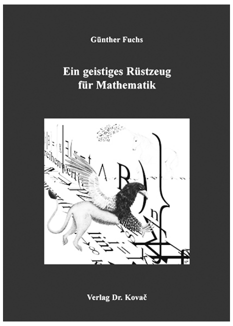
Günther Fuchs: Ein geistiges Rüstzeug für Mathematik

Rezensiert von Jürgen Maaß



Um dieses Buch zu verstehen, ist es hilfreich zu wissen, dass der Autor von Bruno Buchberger promoviert wurde und als Mathematiklehrer viele Jahre an einem Gymnasium sowie an der PH Tirol gearbeitet hat. Seine Sicht von Mathematik und seine Auffassung über jene Aspekte von Mathematik, die im üblichen Unterricht zu wenig verdeutlicht werden, aber für ein gutes und zum Studium notwendiges Verständnis von Mathematik eigentlich wichtig wären, haben sich in vielen Jahren entwickelt; der letzte Anlass dazu, dieses Buch mit einer systematischen Darstellung seiner Sicht zu schreiben, kam nach seiner Pensionierung durch eine nebenberufliche Tätigkeit als Kursleiter in einem Kurs zur Berufsreifeprüfung. Hier werden in 9 Monaten Berufstätige auf eine Prüfung zur Erlangung der Matura (Abitur) vorbereitet.

Wie lässt sich die besondere Sicht des Autors auf die Mathematik am besten beschreiben? Durch Zitate! Im 2. Kapitel (Titel: „Das abstrakte Universum der Mathematik") schreibt er einleitend:

> Die Ideenwelt der Mathematik ist das Produkt einer Jahrtausende langen Entwicklung und Erfahrung in der Kulturgeschichte der Menschheit. Ein (sehr bescheidener) Teil dieser Ideenwelt wird in diesem Buch vorgestellt. Sie kann nicht durch die Sinne erfahren werden, sondern kommt nur in den Hirnen von Mathematikern und solchen Leuten vor, die Mathematik anwenden… Es hat sich herausgestellt, dass für die Mathematik, d. h. zum Modellieren unserer realen Welt für die Zwecke der Technik, Wirtschaft, Physik, Biologie, etc. etc., erstaunlich wenig grundlegende Konzepte ausreichen, nämlich jeweils gedachte Gegenstände, Vorgänge und Beziehungen. Die Mathematik erklärt nicht, was ein Gegenstand, ein Vorgang oder eine Beziehung ist. Vielmehr wird vorausgesetzt, dass jeder darüber bereits eine klare Vorstellung besitzt. (S. 3)

Was sind in dieser Mathematik Gegenstände etc.?

> Die gedachten Vorgänge in der Ideenwelt der Mathematik heißen auch Funktionen. Sie sind so konzipiert, dass ihre Anwendung auf einen oder mehrere gedachte Gegenstände, welche auch Argumente heißen, genau einen neuen Gegenstand, den so genannten Funktionswert, erzeugt. (S. 4)

Und weiter:

> Eigenschaften und Beziehungen im Universum der Mathematik heißen Prädikate. Sie sind so konzipiert, dass ihre Anwendung auf (d. h. ihre Betrachtung für) einen oder mehrere Gegenstände, die wieder Argumente heißen, zutreffen kann oder auch nicht. (S. 5)

Der Autor erläutert in insgesamt 26 Kapiteln das, was aus seiner Sicht der Mathematik den Weg von der Sekundarstufe zur Universität ausmacht (oder besser: ausmachen müsste, damit die künftigen Studierenden es beim Start eines Studiums leichter hätten): Die Sprache der Mathematik, die Rolle von Bildern, Beweise, Mengen, Mathematische Logik, Formeln, rationale und reelle Zahlen, Anfänge der Linearen Algebra (Cartesische Ebene, Lineare Funktionen und (Un-)Gleichungen), etwas Zahlentheorie und ein Ausblick auf die Analysis.

Es gelingt dem Autor, seine Grundidee in allen Kapiteln konsequent umzusetzen, das Werk ist aus einem Guss. Als Beispiel dafür zitiere ich aus dem Kapitel 12 „Der Wechsel zwischen einer Funktion und ihrem Graph" zunächst die einleitende Bemerkung:

> Die Mathematik erklärt nicht, was ein Objekt, eine Funktion oder ein Prädikat ist. Man kann aber über einzelne (bestimmte) Objekte, Funktionen und Prädikate sprechen, indem man sie mit Individuenkonstanten, Funktionskonstanten und Prädikatenkonstanten (das sind die Begriffe der Mathematik) bezeichnet.
> Insbesondere kann man z. B. nicht definieren, was eine Funktion ist. Sehr wohl kann man aber mit Hilfe der Mengenlehre definieren, was ein Funktionsgraph ist. Bisher haben wir die Gesamtheit der geordneten Paare $(x, f(x))$, wo x über dem Definitionsbereich D_f einer Funktion f läuft, den Graph von f genannt. (S. 113).

Nach einigen weiteren Schritten kommt der Autor dann zur angestrebten Definition eines Funktionsgraphen (S. 113):

$$\phi : M \to N :\Leftrightarrow \phi \subseteq M \times N \wedge \underset{x\in M}{\forall}\ \underset{y}{\exists}\ !(x,y) \in \phi$$

Für „$\phi : M \to N$“ lies: $\underline{\phi \text{ ist ein Funktionsgraph von } M \text{ nach } N}$“.
Die Zeichenreihe „:→“ ist hier eine 3-stellige Prädikatenkonstante.
ϕ ist ein Funktionsgraph $:\Leftrightarrow \underset{M,N}{\exists} \ \phi : M \to N$

Alle Leser und Leserinnen dieser Rezension haben vermutlich schon die Schublade gefunden, in der sie dieses Buch einsortieren wollen. Mir scheint es dennoch wichtig, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass ein solches Buch einen Platz in jeder Bibliothek haben sollte, die Lernende beim gründlicheren Verstehen von Mathematik unterstützen will. Zum besseren Verständnis gehört auch je ein Blick von verschiedenen Perspektiven auf die Mathematik. Allerdings glaube ich nicht, dass dieses Buch ohne fachkundige Erläuterung hilfreich ist; ein Schüler oder eine Schülerin, die mit diesem Buch als Weihnachtsgeschenk in der Hand allein versucht, die Lücke zwischen Schulunterricht und universitären Anforderungen zu schließen, wird vermutlich zu dem Schluss kommen, dass eine gut geschrieben Mathematik für Ingenieure oder eine Einführung in die Analysis bzw. Lineare Algebra ihm oder ihr dabei besser hilft.

Günther Fuchs: *Ein geistiges Rüstzeug für Mathematik*. Verlag Dr. Kovać, Hamburg 2014, ISBN 978-3-8300-8039-8, 258 S., 29,80 Euro

Jürgen Maaß, Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenbergerstraße 54, 4040 Linz, Österreich
Email: juergen.maasz@jku.at