Die Schiefe von PISA
Eine Glosse zum PISA-Logo

Peter Gallin

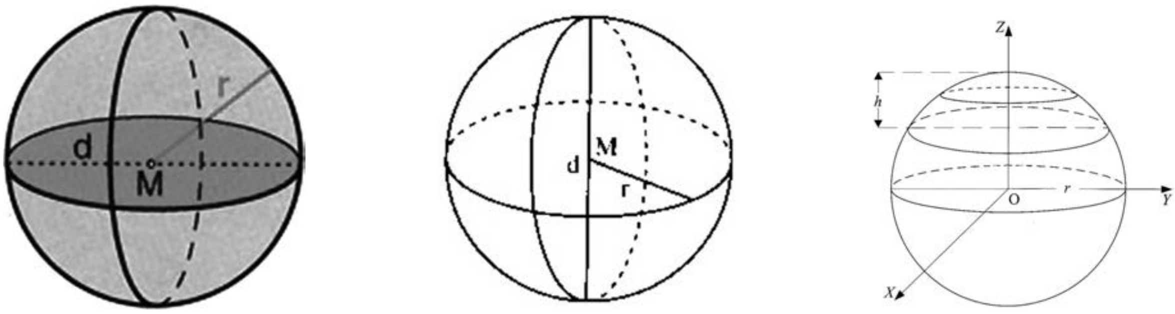
„Das kenne ich doch!“, dachte ich, als ich den Transportkarton für einen Transatlantikflug meines Mountainbikes entsorgte. Das grosse Logo von Swissport, der weltgrössten Servicegesellschaft für Fluggesellschaften und Flughäfen, war mehrfach in starkem Rot aufgedruckt.

swissport

Schwungvoll ziehen zwei Kreisbahnen um eine angedeutete Kugel. Vielleicht sollen diese Kreise die weltweite Aktivität der Gesellschaft symbolisieren. Jedenfalls ist das Logo seit 1996, dem Gründungsjahr von Swissport, in Gebrauch. Und jetzt ist auch klar, woran mich diese Figur erinnert: Das Logo der PISA-Studie (Programme for International Student Assessment) sieht verblüffend ähnlich aus.

OECD
PISA

Vermutlich ist das PISA-Logo wenige Jahre später als das Swissport-Logo entwickelt worden. Doch soll nicht gleich der Vorwurf des Plagiats erhoben werden. Wenn man nämlich das Innerste nicht als Kugel, sondern als dritten Reif interpretiert, macht die Figur nicht die gleiche Aussage. Dies wird durch die präzise Darstellung als Hohlzylinder durchaus nahegelegt. Ja, auch die beiden anderen Reife sind sehr exakt als Hohlzylinder dargestellt, ganz im Gegensatz zum Swissport-Logo, wo gleichsam etwas abge-

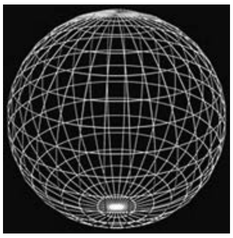


Quellen: 1. Bild: www.allgemeinbildung.ch/fach=mat/Geometrische_Koerper_01a.htm, 2. Bild: www.rsoelde.de/projekte/regeln.htm, 3. Bild: 4000 Jahre Algebra, Springer Verlag 2003, Seite 76.

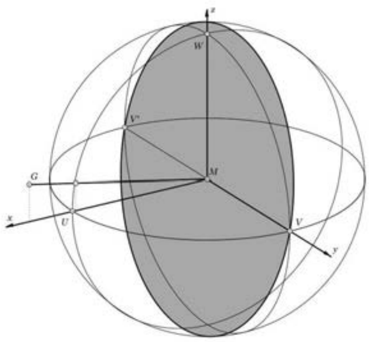
schrägte Seitenwände der beiden Reife erkennbar sind.
Durchaus möglich, dass die Macher von PISA mit dieser Präzision zum Ausdruck bringen wollen, dass es bei ihren Tests um Exaktheit, also um Richtig und Falsch geht. Dann müssen sie sich aber gefallen lassen, dass man auch ihr Logo genauer unter die Lupe nimmt und nach streng geometrischen Prinzipien untersucht.
Konzentrieren wir uns zuerst auf die beiden äusseren Reife, den horizontal ausgedehnten (im farbigen Original gelben) Reif und den vertikal ausgedehnten (blauen) Reif. Deuten sie nicht den Äquator und einen Meridian der Erdkugel an? Misst man die Achslängen der darstellenden Ellipsen nach, stellt man fest, dass beide Ellipsen kongruent sind. Dann ist wohl an gleich grosse Reife gedacht worden, welche gleich stark gegenüber der Betrachtungsrichtung geneigt sind. So betrachtet, ist es bereits fraglich, weshalb der horizontale Reif innerhalb des vertikalen Reifs liegen soll, denn die beiden Reife müssten sich ja – gemeinsame Kreismittelpunkte vorausgesetzt – in den Kreuzungsstellen genau durchdringen. Seien wir aber nicht zu pedantisch: Der horizontale Reif könnte ja einen um eine Reifdicke kleineren Radius aufweisen. Doch war das die Intention der Logo-Macher? Bei der Herstellung des Swissport-Logos scheint man diese Schwierigkeit erkannt zu haben. Jedenfalls wird das Problem elegant umgangen, indem in den Kreuzungsstellen kein Vorne und kein Hinten suggeriert wird.
Doch schon taucht das zweite Problem auf. Swissport nennt ihr Logo „Planet Erde". Das Logo soll wohl auf die weltumspannende Bedeutung des Unternehmens hinweisen. Schwebte den Auftraggebern des Pisa-Logos Ähnliches vor? Dann treten sie mit ihrem Logo bereits ins zweite Fettnäpfchen. Es ist nämlich ein weit verbreiteter Irrtum, dass Äquator und Meridian in einer Normalprojektion durch Ellipsen dargestellt werden können, deren grosse Achsen senkrecht zueinander stehen. Bei diesem Irrtum wären die Macher des PISA-Logos allerdings in guter Gesellschaft; auch Mathematiker erliegen ihm. Ohne mit der Wimper zu zucken, werden in Fachzeitschriften, Formelsammlungen und Lehrbüchern Kugelabbildungen präsentiert, die allesamt den gleichen Fehler immer wieder reproduzieren. Um diesen Fehler sichtbar zu machen, muss ich allerdings etwas ausholen. Mathematisch weniger interessierte Leserinnen und Leser können die folgenden vier Abschnitte auch überspringen.
Schauen wir uns die obigen Bilder an. Alle Fachkollegen, welche die Kugel so darstellen, gehen von der Tatsache aus, dass die Kugel in Normalprojektion als Kreis erscheint und der Äquator als Ellipse mit horizontaler grosser Achse. Dann aber nehmen sie an, dass der Nordpol auf der Kreisperipherie ganz oben sitzt und ein Meridian eine Ellipse mit vertikaler grosser Achse sei. Vielleicht denken sich die Autoren solcher Bilder, dass man mit schiefer Parallelprojektion die Sache retten könnte. Dieser Gedanke liegt vermutlich dem 3. Bild aus dem Springer-Verlag zugrunde, weil dort ein Koordinatensystem die schiefe Parallelprojektion suggeriert, welche bei Würfeldarstellungen so praktisch ist. Eigentlich müsste es einem doch weh tun, wenn man sich vorzustellen versucht, wie in diesem Bild die bezeichnete Länge h bis zur Peripherie reicht. Der Gedanke an die schiefe Parallelprojektion ist eben falsch: Erstens würde der Kugelumriss dann zu einer Ellipse, allerdings vielleicht kaum wahrnehmbar. Trotzdem ist es auch in schiefer Parallelprojektion unmöglich, dass die Pole auf dem Kugelumriss sitzen, während der Äquator als Ellipse erscheint. Die Pole sitzen nur dann auf der Peripherie, wenn der Äquator als Strecke abgebildet wird.[1] Einzig bei Zentralprojektion

[1] Meine jüngste Publikation zu diesem Thema findet sich in: Praxis der Mathematik in der Schule, Oktober 2005/47. Jg. Heft 5, Aulis Verlag Deubner, Seite 39.

ist erreichbar, dass wenigstens ein Pol auf der Peripherie sitzt. Der andere dagegen kann dann aber nicht auch auf der Peripherie liegen. Das folgende wohltuend korrekte Bild[2] zeigt beinahe diese Situation. Jedenfalls haben auch hier die Meridianellipsen niemals eine vertikale grosse Achse.



Wie sieht nun eine korrekte Kugeldarstellung aus? In der nachfolgenden Normalprojektion[3] erscheint die Kugel als Kreis und der Äquator als Ellipse mit horizontaler grosser Achse. Zudem ist ein rechtwinkliges Koordinatendreibein MU, MV und MW eingezeichnet. Unter diesen Bedingungen muss aber der Pol W und die z-Achse, auf der er liegt, gegen vorne gekippt sein. Daraus folgt, dass alle Meridiane Ellipsen sind, deren grosse Achse nicht senkrecht zur grossen Achse der Äquatorellipse liegen. Einzige Ausnahme bildet jener Meridian, der per Zufall projizierend liegt, also gerade als Strecke erscheint und sich mit der z-Achse deckt.



Spasseshalber habe ich einen Grosskreis – mit grauer Rasterung seiner Kreisfläche – auf die Kugel gelegt, dessen grosse Achse tatsächlich mit der z-Achse zusammenfällt. Zu diesem Zweck gehe ich vom Meridian aus, welcher durch W, V und V' geht und als Kreisachse die x-Achse hat. Diese Kreisachse hebe ich mitsamt der senkrecht zu ihr liegenden Kreisebene bei festen Punkten V, M und V' an, mit dem Griff bei Punkt G, und zwar so weit, bis MG horizontal (senkrecht zur z-Achse) auf dem Blatt liegt. Damit kippt der Grosskreis gegen rechts hinten und ist natürlich kein Meridian mehr. (In Normalprojektion deckt sich die Kreisachse immer mit der kleinen Achse der Ellipse, welche den Kreis darstellt. So deckt sich die x-Achse mit der kleinen Achse der Meridianellipse durch W, V und V'.)

Was trägt dieser mathematische Exkurs zur Analyse des PISA-Logos bei? Vorerst einmal ist klar: Im PISA-Logo stellt der äussere vertikale Reif keinen Meridian dar. „Dann eben nicht", können die PISA-Macher sagen, „jeder Betrachter des Logos kann sich denken, was er will. Mit der falschen Vorstellung, dass die beiden äusseren Reife senkrecht zueinander stünden, haben wir nichts am Hut." Nun gut, zur Not kann man sich dem exakten Denken immer mit dem Verweis auf eine irgendwie geartete künstlerische Freiheit entziehen. Dann wollen wir doch mal sehen, wie sich die Sache dem unvoreingenommenen Betrachter darstellt.

Wenden wir uns zu diesem Zweck dem dritten, innersten Reif zu, dessen Darstellung auch beim mathematischen Laien Unbehagen auslöst. Dieser Reif – im Original in grün – ist sehr präzis gezeichnet und lädt dazu ein, sich den Reif genau vorzustellen. Offensichtlich erscheint er als Kreis. Ebenso offensichtlich soll ein Hohlzylinder dargestellt werden, dessen Höhe etwa gleich gross erscheint wie die Differenz der beiden Zylinderradien, die wir Ringdicke nennen. Da man aber etwa gleich viel Ringdicke wie Zylinderhöhe sieht, schaut man den Reif schräg an. Aber dann kann ja ein kreisförmiger Hohlzylinder gar nicht als Kreis erscheinen. Er müsste demnach in Wirklichkeit elliptisch sein. Wenn der Reif also kreisförmig erscheint, muss er in Wirklichkeit eine langgezogene Ellipse sein, bei der die grosse Achse wegen der schiefen Blickrichtung gerade so stark verkürzt wird, dass sie gleich gross erscheint wie die unverkürzt erscheinende kleine Achse. Wie schief man auf die Reifen blickt, kann man abschätzen, wenn man das Verhältnis von kleiner zu grosser Achse bei den beiden äusseren Reifen betrachtet, welche ja als wirkliche Kreisreife angenommen werden. Dieses Verhältnis ergibt – als Sinus des schiefen Blickwinkels auf die Kreisebene – einen Blickwinkel von etwa 15 Grad. Bei einem solch flachen Blickwinkel wäre aber die grosse Achse des innersten Reifs wesentlich grösser als der Kreisradius der äusseren Reife. Das würde der Tatsache widersprechen, dass der elliptische Reif ganz innerhalb der kreisförmigen Reife liegt. Der

[2] www.math.hu-berlin.de/~filler/3D/flaechen.html
[3] Gezeichnet mit der Geometrie-Software „GeometerPro" für inzidenztreue 2D- und 3D-Konstruktion von Heinz Klemenz, erhältlich unter www.geosoft.ch.

kleinste Blickwinkel, der noch den elliptischen Reif im Innern liegen lässt, beträgt etwa 45 Grad, denn die unverkürzt erscheinende kleine Achse des innersten Reifs beträgt ungefährt 70 % der grossen Achsen der äusseren Reife. Bei diesem Blickwinkel auf die Ebene des elliptischen Reifs kann das Logo gerade noch gerettet werden. Trotzdem hat man das Gefühl, dass dieser innerste Reif an den Stellen, wo die Sichtbarkeit der Zylinderwand wechselt, leicht verbogen ist. Das rührt daher, dass man besonders vorne relativ viel Zylinderwand im Vergleich zur Ringdicke sieht. Ausserdem ist es schwierig, sich diesen innersten Reif als tatsächlich elliptisch vorzustellen.

Das PISA-Logo wirft den genauen Betrachter also in dreifache Nöte, welche zusehends ärgerlicher werden:

- Die Figur weist eine Genauigkeit in der Darstellung der Reife auf, die zu einem Widerspruch führt: Wenn die beiden äusseren Reife tatsächlich gleich gross wären, dann könnte der eine nicht innerhalb des andern liegen, sondern sie müssten sich durchdringen.
- Der vertikale Reif suggeriert eine Bedeutung, die er nicht haben kann: Wäre er ein Meridian, wie er vorgibt, müsste seine grosse Achse schief und nicht senkrecht zur grossen Achse des horizontalen Reifs liegen.
- Schliesslich verstört das Logo auch einen mathematisch ungeschulten Betrachter: Der innerste und kleinste Reif, der zu wenig Platz zu haben scheint, beginnt sich bei genauerem Hinsehen zu winden und zu krümmen.

Im Gegensatz zum schwungvollen Swissport-Logo animiert die aufdringliche Präzision des PISA-Logos zum geometrischen Nachdenken. Von der schwierigen Kreuzung der beiden äusseren Reife zu deren Nichtorthogonalität bis zum elliptischen dritten Reif, der kaum Platz im Innern findet, führt uns die Analyse zum merkwürdigen Schluss, dass das PISA-Logo zwar präzis, aber falsch ist. Ob die PISA-Macher wohl die geometrische Vertiefung gar nicht wünschen? Soll das Logo gar eine gewisse Geringschätzung des Fachlichen symbolisch zum Ausdruck bringen? Damit läge PISA dann wirklich schief.