Hans-Joachim Gorski und Susanne Müller-Philipp: Leitfaden Arithmetik

Rezensiert von Joachim Gräter

Das Buch *Leitfaden Arithmetik* von Hans-Joachim Gorski und Susanne Müller-Philipp gibt es nun schon seit über zehn Jahren und steht mittlerweile in der sechsten Auflage den Leserinnen und Lesern zur Verfügung. Es ist konzipiert als Lehrbuch für zukünftige Lehrerinnen und Lehrer vor allem an Grund-, Haupt- und Realschulen, wendet sich aber generell an jene, die Mathematik an der Schule unterrichten oder unterrichten werden. Die Ausbildung von zukünftigen Lehrkräften ist ein wichtiges Thema, das uns alle angeht. Es betrifft nämlich diejenigen, die einmal unsere (zukünftigen) Enkel, aber auch die zukünftigen Studentinnen und Studenten unserer Universitäten unterrichten werden. Darum war es für mich besonders interessant, den *Leitfaden Arithmetik* genau zu lesen, um zu erfahren, welche Schwerpunkte die Autoren als Vertreter der Didaktik der Mathematik hier setzen und wie sie die Mathematik den Studierenden präsentieren.

Das Gebiet Algebra und Arithmetik ist wichtiger und fester Bestandteil eines jeden Lehramtsstudiums für Mathematik. Vorrangig wird zum Beispiel der Aufbau des Zahlensystems aus algebraischer Sicht behandelt: Konstruktion von Quotientenkörpern, Teilertheorie in euklidischen Ringen, elementare Gruppentheorie mit verschiedenen Anwendungen zum Beispiel in der Geometrie, Faktorgruppen und Faktorringe mit Anwendungen in der Modulo-Rechnung, der Körper der reellen Zahlen als vollständiger archimedisch geordneter Körper, Darstellungen rationaler und reeller Zahlen, die komplexen Zahlen usw. Das sind alles elementare Aspekte der Algebra und Arithmetik, die unmittelbar zu schulrelevanten Themen führen. Diese jedoch werden nach dem Willen der Autoren in dem vorliegenden Buch nicht behandelt. Es muss wohl davon ausgegangen werden, dass die Studierenden hier zusätzliche Lehrveranstaltungen besuchen müssen, und so wird auch deutlich darauf verwiesen, dass *gewisse Grundkenntnisse über algebraische Strukturen vorausgesetzt werden*. Es stellt sich daher die Frage, welche Aufgabe dieses Buch in der Lehramtsausbildung haben soll.

Schon beim ersten Stöbern im *Leitfaden Arithmetik* fällt auf, dass im zahlentheoretischen Teil, der immerhin zwei Drittel des Buches ausmacht, im Grunde keine mathematischen Inhalte vermittelt werden, die über das hinausgehen, was man interessierten Schülerinnen und Schülern an der Schule vermitteln kann. Für einen Beitrag zur Ausbildung von angehenden Lehrerinnen und Lehrern im Rahmen eines Universitätsstudiums finde ich das doch ein bisschen zu wenig. Auffallend ist weiterhin, dass in dem Buch nichts vom höheren Standpunkt aus betrachtet wird, so dass die Lehrerinnen und Lehrer dann später im Unterricht souverän aus dem Vollen schöpften könnten. Zum Beispiel fehlen Hinweise darauf, welche zahlentheoretischen Inhalte sich dem soeben Erlernten anschließen und wo man sich hier kundig machen kann. Das selbstständige Aneignen zusätzlichen Wissens wird auch noch dadurch erschwert, dass die Autoren offenbar nicht bereit waren, die Themen so darzustellen, die Symbolik und Begriffe so einzuführen, wie es nun einmal in der Mathematik üblich ist. Damit ist der Griff zum weiterführenden Buch unnötig erschwert. Immer wieder beklagen sich die Studierenden des ersten Semesters darüber, dass die Mathematik, wie sie in den Vorlesungen gelehrt wird, kaum etwas damit zu tun hat, was sie aus der Schule her kennen. Zumindest die Lehrerinnen und Lehrer sollten wissen, wie sich die Schulmathematik in der Mathematik wiederfindet, die über Jahrhunderte von scharfsinnigen und geistreichen Mathematikerinnen und Mathematikern entwickelt wurde. Das vorliegende Buch trägt hierzu nicht bei. Trotz aller Anerkennung der Arbeit und Mühen, die die Autoren beim Schreiben des vorliegenden Werkes hatten, kann ich mich nach gründlichem und sorgfältigem Studium für den *Leitfaden Arithmetik* nicht erwärmen und ihn für die universitäre Ausbildung in den Lehramtsstudiengängen für Mathematik nicht empfehlen. Im Folgenden möchte ich nun an einigen wenigen Beispielen erläutern, wie meine Einschätzung und Beurteilung zustande gekommen ist. Dabei kann ich mich natürlich nicht auf alle Stellen beziehen, die ich für wichtig halte, und werde daher nur exemplarisch auf meiner Meinung nach besonders deutliche und markante Mängel hinweisen.

Bereits auf dem äußeren Buchdeckel werden grundlegende Beweistechniken als wichtiger

Bestandteil des Buches erwähnt. So wird auf den Seiten 4 und 5 der Widerspruchsbeweis wie üblich erläutert, und als Beispiel beweisen die Autoren, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: Ist n ungerade, so auch n^2. Dazu nehmen sie an, dass n^2 gerade ist, beweisen dann aber auf direktem Wege, dass aus *n ungerade* unmittelbar *n^2 ungerade* folgt. Damit erhalten sie also einen Widerspruch, weil sie doch *n^2 gerade* angenommen haben. So etwas Unsinniges darf in keinem Mathematikbuch stehen! Hier noch ein zweites Beispiel, das sich auf Seite 98 befindet. In üblicher Schreibweise ist für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen: Sind $a + m\mathbb{Z}$ und $b + m\mathbb{Z}$ verschieden, so sind $a + m\mathbb{Z}$ und $b + m\mathbb{Z}$ disjunkt. Mit dem Hinweis *Beweis indirekt* wird angenommen, dass $a + m\mathbb{Z}$ und $b + m\mathbb{Z}$ nicht disjunkt sind, und hieraus direkt gefolgert, dass $a + m\mathbb{Z}$ und $b + m\mathbb{Z}$ gleich sind: Widerspruch. Das ist aber kein Widerspruchsbeweis, sondern ein Beweis durch Kontraposition, der nach Angaben der Autoren auf Seite 5 gerne mit dem Widerspruchsbeweis verwechselt wird. Dort bemühen sich die Autoren offenbar vergeblich um ein *tieferes Verständnis des Kontrapositionsbeweises*. Hieraus können die Studierenden nur lernen, wie man es nicht machen sollte.

Auf Seite 8 erscheint der *Induktionssatz* ohne Beweis und ohne irgendeine Erklärung oder Erläuterung. Auf Seite 28 wird dann in der Fußnote auf das *Induktionsaxiom* verwiesen. Da muss wohl die Frage erlaubt sein, wer bei einer solchen Darstellung lernen kann, was Sätze oder Axiome sind und was man bei Beweisen für die natürlichen Zahlen voraussetzen darf oder was dann letztendlich bewiesen werden muss. Ich möchte an dieser Stelle den Autoren dringend empfehlen, entgegen ihrer eigenen Planung doch einmal die Peano-Axiome vorzustellen und den Studierenden kurz die Bausteine der Arithmetik klar vor Augen zu führen. Schließlich wird im Buche dann die vollständige Induktion lang und breit erklärt, sogar mit der Variante, bei der der Induktionsanfang nicht bei 1 sein muss. Aber leider beweisen die Autoren gleich Satz 2 auf Seite 28 entgegen ihrer Ankündigung nicht durch die vollständige Induktion, wie sie zuvor eingeführt wurde. Dazu muss man sich lediglich die Aussage des Satzes und die Induktionsvoraussetzung einmal genauer anschauen. Und in der Tat, hätte man die Induktionsvoraussetzung so gewählt, wie sie der Aussage des Satzes entspräche, so wäre der Induktionsschluss nicht möglich. So etwas darf in einem Buch wie diesem einfach nicht passieren. Und jetzt noch abschließend zu diesem Thema folgendes Beispiel. Auf Seite xiv steht: *Jede endliche Menge ganzer Zahlen besitzt ein kleinstes Element (Wohlordnung)*. Das klingt eigentümlich, ist doch die Wohlordnung im Zusammenhang mit endlichen Mengen etwas zu gewaltig, und man ahnt nichts Gutes: Auf Seite 21 wird erklärt, dass die Menge $T(a)$ der positiven Teiler einer natürlichen Zahl a endlich ist und auf Seite 28 wird dann erklärt, dass sie nun wegen der Wohlordnung von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element besitzt. Da ist man natürlich gespannt, wie die Existenz eines größten Elementes gezeigt wird, zum Beispiel im Zusammenhang mit dem Begriff des größten gemeinsamen Teilers. Und tatsächlich, auf Seite 56 wird diese Frage zwar aufgeworfen, aber eine korrekte Argumentation bleibt aus. Mein Tipp für die Autoren: Stellen Sie im Abschnitt mit den Peano-Axiomen folgende Aufgabe: *Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass jede n-elementige Menge natürlicher Zahlen ein größtes und ein kleinstes Element besitzt*. Und als zweite Aufgabe könnte folgen: *Gilt eine entsprechende Aussage auch für n-elementige Mengen reeller Zahlen?* Damit wäre in diesem Zusammenhang dann schon alles zu diesem Thema gesagt.

Die Mathematik hat wie alle Wissenschaftsdisziplinen eine eigene Sprache. Sie ermöglicht es, in der Mathematik Aussagen genau zu formulieren und Beweise nachvollziehbar zu dokumentieren. Dabei geht es aber nicht um leeren Formalismus, sondern um Strukturierung und Genauigkeit, wobei man gerne (wie viele andere auch) die übliche Sprache benutzen darf. Wenn jedoch der Formelkalkül der mathematischen Logik benutzt werden soll, dann aber bitte richtig. Formulierungen wie „$\forall a \in M$ gilt:“ und „$\exists a \in M$ mit:“ und fehlende Klammern sind der absolute Sündenfall. So findet man auf Seite 8 zum Beispiel: „$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Rightarrow (n+1) \in M$“ und „*Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $m \mid a - a \Rightarrow a \equiv a \mod m$ für alle $a \in \mathbb{Z}$*“ auf Seite 91. Auch so etwas darf in keinem Mathematikbuch stehen. Niemand käme auf die Idee, in Lehrbüchern für Studierende des Lehramts der Fachrichtung Deutsch auf den Genitiv zu verzichten und stattdessen den Dativ zu verwenden. Vielmehr wäre es doch wohl selbstverständlich zu versuchen, sich korrekt der deutschen Sprache zu bedienen. Weiterhin möchte ich an dieser Stelle den Autoren empfehlen, zum Beispiel den Begriff *Ring* so zu definieren, wie es in den unzähligen guten Algebra-Büchern auch getan wird. Möglicherweise entspricht die Formulierung *Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $L(a,b)=W(\mathrm{ggT}(a,b))$* von Seite 75 den Gepflogenheiten der Didaktik der Mathematik. Allerdings habe ich sie bis jetzt in keinem Buch der Mathematik gesehen, und es erschließt sich mir auch nicht, warum gerade diese Darstellung verständlicher sein soll, als die folgende, welche in üblicher mathematischer Sprache verfasst ist: *Für alle $a, b, d \in \mathbb{N}$ gilt: Genau dann ist d ein ggT von a und b, wenn $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$*. Und dabei könnte man auch gleich ergänzen: *Für alle* $a, b, d \in \mathbb{N}$ *gilt: Genau dann ist* d *ein kgV von* a *und* b, *wenn* $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. So einfach und verständlich kann man Mathematik korrekt formulieren.

Nun noch kurz zur Auswahl und Darstellung zahlentheoretischer Sätze. Dabei beziehe ich mich lediglich auf den neu eingefügten Abschnitt *Kryptologie*, der in meinen Augen einfach nur ein Ärgernis ist. Ganz offensichtlich wurde hier ohne jedes Feingefühl für Zahlentheorie unreflektiert Wissen aus anderen Quellen ohne Bezug auf das zuvor Dargestellte übernommen. Die Untersuchungen der primen Restklassen modulo n gehören zum ersten zahlentheoretischen Thema, das über das Schulniveau hinausgeht. Behandelt wird hier für den Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Einheitengruppe, deren Elementzahl mit $\varphi(n)$ bezeichnet wird. In der elementaren Zahlentheorie nimmt die Eulersche φ-Funktion eine zentrale Rolle ein. Thematisch gehört sie also zu Kapitel 5, zum Beispiel als Abschnitt 5.7. Auf jeden Fall ist sie nicht Stückwerk oder Hilfsfunktion des RSA-Algorithmus, so wie es ein Unbedarfter beim Lesen des Buches vermuten würde. Eine zentrale Eigenschaft der Eulerschen φ-Funktion ist die Multiplikativität, die zum Beispiel mithilfe des Chinesischen Restsatzes bewiesen werden kann. Aus meiner Sicht unerträglich ist es nun, dass hierüber im Buch nichts geschrieben steht. Noch schlimmer, die Multiplikativität wird lediglich im Spezialfall $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$ mit verschiedenen Primzahlen p und q erwähnt und es wird auch nur $\varphi(p)$ für primes p berechnet. Und das alles, weil beim RSA-Algorithmus nicht mehr als das benötigt wird. Das ist einfach ganz schlechter Stil. Im gleichen Zusammenhang wird weiterhin erwähnt, dass es mehr als 10^{97} Primzahlen mit bis zu einhundert Stellen gibt. Das ist doch zweifelsohne eine sehr interessante Aussage. Und auch hier gibt es nicht den geringsten Hinweis darüber, wie eine solche Abschätzung zustande kommt. Der Primzahlsatz ist ein Meilenstein der (analytischen) Zahlentheorie und kann ohne Mühe allgemeinverständlich formuliert werden. Falls die Autoren sich thematisch nicht mit dem asymptotischen Verhalten reeller Funktionen auseinandersetzen wollen, dann können doch wenigstens andere feste (also nicht asymptotische) Schranken für $\pi(x)$ angegeben werden, welche die obige Abschätzung erläutern. Mein Eindruck ist, dass Studierende an solchen Erkenntnissen sehr interessiert sind. Bewunderung und Staunen über solche Meisterleistungen des Denkens gehören einfach auch dazu und wirken durchaus motivierend. Erst kürzlich hatte in meinem Seminar eine Lehramtsstudentin den elementaren, aber scharfsinnigen Beweis für den in diesem Zusammenhang bekannten Satz von Tschebyscheff vorgeführt.

Nach meinen Erfahrungen der letzten Jahre sind die meisten Studentinnen und Studenten aller Lehramtsstudiengänge in Mathematik sehr daran interessiert zu erfahren und zu erleben, wie exaktes mathematisches Argumentieren ohne großen Formalismus funktioniert. Grundsätzlich sind sie auch bereit, sich die Sprache der Mathematik anzueignen, obwohl es ihnen oft schwer fällt und sie hierbei meistens hart an sich arbeiten müssen. Sie sind offen für feinsinnige Argumente und interessante mathematische Zusammenhänge und wünschen sich, dass sich ihr Wissen Schritt für Schritt logisch und nachvollziehbar von den Grundlagen her entwickelt. Je nach Begabung und Talent werden dabei unterschiedliche Höhen der Abstraktion erreicht. Dabei ist es ihnen primär nicht wichtig, ob die angebotene Mathematik unmittelbar schulrelevant ist. Die Studierenden entwickeln oftmals recht schnell ein gutes Gespür dafür, was wirklich interessant ist, wenn man ihnen hierfür genügend Zeit lässt. Ob den angehenden Lehrerinnen und Lehrern hierbei das vorliegende Buch *Leitfaden Arithmetik* tatsächlich gerecht wird, wage ich zu bezweifeln, zumal sich das Buch auch nicht selten einer Sprache bedient, die eher für Kinder oder Jugendliche, nicht aber für Erwachsene geeignet ist.

Ich würde mir von einem Leitfaden Arithmetik für Lehramtsstudierende Folgendes wünschen:

- korrekte und nachvollziehbare Beweise mit durchschaubarer Struktur ohne viel Formalismus,
- Einführung von Begriffen und Verwendung von Symbolik, wie sie in der Mathematik üblich sind,
- Darstellung der Arithmetik im abstrakteren Kontext der Algebra,
- Inhalte, die erkennbar über das Schulniveau hinausgehen,
- Ausblicke auf weiterführende oder vertiefende Resultate der Arithmetik (Zahlentheorie),
- Vermittlung des Gefühls für Freude an Arithmetik, das an Schülerinnen und Schüler weitergegeben werden kann.

Gorski, H.J.; Müller-Philipp, S.: *Leitfaden Arithmetik für Studierende der Lehrämter.* Vieweg + Teubner. Wiesbaden (2012), 6. Auflage