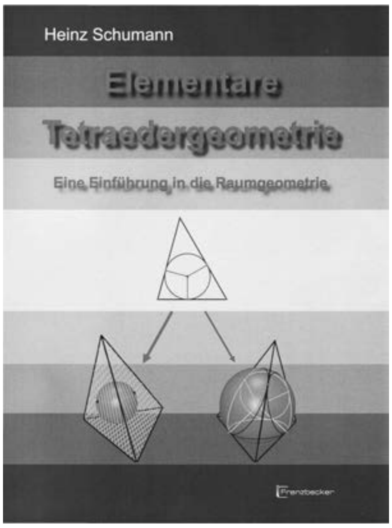
Heinz Schumann: Elementare Tetraedergeometrie

Rezensiert von Harald Scheid



Die vorliegende „Elementare Tetraedergeometrie“ von Heinz Schumann wendet sich an Studierende und Lehrende in Lehramtsstudiengängen, ist aber in vielen Teilen auch besonders interessierten Schülern zugänglich. Der Autor legt vor allem Wert auf die mathematische Standardmethode der Erkenntnisgewinnung, nämlich auf das Beweisen. Zur Konstruktion der zahlreichen Beweisfiguren benutzt er dabei das interaktive dynamische Raumgeometrie-System Cabri 3D.
Dem Begriff „elementar“ wird in dreierlei Hinsicht genüge getan: Es wird weitgehend die Elementargeometrie des Tetraeders behandelt, so wie sie bis Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt worden ist; die angewandte Beweismethodik ist elementarmathematisch, und der Stoff unterliegt der didaktischen Elementarisierung.
Das Buch scheint derzeit die umfassendste Monografie zur Tetraedergeometrie zu sein; ältere Monografien wie z. B. „Premier Livre du Tetraedre“ von Couderc und Balliccioni aus dem Jahr 1935 müssen zudem mit dem didaktischen Handicap leben, das schöne Cabri 3D nicht zur Verfügung zu haben. Aus dem sehr umfangreichen Literaturverzeichnis ist zu entnehmen, dass die Tetraeder-Geometrie nicht nur zu Crelles Zeiten eine Rolle spielte, sondern auch heute bei Mathematikern und Mathematikdidaktikern auf lebhaftes Interesse stößt. So weist der Autor auch auf neueste Literatur und auf die Bedeutung des Tetraeders für das solid modeling hin.
Eine CD mit der digitalen Version des Buches als

Hypertext mit den Abbildungen in Farbe liegt bei. Sie erlaubt die Manipulation der Raumfiguren sowohl zur besseren Raumvorstellung als auch zum experimentellen Erkennen von Zusammenhängen und zum Auffinden von Beweisideen.

Die „Elementare Tetraedergeometrie" leistet einen wichtigen Beitrag zu einer wünschenswerten Kursänderung in der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion, weg von einer zweifelhaften, aufgesetzten und auf sich selbst bezogenen Verwissenschaftlichung der Didaktik, hin zur Behandlung mathematischer Themen, welche Lernenden und Lehrenden ein vernünftiges Bild vom Mathematik vermitteln, also hin zur vielgeschmähten Stoffdidaktik. Und wie schon vor 2000 Jahren liefert hier die Geometrie Musterbeispiele für lokale Theoriebildungen und für „verstehende Rezeption von Begriffen, Sätzen und Beweisen", wie Heinz Schumann bemerkt, also für das, was wesentlich zur Erfüllung des Bildungsauftrags der Mathematik gehört.

Der Text setzt auf heuristische Methoden zur Erkenntnisgewinnung, wobei natürlich zunächst der Einsatz von Cabri 3D zu nennen ist; ganz zentral ist aber die Idee der Analogisierung, und zwar bei der Begriffsbildung, beim Aufspüren von Sätzen, bei Konstruktionsproblemen und ganz wesentlich beim Beweisen. Analogisiert wird die Dreiecksgeometrie, wobei sich natürlich ständig die spannende Frage nach der korrekten Analogisierung bzw. nach den möglichen Formen der Analogisierung stellt. Schon die Abbildung auf dem Buchumschlag zeigt diese Idee: Das Analogon des Inkreises eines Dreiecks kann einerseits die Kugel sein, welche die Seitenflächen des Tetraeders berührt, es kann aber auch die Kugel sein, welche die Kanten des Tetraeders berührt (wobei im zweiten Fall die Frage nach des Existenz nicht banal ist).

In den Beweisen werden synthetisch-geometrische Methoden benutzt, wozu auch die Trigonometrie zu rechnen ist, es werden aber auch vielfach analytische Methoden (Vektorrechnung, Koordinatenrechnung) verwendet, wenn die synthetisch-geometrische Methode nicht erfolgreich ist. Beweisideen bezieht man aus der Darstellung des Sachverhalts mit Cabri 3D oder dem Beweis des analogen Sachverhalts für Dreiecke. Konstruktionen kann man einerseits mit Cabri 3D ausführen, andererseits kann man das Tetraedernetz oder das dem Tetraeder umbeschriebene Parallelepiped benutzen.

Nun zum Inhalt des Buches im Überblick: Kapitel 1 befasst sich mit Spezialformen von Tetraedern, und zwar mit gleichkantigen (regulären), gleichseitigen (kongruente Seitendreiecke), rechtwinkligen (Ecke mit paarweise orthogonalen Kanten) und rechteckigen (rechtwinklige Seitendreiecke), die im Wesentlichen ohne Aussagen über das allgemeine Tetraeder bearbeitet werden können. Kapitel 2 ist dem allgemeinen Tetraeder gewidmet. Kapitel 3 behandelt dann wieder Spezialformen, nämlich Tetraeder mit Höhenschnittpunkt, Tetraeder mit kantenberührender Kugel und Tetraeder mit gleichen Gegenkantenprodukten, deren Behandlung Aussagen über allgemeine Tetraeder voraussetzen. Im Anhang findet man einige grundlegende Dinge zur Raumgeometrie (Begriffe, Sätze, Konstruktionen).

Zum Inhalt im Einzelnen: Die in Kapitel 1 entdeckten Eigenschaften der speziellen Tetraeder weisen darauf hin, nach welchen Eigenschaften man beim allgemeinen Tetraeder suchen könnte, bzw., falls es sich um kennzeichnende Eigenschaften handelt, besser nicht suchen sollte. Eine solche kennzeichnende Eigenschaft der gleichseitigen Tetraeder besteht darin, dass die Mittelpunkte von Inkugel und Umkugel sowie der Schwerpunkt zusammenfallen. Für ein gleichseitiges Tetraeder lassen sich z.B. das Volumen, die Höhe, der Inkugelradius und der Umkugelradius aus den drei gegebenen Kantenlängen oder auch aus den drei gegebenen Abständen gegenüberliegender Kanten berechnen, beim allgemeinen Tetraeder geht das aber nicht so einfach. In Analogisierung des Neunpunktekreises eines (beliebigen) Dreiecks findet man beim gleichseitigen Tetraeder die 12-Punkte-Kugel (Mittelpunkt ist der Inkugelmittelpunkt), welche durch die Lotfußpunkte der Höhen, die Mittelpunkte der Höhenabschnitte (an den Ecken) und die Schnittpunkte der Höhen der Seitendreiecke geht. Ferner ergeben sich interessante Aussagen über die Ankugeln und das Höhen-Hyperboloid gleichseitiger Tetraeder. Für rechtwinklige Tetraeder findet man räumliche Analoga zum Satz des Pythagoras, zum Höhensatz und zum Kathetensatz. Interessanterweise ist die Umkehrung des räumlichen Satzes von Pythagoras falsch; ist $ABCD$ ein Tetraeder mit der Rechtwinkelecke D, dann gilt $|ABX|^2+|ACX|^2+|BCX|^2 = |ABC|^2$ für alle X, die auf einem gewissen Ellipsoid durch A, B, C, D liegen, und nicht nur für $X = D$. Den Abschluss von Kapitel 1 bilden die rechteckigen Tetraeder (vier rechtwinklige Seitendreiecke), welche ebenfalls interessante Eigenschaften und Berechnungsmöglichkeiten bieten und sich der Analogiebildung entziehen.

Kapitel 2 bildet den Hauptteil des Buchs, welcher durch Kapitel 1 bestens vorbereitet ist. Es beginnt mit einer Klassifikation der Tetraeder anhand der möglichen Deckabbildungen. Zu den 8 Symmetrieklassen werden die Konstruktionen aus Dreiecken bzw. aus Kanten und die umbeschriebenen Parallelepipede angeführt. Letztere konstruiert man mit Hilfe einer Punktspiegelung am Schwerpunkt des Tetraeders. Es folgen Sätze über die Winkel am Tetraeder, wobei Kantenwinkel, Flächenwinkel und Raumwinkel zu unterscheiden sind. Tetraederkonstruktionen aus gegebenen Bestimmungsstücken sind wesentlich vielfältiger als die analogen Konstruktionen von Dreiecken, die Existenzbedingungen (z. B. Tetraederungleichung) und Eindeutigkeitsbedingungen (Kongruenzsätze) erweisen sich auch als wesentlich komplexer als die analogen Aussagen bei Dreiecken. Nach Umkugel und Inkugel werden als Analoga zu den Ankreisen von Dreiecken flächenberührende Kugeln des Tetraeders untersucht, was wieder einige Überraschungen und spannende Berechnungsmöglichkeiten bietet. Nicht minder spannend ist der „Schwerpunkt": Sind in einem Dreieck die Ecken oder die Seiten oder die Fläche homogen mit Masse belegt, dann kann man den Eckenschwerpunkt, den Seitenschwerpunkt oder den Flächenschwerpunkt berechnen; Eckenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt stimmen überein (Schwerpunkt S), der Seitenschwerpunkt ist aber i. A. von S verschieden. Beim Tetraeder ist der Eckenschwerpunkt gleich dem Volumenschwerpunkt S, der Kantenschwerpunkt und der Seitenschwerpunkt sind aber von S und voneinander verschieden, wenn es sich nicht gerade um ein reguläres Tetraeder handelt. Die Tatsache, dass sich die Höhen eines Tetraders i. A. nicht in einem Punkt schneiden, gibt in Kapitel 3 Anlass zur Untersuchung von Tetraders mit Höhenschnittpunkt (orthozentrische Tetraeder). Es wird gezeigt, dass die Höhen auf einen Hyperboloid liegen (Höhen-Hyperboloid des Tetraeders). Didaktisch gelungen ist auch der Zugang zum Punkt von Monge. Nach weitere Berechnungen (Volumenformeln, Sinussätze und Kosinussätze am Tetraeder, Tetraederungleichungen) folgen die Sätze von Menelaos und Ceva für Tetraeder, die Behandlung von Gergonne-Punkt und Lemoine-Punkt und schließlich die Sätze von Miquel und Desargues für Tetraeder. Besonders ansprechend sind auch die Extremwertbetrachtungen, bei denen es um die Minimierung der Oberfläche von Tetraedern verschiedener Formen geht. Bei der Analogisierung besonderer Dreieckszentren ergibt sich eine Fülle von ungelösten Problemen für das Tetraeder. Kapitel 3 behandelt drei Spezialfälle, nämlich Tetraeder mit Höhenschnittpunkt (s. o.), mit kantenberührender Kugel und mit gleichen Gegenkantenprodukten (isodynamische Tetraeder). Beim orthozentrischen Tetraeder existiert wie beim Dreieck die eulersche Gerade; der Neunpunktekreis (Feuerbach-Kreis) des Dreiecks lässt sich auf zwei verschiedene Arten zur Zwölfpunktekugel eines orthozentrischen Tetraeders analogisieren. Bei der Gewinnung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Höhenschnittpunkts und einer kantenberührenden Kugel hilft natürlich die Analogisierung zum Dreieck nichts, denn das Dreieck hat diese Probleme ja nicht. Existiert sowohl der Höhenschnittpunkt als auch die kantenberührende Kugel, dann ist das Tetraeder eine gerade dreiseitige Pyramide. Sind (a, a'), (b, b'), (c, c') die Längen einander gegenüberliegender Kanten, dann gilt für orthozentrische Tetraeder $a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2$ und für Tetraeder mit kantenberührender Kugel $a + a' = b + b' = c + c'$; für isodynamische Tetraeder soll dann $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c'$ gelten. Diese Gleichungen zeigen, warum gerade diese drei Spezialformen des Tetraeders auf besonderes Interesse stoßen.

Nach Durcharbeitung des Buchs von Heinz Schumann muss der Rezensent den eingangs genannten Adressaten weitere hinzugefügen: Mathematiker (oder auch Laien mit umfangreichen mathematischen Kenntnissen), welche die Schönheit der Geometrie erleben wollen und gleichzeitig ihren geometrischen Spieltrieb befriedigen möchten. Jedenfalls ist dem Buch eine weite Verbreitung zu wünschen, und es ist zu hoffen, dass es in der geometrischen Ausbildung von Mathematiklehrern und damit letztlich in der Schulmathematik neue Impulse gibt.

Heinz Schumann: *Elementare Tetradergeometrie. Eine Einführung in die Raumgeometrie*. Franzbecker 2011, ISBN 978-3-88120-520-7