

Arbeitskreis Vernetzungen im Mathematikunterricht

Passau, 27.–28. 4. 2012

Astrid Brinkmann und Thomas Borys

Die vierte Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ fand an der Universität Passau am 27. und 28. April 2012 statt; sie wurde von Matthias Brandl perfekt organisiert. Das Veranstaltungsprogramm gliederte sich in einen arbeitskreisinternen Teil am ersten Tag und einen stärker unterrichtspraktisch bezogenen Teil am zweiten Tag, der auch als Lehrerfortbildung geboten wurde. Besonders erfreulich ist, dass an beiden Tagen interessierte Lehramtsstudierende der Universität Passau dem Vortragsprogramm beigewohnt haben, und dies trotz des draußen wunderbaren, frühsummerlich anmutenden Wetters.

Das gebotene Vortragsprogramm war reichhaltig. Es wurde über Forschungsarbeiten und Projekte berichtet und Handlungsbedarf bzgl. Vernetzungen im Mathematikunterricht aufgezeigt und, insbesondere am Lehrerfortbildungstag, wurden Methoden für einen vernetzenden Mathematikunterricht sowie Beispiele für inhaltliche Vernetzungen vorgestellt und diskutiert.

Freitag, 27. April

Matthias Brandl (Passau): *Vernetzung raumgeometrischer Inhalte mit POV-Ray*

Vorgelegt wird eine Lehr-/Lerneinheit zum spielerisch-experimentellen Einstieg in die Raumgeometrie mit Hilfe des freien Raytracers POV-Ray. Ausgangspunkt ist eine Kugel mit Radius 1. Durch Konstruktion von Tangenten an diese gelangt man schließlich zum Oktaeder. Über Vernetzung mit dem Themenkomplex Inkreis bzw. Inkugel(n) und Umkreis bzw. Umkugel(n) gelangt man zur Frage nach dichtesten Kugelpackungen. Neben der Vernetzung mit diesem Thema, das die Frage nach der Natur mathematischer Beweise aufwirft, findet im Weiteren eine Vernetzung mit dem historischen Hintergrund zu platonischen Körpern, statt indem auf einen Originaltext aus Euklids Elementen und Platons politeia verwiesen wird. POV-Ray dient dabei als ständiger Visualisierer und damit Validierungsinstrument der einzelnen Ergebnisse.

Regina Bruder (Darmstadt): *Langfristiger Kompetenzaufbau in horizontaler und vertikaler Vernetzung in den Sekundarstufen*

Anhand der Brunerschen Curriculumspirale werden horizontaler und vertikaler Kompetenzaufbau thematisiert und Wege zur Organisation solcher Lernprozesse aufgezeigt, die zu einem verfügbaren Basiswissen und nachhaltigem Kompetenzaufbau anhand theoretisch fundierter Kompetenzentwicklungsmodelle führen. Welche lerntheoretischen Konzepte fundieren einen langfristigen Kompetenzaufbau? Offene Fragen für die fachdidaktische Forschung und aus der Kompetenzorientierung erwachsende stoffdidaktische Implikationen werden diskutiert.

Herbert Henning (Magdeburg): *„La Divine proportion“ oder Ist Schönheit messbar?*

Kann man mit Mathematik das geheimnisvolle Lächeln der „Mona Lisa“ von Leonardo da Vinci, die Schönheit von Sonnenblumen und das Wachstum von Pflanzen erklären?

Der „Goldene Schnitt“ als harmonisches Teilungsverhältnis gilt in der Kulturgeschichte der Mathematik als ein „Maß“ für das Schöne. Man findet den „Goldenen Schnitt“ in Werken berühmter Maler der Renaissance, in Bauwerken der Antike, bei der Erklärung der Planetenbahnen und in der modernen Kunst unserer Zeit. Die von den Platonischen Körpern ausgehende Faszination lässt sich mit Hilfe des Goldenen Schnitts und der Symmetrie erklären. Pythagoras von Samos begründete auf Zahlenverhältnisse seine Musiktheorie, und Johannes Kepler entdeckte die „Melodie“ der Planeten als Sphärenmusik. Zahlenmystik und Zahlensymbolik findet man bei Johann Sebastian Bach, Alban Berg und John Cage. In der „seriellen Musik“ des 20. Jahrhunderts findet man Bezüge zu den Fibonacci-Zahlen und Mozart „würfelte“ mit dem Zufall Walzer und Menuette. Anhand von konkreten Beispielen für „mathematische Kunst und kunstvolle Mathematik“ wird die Frage „Ist Schönheit messbar?“ beantwortet.

Swetlana Nordheimer (Berlin): *Sechs Ecken und ein Kreis. Beispiel für ein Aufgabennetz*

Es werden *Aufgabennetze* als Lernumgebungen zur Wiederholung der Unterrichtsinhalte im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I vorgestellt und anschließend diskutiert. Dabei wird exemplarisch gezeigt, wie Aufgaben rund um ein in einen Kreis einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck Themenbereiche aus Geometrie, Arithmetik, Algebra und Stochastik verbinden und Schülerinnen und Schüler zur Kooperation anregen können.

Die Konstruktion und die Reflexion des *Aufgabennetzes* orientieren sich einerseits an theoretischen

Überlegungen (u. a. Wittenberg, Vollrath, Wittmann), andererseits an schulischen Erprobungen des *Aufgabennetzes* an Berliner Schulen. Der Bericht über den Austausch und die Zusammenarbeit mit Lehrerinnen und Lehrern bei der Gestaltung des vorgestellten *Aufgabennetzes* soll dabei exemplarisch zeigen, wie professionelles Wissen von Lehrerinnen und Lehrern in die Entwicklung von Praxisvorschlägen einfließen und zur Reflexion theoretischer Überlegungen in der Mathematikdidaktik beitragen kann.

Christian Barthel (Passau): *Einsatz von Cmap-Tools im Mathematikunterricht*

Cmap-Tools ist ein kostenloses Programm zur strukturierten Darstellung von Inhalten. Mit Hilfe von Cmap-Tools können Wissensmodelle in Form von einfachen Strukturdiagrammen (Mind-Maps und Concept-Maps) dargestellt werden. Cmap-Tools bietet ein breites Einsatzspektrum u. a. eine interaktive Nutzung im Klassenverband.

Im Rahmen der Erstellung einer Zulassungsarbeit sind aufbauend auf bereits entwickelten Concept-Maps (vgl. Brinkmann) zwei Unterrichtsversuche mit Cmap-Tools durchgeführt worden. Das Vorgehen, Ergebnisse und mögliche Einsatzmöglichkeiten von Cmap-Tools werden vorgestellt und diskutiert.

Samstag, 28. April (im Rahmen der Lehrerfortbildung)

Astrid Brinkmann (Münster): *Vertikale Vernetzung über außermathematische Anwendungskontexte*

Einer der zentralen Aspekte guten Unterrichts ist es, das Wiederaufgreifen früherer Lerninhalte in den Fokus zu rücken. So können, im Sinne einer vertikalen Vernetzung, langfristige Lernprozesse stattfinden, wobei Erlerntes besser behalten wird und als Konsequenz gesonderte zeitintensive Wiederholungsphasen weitgehend überflüssig werden.

In einem Mathematikunterricht, der das Ziel hat, Lernende zu befähigen, ihre Umwelt mit mathematischen Mitteln zu erschließen, können realitätsbezogene Anwendungskontexte als Klammer für eine vertikale Vernetzung dienen: Früher im Unterricht behandelte Anwendungskontexte werden wieder aufgenommen und das Wissen hierzu mit Hilfe neu erworbener oder zu erwerbender mathematischer Mittel vertieft. Diese methodische Vorgehensweise kann gleichzeitig der Motivation der Lernenden, ihrer Einstellung gegenüber der Mathematik und damit auch dem Lernprozess als solchem dienlich sein. Es werden konkrete realitätsbezogene Anwendungsaufgaben vorgestellt, über die eine vertikale Ver-

netzung im Mathematikunterricht erfolgen kann.

Michael Bürker (Freiburg) *Zur Modellierung von Spar- und Tilgungsvorgängen*

Normalerweise werden in der Sek I Vorgänge wie Sparen und Tilgen im Rahmen exponentieller Vorgänge in Klasse 9 oder 10 behandelt. Üblicherweise wird in diesem Zusammenhang die Zinseszins- (oder Kapital-) Formel als explizite Formel besprochen. Diese kann anschaulich in Form eines Drei-Säulen-Modells behandelt werden: Die 1. Säule steht dabei für das Anfangsguthaben, die 2. für den Zins und die 3. Säule für den Zinseszins. Dieses Modell kann für den Fall eines Sparvorgangs, in dem zum Anfangsguthaben außer dem Zins auch eine regelmäßige Sparrate hinzukommt, erweitert werden. Aus diesem Drei-Säulen-Modell können auch die expliziten Funktionen für den Fall des Sparens mit regelmäßiger Sparrate und der Tilgung eines Darlehens entwickelt werden. Sie sind alle von der Form $x \mapsto ca^x + d$. Damit ist auch eine geeignete Visualisierung durch dynamische Geometrie-Software möglich. Schließlich erfolgt ein Ausblick auf allgemeine Wachstumsvorgänge, die durch Funktionen der Form $x \mapsto ca^x + d$ beschrieben werden.

Herbert Henning (Magdeburg): *Mathematische Modellierung von Naturkatastrophen als Vernetzung der Mint-Fächer*

Die verheerenden Wirkungen des von einem Seebeben ausgelösten Tsunami in Japan sowie die der Wirbelstürme in der Karibik und in den USA führen uns die Urgewalt und die zerstörende Kraft von Naturkatastrophen mit ihren Folgen für Mensch und Natur vor Augen. Auch in Europa mehren sich Erschütterungen durch Erdbeben. Dies als fächerverbindendes Thema eines vernetzten Unterrichts (mit dem Kernfach Mathematik) zu thematisieren, zum Gegenstand von Erkundungen der Schüler zu machen, hat einen hohen Bildungswert und bietet gute Möglichkeiten für eine Vernetzung und der Herausbildung von Modellierungskompetenzen.

Jürgen Maaß (Linz) und Hans-Stefan Siller (Salzburg): *Unterrichtsvorschläge für den Mathematikunterricht zum Thema „Ernährung“*

Rund um das Thema Ernährung gibt es viele Fragen, deren Behandlung sich für realitätsbezogenen Mathematikunterricht anbieten.

Die medizinische und naturwissenschaftliche Sicht auf zu viel und zu wenig Nahrung, gesunde und weniger gesunde Nahrung bzw. ausgewogene Zusammensetzung und schädliche oder wertvolle Bestandteile der Nahrung ist stark mathematisch orientiert. Was „gesund“ ist, wird

mit Formeln und statischen Methoden bestimmt und definiert. Was in den einzelnen Nahrungsmitteln steckt, muss deutlich sichtbar als Tabelle mit allerlei Maßeinheiten auf die Verpackung von Nahrungsmitteln geschrieben werden und findet sich in vielen Internetseiten. Die Informationen sind also vielfältig vorhanden – doch was bedeuten sie? Welche Schlussfolgerungen lassen sich für das eigene Verhalten ziehen und werden gezogen?

Regina Bruder (Darmstadt): *Lerngelegenheiten für systematisches Argumentieren- und Modellierenlernen in den Sekundarstufen*

Wenn man Anwendungsaufgaben innerhalb eines bestimmten mathematischen Themas behandelt, ist für die Lernenden klar, dass es darum geht, genau diese mathematischen Inhalte auch anzuwenden. Mit dem mathematischen Modellieren verbindet sich jedoch die Vorstellung, dass geeignete mathematische Werkzeuge erst ausgewählt werden müssen. Dazu bedarf es geeigneter Lerngelegenheiten, die man als „komplexe Übungen und Anwendungen“ bezeichnen kann und die die Funktion eines „Trainingslagers“ zum Modellierenlernen übernehmen können. Auch die anderen prozessbezogenen Kompetenzen wie Argumentieren und Problemlösen lassen sich in solchen binnendifferenzierend angelegten Lernumgebungen gezielt ausbilden. Dieses „Trainingslagerkonzept“ wird an Beispielen vorgestellt.

Brigitte Leneke (Magdeburg): *Vernetzung durch Aufgabenvariation im Mathematikunterricht an einem Beispiel aus der Graphentheorie*

Durch Variation einer Aufgabe oder eines gelösten Problems findet man immer wieder neue Fragen und unerwartete bekannte, aber vielleicht auch unbekannt Zusammenhänge, die sowohl innermathematisch als auch außermathematisch sein können. Das Aufgabenvariieren ist also eine Tätigkeit, mit der junge wie ältere Schülerinnen und Schüler angeregt werden, selbst mathematische Fragen aufzuwerfen, zu diskutieren, zu hinterfragen, zu bewerten und sie dann natürlich auch zu lösen. Nicht selten stoßen sie dabei auf Probleme, die mit den bis dahin zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln und Methoden kaum oder nur sehr schwer zu bewältigen sind. Hier ergeben sich Möglichkeiten, die Schülerinnen und Schüler durch die Methode der Aufgabenvariation auch an neue Unterrichtsinhalte heranzuführen. So kann man z. B. ohne „große theoretische Einführung“ Elemente der „Graphentheorie“ nutzen. Dieses Teilgebiet der Diskreten Mathematik hat gerade in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Die Schülerinnen und Schüler lernen

eine weitere Möglichkeit der mathematischen Modellierung für viele praktische Problemstellungen kennen und verwenden diese dann als anschauliche Basis für das Finden weiterer interessanter Aufgabenvarianten.

Astrid Brinkmann (Münster) und Thomas Borys (Karlsruhe): *Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels Mind Maps und Concept Maps*
Mathematische Objekte (d. h. Begriffe, Lehrsätze, Beweise, Algorithmen, Formeln, Terme usw.) zeichnen sich durch ihren Beziehungsreichtum sowohl untereinander als auch zum „Rest der Welt“ aus: sie sind „vernetzt“. Auf die Vermittlung dieses Beziehungsgeflechts sollte im Mathematikunterricht mehr Wert gelegt werden, insbesondere auch, weil erfolgreiches Problemlösen eine gut vernetzte Wissensbasis voraussetzt. Hierfür lassen sich graphische Repräsentationen mathematischer Wissensnetze – wie Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Formen – als effiziente Unterrichtsmittel einsetzen. Das vollständige Tagungsprogramm mit Abstracts zu den einzelnen Beiträgen ist auf der Internetseite zu den Tagungen des Arbeitskreises <http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html> hinterlegt und kann unter http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen/Tagungsprogramm_2012_Passau.pdf heruntergeladen werden.

Weitere Tagungsordnungspunkte waren:

- Planung der nächsten Tagung: Die 5. Tagung des Arbeitskreises wird im Frühjahr 2013 in Darmstadt stattfinden und von Regina Bruder organisiert werden.
- Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann:
 - Bisher sind zwei Bände der Schriftenreihe

erschienen (Verlag Aulis).

- Für Band 3 (Bandherausgeber: Astrid Brinkmann, Matthias Brandl, Michael Bürker) liegen die meisten Beiträge vor.
- Weitere Beiträge für die Folgebände sind willkommen. Informationen und Formatvorlage findet man unter <http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html>.
- Zu den Bänden 1 bis 3 wird ein Materialband mit Kopiervorlagen für den Mathematikunterricht erarbeitet (Herausgeber: Astrid Brinkmann, Matthias Brandl, Jürgen Maaß).
- Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann (s.u.).
- Wahl der Sprecher des Arbeitskreises:
 - Der amtierende stellvertretende Sprecher des Arbeitskreises, Michael Bürker, steht für eine Wiederwahl nicht mehr zur Verfügung; es wird für die von ihm geleistete Arbeit gedankt.
 - Als Sprecherin des Arbeitskreises wird Astrid Brinkmann wiedergewählt (einstimmig).
 - Als stellvertretender Sprecher des Arbeitskreises wird Thomas Borys gewählt (einstimmig).
- Rückblick auf die Tagung: Es war wieder eine sehr gelungene und bereichernde Tagung mit vielen anregenden Beiträgen. Ein besonderer Dank gilt Matthias Brandl für seine Organisation.

Informationen zum Arbeitskreis können im Internet unter der Adresse <http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html> abgerufen werden. Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin des Arbeitskreises, Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de.