Arnold Kirsch und der Begriff *Größenbereich*

Heinz Griesel

Defizite in der wissenschaftlichen Bearbeitung von Inhaltsbereichen der Schulmathematik

Als die Didaktik der Mathematik sich in den 1950er Jahren anschickte, eine eigenständige wissenschaftliche Disziplin zu werden, musste konstatiert werden, dass Teile des mathematischen Schulstoffes bisher noch keine grundlegende, zusammenhängende fachinhaltliche Bearbeitung erfahren hatten. Dieses Defizit betraf u. a. den *genetischen, anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems* und die sog. *Schlussrechnung (Dreisatzrechnung)*.

Zwar existierte ein genetischer Aufbau des Zahlensystems, doch war dieser rein innermathematisch, also anwendungsfern. So klaffte z. B. zwischen der in der Schule unterrichteten *Bruchrechnung* und der an den Universitäten üblichen *Einführung der (positiven) rationalen Zahlen* und deren Verknüpfungen Addition und Multiplikation eine große Lücke.

Natürlich wurde im Zuge der Wissenschaftsorientierung des Unterrichts (Griesel 1997a) der Versuch unternommen, das Curriculum zum Aufbau des Zahlensystems stärker an die Universitätsmathematik anzugleichen. Diese Tendenz war in der DDR stärker zu erkennen als in der BRD. Alle diese Versuche mussten jedoch letztlich als gescheitert angesehen werden.

Aus ersten Versuchen von mir (Griesel 1959), diese Lücke zu schließen, kam es zu einer Zusammenarbeit und späteren persönlichen Freundschaft zwischen Arnold Kirsch und mir.

Auch für Gebiete des *Sachrechnens*, z. B. für die *Dreisatzrechnung* (sog. *Schlussrechnung*) existierte keine wissenschaftliche Bearbeitung in der Wissenschaft *Mathematik*.

Zur Definition des Begriffs *Größenbereich*

Wir stellten schnell fest, dass *Größen* eine zentrale Rolle spielten, und zwar vor allem die Größen *Anzahl, Länge, Flächeninhalt, Volumen, Masse, Zeitdauer* und *Geld*. Sie kommen als Unterrichtsgegenstand schon in der Grundschule vor und mussten daher genauer betrachtet und wissenschaftlich bearbeitet werden. Die Worte *Größe* oder *Größenwert* kamen bis dahin fast nicht in Lehrplänen und Schulbüchern vor. Man sprach bei Termen wie 7 cm oder 250 kg von *benannten Zahlen*. Das änderte sich jetzt, übrigens auch in der DDR.

Größen spielten aber auch eine Rolle beim *anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems.*

Doch wie war der Begriff *Größe* zu definieren? Als erster hat dies Lugowski versucht (Lugowski 1962). Er führte den Begriff *Größenbereich* ein. Größen waren Elemente eines solchen Größenbereichs. Dies geschah in seiner Habilitationsschrift an der PH Potsdam (DDR).

Durchgesetzt hat sich jedoch die Definition von Kirsch (1970). Im seinem Buch *Elementare Zahlen- und Größenbereiche* gibt Arnold Kirsch einen anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems auf der Basis des Begriffs *Größenbereich* nach dem damaligen Erkenntnisstand an. Das war eine epochale Leistung.

Arnold Kirsch definiert den Begriff *Größenbereich* als angeordnete, kommutative Halbgruppe $(G, +, <)$, für die zusätzlich gilt: $x < y \Leftrightarrow \exists z \in G : x + z = y$ (für alle $x, y \in G$).

Die oben aufgezählten Größen bilden jeweils einen Größenbereich.

Einen anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems, wie ihn Arnold Kirsch in seinem Buch angibt, hatte schon der weltberühmte Pionier der modernen Logik Gottlob Frege in seinem Werk *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege 1893 und 1903) durchführen wollen, allerdings nicht vollständig zu Ende gebracht, weil Bertrand Russel inzwischen aus den mengentheoretischen Überlegungen Freges die später sog. *Russellsche Antinomie* gefolgert hatte. Frege war so schwer getroffen, dass er sein Werk *Grundgesetze der Arithmetik* unvollendet ließ.

Frege lehnte einen anwendungsfreien, innermathematischen Aufbau des Zahlensystems ab, wie er überhaupt eine Mathematik ohne ontologische Bindung, wie sie Hilbert propagierte, ablehnte. Er verlangte, dass die *Verwendung der Zahlen zum Messen* in deren Definition mit einzubeziehen sei (vgl. Griesel 2007). Er führte dazu den Begriff *Größengebiet* ein. Doch verwendete er dabei seine *Begriffsschrift*, die nur sehr mühsam zu lesen und zu verstehen ist. Wir Didaktiker haben das nie versucht, so dass wir auch nicht entdeckt haben, dass eine Rekonstruktion der Überlegungen Freges mit den Mitteln der modernen Strukturmathematik zu dem Ergebnis geführt hätte, dass *Größengebiet nach Frege* und *Größenbereich nach Kirsch* übereinstimmen. Erst die philosophische Neo-Frege-Bewegung mit Crispin Wright (St.

Andrews) und Bob Hale (Sheffield) als Hauptvertreter hat das Werk *Grundgesetze der Arithmetik* von Frege aufgearbeitet und dieses Ergebnis erkennbar gemacht (Hale and Wright 2001, S. 405, Griesel 2007). Immerhin wird dadurch die grundsätzliche Bedeutung der Definition von Kirsch unterstrichen.

Größenbereich und Schlussrechnung

Der Begriff *Größenbereich* erwies sich noch in einer weiteren Hinsicht als bedeutsam.

In seiner ebenfalls epochalen Arbeit *Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung* (Kirsch 1969) zeigte Arnold Kirsch nämlich, dass bei den Aufgaben der Schlussrechnung jeweils Situationen vorliegen, bei denen eine sog. *proportionale Abbildung eines Größenbereichs auf einen anderen Größenbereich* bzw. *auf denselben Größenbereich* existiert und entsprechend definiert werden kann.

Diese Arbeit hat einen großen Einfluss auf die Lehrpläne der Bundesländer und die Curricula der Schulbücher ausgeübt. Statt von *ist proportional zu* wurde jetzt in fast allen Lehrplänen, in den Lehrbüchern und im Unterricht von *proportionalen Zuordnungen* gesprochen. Das wäre möglicherweise nicht so gekommen, wenn es nicht auf Anhieb gelungen wäre, ein sehr praktikables Curriculum der Schlussrechnung zu entwickeln, das in der Lehrerschaft Zuspruch und in Lehrbüchern nachahmende Anregung fand. Das war damals (in den 1970er Jahren) eine Gemeinschaftsarbeit, an der außer Arnold Kirsch und mir vor allem Helmut Postel, Erwin Hollmann und Gerhard Holland beteiligt waren.

Übrigens hat man damals auch in der ehemaligen DDR versucht, der sog. Schlussrechnung eine mathematische Grundlegung zu geben, deren Ergebnisse auch bis in das Curriculum des dortigen Einheitsschulbuchs vorgedrungen waren. Es würde zu weit führen, das hier im Einzelnen darzustellen. Immerhin hat man damals in Ost und West das gleiche Problem erkannt und wissenschaftlich zu bearbeiten versucht.

Vom Begriff *Größenbereich* zum Begriff der *Größe*

Nichts ist so gut, dass es nicht weiterentwickelt werden sollte.

Arnold Kirsch hatte damals noch nicht die Relation *ist proportional zu* definieren können. Nur der Begriff der *proportionalen Zuordnung* war von ihm eingeführt worden. Es gelang nämlich nicht, mathematische Objekte zu identifizieren, zwischen denen diese Relation besteht. Das ist erst später gelungen. Dazu bedurfte es der Unterscheidung von *Größe* und *Größenwert*. Zwischen Größen, die in dieselbe Anwendungssituation eingebunden sind, kann die Relation *ist proportional zu* bestehen.

Auch war es nicht möglich, bestimmte Größen als Größenbereich aufzufassen. Dazu gehörten u. a. die *thermodynamische Temperatur* mit der Einheit K (Kelvin) sowie physiologische Größen, wie die *Lautheit*. Das lag darin begründet, dass der Begriff *Größenbereich* eine additive Struktur hat, das Messen aber eine multiplikative Struktur darstellt. Messen ist nämlich multiplikatives Vergleichen. Eine Strecke ist 25 cm lang bedeutet, sie ist 25-*mal* so lang wie 1 cm.

Größen sind also Merkmale mit (in der Regel) mehreren Werten (Ausprägungen), die multiplikativ verglichen werden können. Das multiplikative Vergleichen, also das Messen, kann man durch einen Quotienten $x/y = \mu$ mit Werten μ in einer Zahlenmenge (lies: x gemessen mit y ergibt μ) beschreiben. Dieser Quotient muss (und darin besteht die Präzision des Begriffs *multiplikatives Vergleichen*) die folgenden Bedingungen erfüllen (Griesel 1997):

(1) $(x/y) \cdot (y/z) = (x/z)$

(2) Wenn $x/y = 1$, dann $x = y$.

Der Begriff *Größenbereich* ist dadurch nicht überflüssig geworden. Man sollte aber besser von einem *Zusammenfügungsbereich* sprechen, weil das eher der begleitenden Vorstellung entspricht, die zu diesem Begriff gehört. (Griesel 2013)

Arnold Kirsch hat diese Weiterentwicklung seiner Theorie mit großem Interesse verfolgt und sogar in einzelnen Briefen an junge Nachwuchsleute ausführlich verständlich gemacht und erklärt.

Zum anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems

Man kann den Inhalt des Buchs *Elementare Zahlen- und Größenbereich* von Arnold Kirsch (1970) als die Realisierung des Programms ansehen, das Gottlob Frege mit seinem unvollendeten Werk *Grundgesetze der Arithmetik* in Angriff genommen hatte.

Doch hat sich auch hier eine Weiterentwicklung ergeben. In dem Buch erfolgt nämlich ein anwendungsorientierter Aufbau nur für die *positiven* Zahlen. Inzwischen ist es auch gelungen, den Aufbau für negative Zahlen, ja sogar für komplexe Zahlen so zu gestalten, wie Frege es wollte, nämlich die *Verwendung der Zahlen zum Messen* als zentral anzusehen. Auch ist es gelungen, beim Aufbau des Zahlensystems von vornherein eine *einheitliche ontologische Bindung der Addition und Multiplikation* einzubeziehen. (Griesel 2003, 2005, 2006, 2011, 2011a, 2013, 2013a)

So sind die Überlegungen von Arnold Kirsch fruchtbar weiterentwickelt worden.

Primat der Didaktik, Aufgabe der didaktisch orientierten Sachanalysen

Die hier dargestellten Untersuchungen und Entwicklungen von Arnold Kirsch und deren Weiterentwicklungen gehören zu den *didaktisch orientierten Sachanalysen*. Arnold Kirsch hat jedoch die Auffassung vertreten und immer wieder bekräftigt, dass für Curriculum Entwicklungen der *Primat der Didaktik gilt.* Auch ich stimme dieser Auffassung ausdrücklich zu. Die didaktisch orientierten Sachanalysen liefern Gesichtspunkte, sind aber bei didaktischen Entscheidungen im Rahmen der Curriculum Entwicklung nicht allein maßgebend.

Welchen Beitrag können sie dann leisten? Eine wichtige Aufgabe ist, die *mathematische Substanz, den mathematischen Kern* eines Unterrichtsgegenstandes ans Licht zu ziehen. Das hat schon Walter Breidenbach so gesehen, wenn er schreibt: „Wir werden [...] immer von einer Sachanalyse auszugehen haben, um damit jene Stellen mit Sicherheit zu erkennen, auf denen der Hauptnachdruck des Unterrichts und der methodischen Überlegungen liegen muss" (Breidenbach 1963, S. 20).

Die didaktisch orientierten Sachanalysen sollten auch zum Kern der fachinhaltlichen Ausbildung der zukünftigen Lehrer gehören. Diese ist m. E. gegenwärtig noch zu weit von den später zu unterrichtenden Gegenständen entfernt. Arnold Kirsch hat immer wieder die Auffassung vertreten, dass die *fachinhaltliche Ausbildung möglichst dicht an den später zu unterrichtenden Stoffen* erfolgen solle. Es wäre wünschenswert, wenn die didaktisch orientierten Sachanalysen hier einen nachhaltigen Einfluss ausüben würden.

Zum Tode von Arnold Kirsch

Noch vier Tage vor seinem Tod habe ich Arnold Kirsch besucht. Er war schon sterbenskrank. Als er mich sah, streckte er die Hand zu mir aus. Ein Lächeln ging über sein Gesicht. Ich werde das nie vergessen. Doch denke ich auch gerne an die vielen Gespräche zurück, die wir in wissenschaftlichen und persönlichen Angelegenheiten führten. Arnold Kirsch war ein brillanter Denker und großartiger Mensch.

Literatur von Arnold Kirsch zum Thema

Kirsch, A. (1957): Einige Bemerkungen zur Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen. In: Math. Physik. Sem. Berichte 5/1957, S.281

Kirsch, A. (1962/63): Das Kettenrechnen und die affine Gruppe der Geraden, MNU 1962/63, S. 68

Kirsch, A. (1963): Über die Bedeutung der Relation „zerlegungsgleich" in der elementaren Flächeninhaltslehre; Math. Physik. Sem. Berichte IX/ 1963, Heft 2, S. 190

Kirsch, A. (1969): Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung, in Math.-Phys. Semesterberichte XVI/1, S. 41 - 55

Kirsch, A. (1969a): Die Einführung der natürlichen Zahlen als Operatoren. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, (Teil 2), Hannover 1971

Kirsch, A. (1970): *Elementare Zahlen- und Größenbereiche*. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht 1970

Kirsch, A. (1972): Ein didaktisch orientiertes Axiomensystem der Elementarmathematik. MNU 25 (1972), S. 142

Kirsch, A. (1976): Eine „intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. In: Didaktik der Mathematik 4 (1976) 2. Heft S. 87-105

Kirsch, A. (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: WPB 29 (1977) Heft 4, S. 151 - 157

Weitere Literatur

Breidenbach W. (1963): Methodik des Rechnens, 12. Auflage, Hannover

Frege G. (1893 und 1903): Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, 2 Bände, Jena, Neudruck Darmstadt 1963

Griesel, H. (1959): Eine verbandstheoretische Analyse der Bruchrechnung, In: Math.-Physik. Semesterberichte Band 6 Heft 3/4 (1959) S. 195–216 Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

Griesel, H. (1996a): Proportionalität als Relation zwischen Größen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim Franzbecker 1996, S. 146–149

Griesel, H. (1996b): Grundvorstellungen zu Größen. In: *Mathematik lehren*, Heft Oktober, Velber, Friedrich 1996, S. 15–19

Griesel, H. (1997): Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 18 (1997), S. 259–284

Griesel, H. (1997a): Wissenschaftsorientierung des Mathematikunterrichts, Zur Geschichte und den Perspektiven eines Leitbegriffs in Ost und West. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (1997), S. 23–30, Franzbecker Hildesheim

Griesel, H. (1998): Messen als zentrale Idee. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim Franzbecker 1998, S. 236–238

Griesel, H. (2003): Messen und Aufbau des Zahlensystems. In: Hefendehl-Hebecker, Lisa; Hußmann, Stephan (Hrsg.) *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie*, Festschrift für Norbert Knoche, Hildesheim, Franzbecker 2003, S. 53–64

Griesel, H. (2005): Modelle und Modellieren. In: Henn Hans-Werner; Kaiser Gabriele (Hrsg.) *Mathematik im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*, Festschrift für Werner Blum, Hildesheim, Franzbecker, 2005, S.

Griesel, H. (2006): *Quantitative Messsyteme*; ein Beitrag zu den Grundsatzfragen: Was ist quantitatives Messen? Wie hängen einerseits Messen und andererseits die Zahlen und deren Rechenoperationen zusammen? NATG (Normenausschuss Technische Grundlagen) im DIN, Berlin 2006, NA 152-01-56 AA N45, 11 Seiten

Griesel, H. (2007): Reform of the Construction of the Number System with Reference to Gottlob Frege. In: *Mathematics Education*, ZDM, Vol 39, 1–2, March 2007, S. 31–38, Springer Verlag, Heidelberg

Griesel, H. (2011): Eckpunkte zu einem anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 91, (2011) S. 17-22

Griesel, H (2011a): Genetischer anwendungsorientierter Aufbau des Zahlensystems. NATG (Normenausschuss Technische Grundlagen) im DIN, Berlin 2011, NA 152-01-01-06 AK N18 (36 Seiten)

Griesel, H. (2012): Fünf Grundformen der Konstitution einer Größe. NATG (Normenausschuss Technische Grundlagen) im DIN, Berlin 2012, NA 152-01-01-06 AK N19

Griesel, H. (2013): Elementarmathematik als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit, Hintergründe und Analysen zum Prozess des Aufbaus dieser Theorie; in: M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, G. Nickel (Hrgb.) Mathematik im Prozess; Springer Fachmedien Wiesbaden 2013, S. 305–318.

Griesel, H. (2013a): Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen; in: Meyer M., Müller-Hill E., Witzke I. (Hrsg.) Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik, Festschrift zum sechzigsten Geburtstag von Horst Struve, Hildesheim, S. 19–33

Hale B. and Wright C. (2001): The Reason's Proper Study, Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics, Oxford

Lugowski, H. (1962): Eine axiomatische Grundlegung des anschaulich-genetischen Aufbaus der Arithmetik in der Schulmathematik. Wiss. Zeitschrift der Päd. Hochschule Potsdam, Math. – Naturw. Reihe, Band 7, S. 297–329

Heinz Griesel, Zeisigweg 6, 34225 Baunatal bei Kassel, Email: hgriesel@web.de