hierbei handelt es sich nicht um ein Originalzitat Eulers, sondern um einen retrospektiv-visionären Gedanken, der den Vortragenden nach dem Genuss Badischen Weines überkam, der jedoch ungeachtet dessen demselben auch am nächsten Morgen noch vortragswürdig erschien. Für den Fall möglicher Missverständnisse bittet er um Nachsicht und Vergebung.