Abitur im Wandel der Zeiten: 1962 und 1982

Ein subjektiver Rückblick

Horst Hischer

Dem Thema „Abitur" wurden in den letzten beiden Ausgaben dieser Mitteilungen der GDM recht unterschiedliche Beiträge gewidmet (in Nr. 96 von Alexander Wynands und in Nr. 97 von Gabriele Kaiser und Andreas Busse). Der hier vorliegende Beitrag möge diesen bisherigen Betrachtungen einen andersartigen, subjektiven Rückblick auf vergangene Abituranforderungen an die Seite stellen: So ergab sich für mich kürzlich die Möglichkeit, meine eigenen Abiturklausuren von 1962 aus dem Archiv meiner damaligen Schule zu erhalten, was mir einen spannenden Einblick in mir kaum mehr gegenwärtiges früheres eigenes Tun ermöglichte.

In Niedersachsen gab es damals (erfreulicherweise) noch kein Zentralabitur. Die Fachlehrer mussten daher für ihre Abiturgruppe jeweils zwei komplette Aufgabenvorschläge entwickeln und erfuhren selber erst beim Öffnen des versiegelten Umschlags in Anwesenheit der Abiturienten *in spe*, welcher ihrer beiden Vorschläge von der zuständigen Schulbehörde ausgewählt worden war.

1 Die Abiturklausuren von 1962 im Überblick

Es handelt sich hier um Klausuren zu den Fächern Französisch (geschrieben am 22. 2. 1961 im sog. „Vorabitur" in Jahrgang 12), Deutsch (geschrieben am 9. 1. 1962), Mathematik (geschrieben am 10. 1. 1962), Chemie (geschrieben am 12. 1. 1962) und Latein wahlfrei (geschrieben am 13. 1. 1962, einem Sonnabend – damals noch ein regulärer Schultag).

Zunächst fällt auf, dass in allen Klausuren die Aufgaben vom Lehrer nur diktiert wurden, nicht aber – wie heute und schon seit vielen Jahren üblich – gedruckt ausgeteilt wurden. Das zwang die Aufgabensteller bei der Aufgabenformulierung zur Beschränkung auf Wesentliches. Und es wurde vom Referenten moniert, wenn eine Aufgabe vom Kandidaten nicht korrekt notierend erfasst worden war. Eigentliche „Aufgabenstellungen" in schriftlicher Form gab es dabei nicht in jedem Fall.

So bestand die Französisch-Klausur aus einer anzufertigenden Nacherzählung: Der Lehrer las die in *Französisch* abgefasste Geschichte *„Le Trombone"* vor und erteilte dann mündlich den Auftrag, diese originalsprachlich nachzuerzählen; einzig zugelassenes Hilfsmittel war das einsprachige Wörterbuch „Larousse de Poche".

In *Latein* wurden sechs Sätze aus *„Bellum Gallicum"* diktiert, die (gemäß meiner Erinnerung ohne Hilfsmittel) zu übersetzen waren.

In *Deutsch* wurde Folgendes diktiert: *Deutscher Aufsatz – Schuld und Sühne in der Gretchentragödie in Goethes „Faust"*. Aus meiner Bearbeitung ist zu erkennen, dass uns ein konkreter Textauszug zur Verfügung stand, auf den zitierend Bezug zu nehmen war. Der Aufsatz begann dann gemäß unserer erprobten Vorgehensweise mit einer Gliederung, die bei mir aus neun Punkten bestand.

In *Chemie* war in individuellen Schülerversuchen eine qualitative Analyse durchzuführen, und dazu wurde folgende Aufgabe diktiert: *„Untersuchen Sie Caseïn auf dem Wege einer qualitativen Elementaranalyse, und versuchen Sie, zumindest einige der aufbauenden Aminosäuren festzustellen. Die praktische Arbeit ist durch eine Beschreibung des Aufbaus und der Sonderheiten der Eiweißstoffe zu ergänzen."* Schriftliche Hilfsmittel standen nicht zur Verfügung.

In *Mathematik* wurden drei Aufgaben diktiert, jedoch detaillierter als in den anderen Fächern, gleichwohl viel kürzer als heute oft anzutreffen.

2 Die Mathematikaufgaben

Der ausgewählte Aufgabenvorschlag enthielt (o Wunder!) keine Kurvendiskussion, sondern je eine Aufgabe aus den drei Bereichen Kegelschnitte, Sphärische Trigonometrie und Vektorgeometrie:

1. Wie lauten die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an die Kurven $4x^2 + 9y^2 - 144 = 0$ und $8x - y^2 + 16 = 0$ (mit maßstäblicher Skizze)?
2. In zwei verschiedenen Orten auf dem gleichen Meridian wird die Sonne zur gleichen Zeit in 28°24′ bzw. 33°48′ Höhe beobachtet. Ermittle durch Konstruktion,
   a. welches Azimut a_2 sich für den zweiten Ort ergibt, wenn man für den ersten Ort a_1 = S67°30′W mißt,
   b. in welcher Breite φ_1 der erste Ort liegt, wenn die des zweiten φ_2 = 39°12′N beträgt!
3. Der Ursprung O und die durch die Ortsvektoren $\mathfrak{r}_A = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} - 3\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_B = 3\mathfrak{i} + 4\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}_C = -\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 2\mathfrak{k}$ festgelegten Punkte A, B, C bilden ein Tetraeder. Berechne das Volumen und die Oberfläche und das Lot von O auf die Ebene ABC!

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, Logarithmentafel, trigonometrische Tafel, Rechenstab, Zirkel, Lineal, Winkelmesser und Kurvenlineal.

Die Bearbeitung der Aufgaben sei angedeutet:

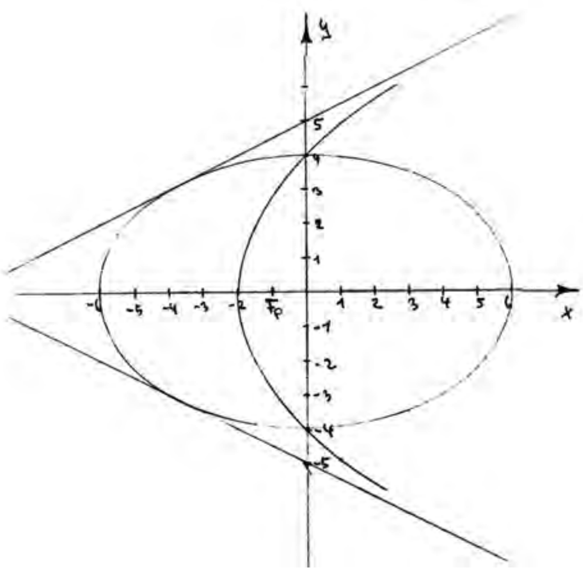
2.1 *Aufgabe 1: Kegelschnitte*

Die erste Gleichung ergibt durch Umstellung auf die Normalform eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 6$ und $b = 4$, die zweite eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8(x + 2)$ und also mit den Parametern $2p = 8$ und $\alpha = -2$. Für die Kurven führt die Tangentenbedingung auf $a^2m^2 - n^2 + b^2 = 0$ (Ellipse) bzw. $p = -2(n + \alpha m) = 0$ (Parabel). Da die Tangenten identisch sein sollen, müssen die Werte für m und n in beiden Tangentenbedingungen jeweils gleich sein, und das führt nach längerer Rechnung zu zwei Lösungspaaren für m und n:

$$m_1 = +\frac{1}{2}, \quad n_1 = +1 \quad \text{und} \quad m_2 = -\frac{1}{2}, \quad n_2 = -5.$$

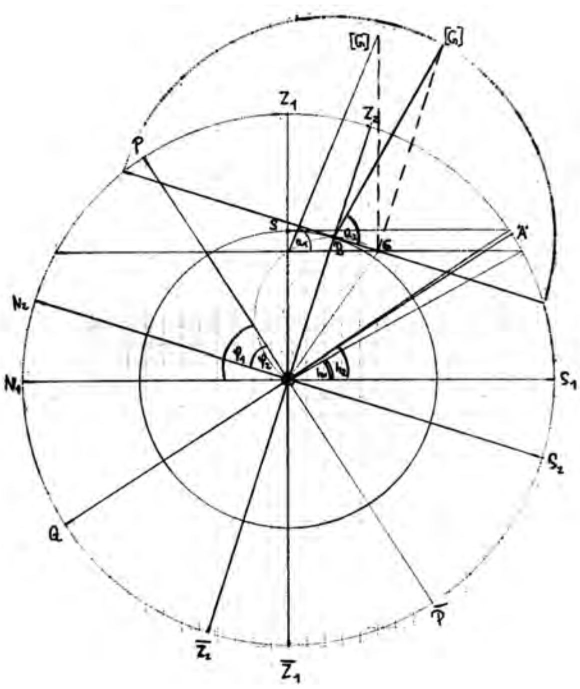
Die beiden gesuchten Tangenten haben damit die Gleichungen $y = \frac{1}{2} + 5$ und $y = -\frac{1}{2} - 5$.

Nachfolgend ist die geforderte, im Original maßstäbliche (und dort farbige!) Zeichnung zu sehen, die mittels Kurvenlineal erstellt wurde. Der Referent hatte hierzu angemerkt: *„Die Parabel sollte besser mindestens bis zu den Berührungspunkten gezeichnet werden.“* Aus meiner Bearbeitung geht hervor, dass ich wohl die Berührungspunkte zunächst berechnen wollte, die Ansätze dazu dann aber durchgestrichen habe, möglicherweise deshalb, weil sie ja nicht explizit gefordert waren …



2.2 *Aufgabe 2: Sphärische Trigonometrie*

Die Bearbeitung der Aufgabe beginnt mit einer umfangreichen Zeichnung, die von den Voraussetzungen bis zur Lösung alles enthält (siehe die folgende Abbildung), gefolgt von einer ausführlichen Konstruktionsbeschreibung auf den folgenden beiden Seiten. (Die Abbildung ist von schlechter Qualität, denn sie ist ein Scan einer 52 Jahre alten Bleistiftzeichnung; die tatsächliche, hier nicht wiedergebbare „blasse Farbigkeit“ möge man konstruktiv hineindenken).



Es folgt der Originaltext der *Aufgabenbearbeitung* aus meiner Abiturklausur:

Die gegebenen Größen habe ich grün, die ermittelten Größen rot dargestellt.

Ich zeichne einen Kreis mit dem Horizontsystem (Z_1).

Im Ursprung O trage ich am Horizont h_1 und h_2 an. Am Höhenkreis von h_1 trage ich a_1 an und ermittele somit das Gestirn G (die Sonne). Der Höhenkreis von h_2 schneidet die Achse $\bar{Z}_1 Z_1$ in S. Mit dem Radius OS ziehe ich an den Kreis die Tangenten, von welchen aber nur die (hier rot gezeichnete) richtig ist, da bei der anderen Tangente der Pol in den Quadranten zwischen Z_1 und S_1 zu liegen kommt, das heißt, die zweite ist nicht real.

Den Berührungspunkt der Tangente mit dem Kreis verbinde ich mit O und verlängere diese Gerade nach beiden Seiten. Ich erhalte die Punkte Z_2 und Z_2 und $\bar{Z}_2$.

In O errichte ich die Senkrechte nach beiden Seiten und erhalte N_2 und S_2. In B errichte ich die Senkrechte (den Höhenkreis von h_2) und projiziere G auf den umgeklappten Höhenkreis.

Ich kann das Azimut ablesen mit dem Wert

$$a_2 = 78°$$

In P *(Schreibfehler!)* trage ich an $N_2 O \varphi_2$ an. Seine freien Schenkel schneiden den Umriß in P und $\bar{P}$.

Der Winkel zwischen PO und $N_1 O$ ist die gesuchte Breite φ_1.

Sie hat den Wert

$$\varphi_1 = 57°.$$

Beide Ergebnisse sind richtig.

2.3 *Aufgabe 3: Vektorgeometrie*

Der Rechenaufwand ist wie bei Aufgabe 1 recht hoch. Mein Bearbeitungs- und Gedankengang sei nur angedeutet:

Das Volumen eines Tetraeders beträgt ein Drittel des Volumens eines dreiseitigen Prismas gleicher Grundfläche und Höhe, ein Prisma hat das halbe Volumen eines Paralellepipeds (Spats), somit beträgt das Volumen eines Tetraeders ein Sechstel des Volumens eines entsprechenden Spats. Das Spatvolumen berechnet sich (bekanntlich) mit Hilfe des Spatprodukts:

$$V = \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$$

Somit ist das Volumen des Tetraeders:

$$V = \frac{1}{6} \mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$$

Dabei stehen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ für die drei Ortsvektoren $\mathfrak{r}_A, \mathfrak{r}_B, \mathfrak{r}_C$ der Eckpunkte A, B, C, also gilt:

$$V = \frac{1}{6} \mathfrak{r}_A \cdot (\mathfrak{r}_B \times \mathfrak{r}_C)$$

Für die weitere Berechnung werden die Regeln für das *Kreuzprodukt* und für das *Skalarprodukt* verwendet, also z. B.

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathfrak{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathfrak{j} - (a_x b_y - a_y b_x)\mathfrak{k}$$

Damit errechnet man $V = \frac{41}{6}$.

Die Berechnung der Oberfläche *(eigentlich: des Oberflächeninhalts)* ist deutlich rechenaufwendiger: Es müssen die Flächeninhalte der vier Dreiecksflächen des Tetraeders berechnet werden. Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird vektoriell über das halbe Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren berechnet, weil der Betrag des Kreuzprodukts gleich dem Flächeninhalt des aus den beiden Kantenvektoren gebildeten Parallelogramms ist. Für die Flächeninhalte der Seitenflächen des Tetraeders ergibt sich auf diese Weise der Reihe nach:

$$\frac{3}{2}\sqrt{30}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{243}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{138}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{473}$$

Dies liefert schließlich (natürlich damals ganz ohne Taschenrechner …) angenähert 32,8 für die Oberfläche des Tetraeders.

Das Lot vom Ursprung auf die Ebene durch die Punkte A, B und C ist die Höhe des Tetraeders mit der Grundfläche ABC. Für das Volumen des Tetraeders als einer Pyramide gilt

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h.$$

Mit $V = \frac{41}{6}$ und $G = \frac{1}{2}\sqrt{473}$ folgt für die Länge des Lots $h \approx 1{,}89$.

2.4 *Kommentierung*

Der thematische Schwerpunkt der drei Aufgaben war Geometrie, und zwar bei Aufgabe 1 ebene analytische Geometrie, während die anderen Aufgaben solide räumliche Anschauung erforderten.

Aufgabe 1 und Aufgabe 2 erforderten zwingend sauberes und sorgfältiges Zeichnen, Aufgabe 2 darüber hinaus ein Umdenken der dreidimensionalen realen Situation in eine zweidimensionale „umgeklappte“ Darstellung und eine gedankliche Rückübertragung ins Dreidimensionale. Ich bin heute überrascht, dass uns Letzteres damals abverlangt wurde, aber es war andererseits hinreichend eingeübt, auch durch praktische geodätische Vermessungen. Genaues händisches Rechnen und sichere Anwendung verfügbarer Näherungsmethoden waren weitere Anforderungen, die damals zum Unterrichtsalltag gehörten.

2.5 *Mündliche Prüfung*

Die damalige Struktur dieses letzten Prüfungsteils mag aus einer Perspektive *nach* der Oberstufenreform in den 1970er Jahren unglaublich klingen: Alle Abiturienten *in spe* mussten sich einige Wochen nach dem schriftlichen Abitur an einem bestimmten Tag gemeinsam in der Schule einfinden (und zwar in dunklem Anzug mit Schlips), um dann vor dem gesamten Kollegium vom Schulleiter (erst dann!) zu erfahren, wer in welchem Fach wann mündlich geprüft werden sollte. Eine vom Prüfer schriftlich formulierte detaillierte Aufgabenstellung (wie es heute üblich ist) gab es ebenso wenig wie eine „Vorbereitungszeit" auf die jeweilige Prüfung (was später üblich wurde). Und es gab auch keine sog. „Fachprüfungsausschüsse".

3 Die Zeit danach

3.1 *1968: Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen*

Am 1. Februar 1968 trat ich meinen Dienst als Studienreferendar für das „Lehramt an höheren Schulen" für Mathematik und Physik an. Es war für fast uns alle (meine Mitreferendare und mich) das erste Mal, dass wir etwas von „Didaktik" hörten (das Wort war uns an der Uni noch nicht begegnet), und das Studienseminar samt Fachleitern war eine Quelle ganz neuartiger Inspirationen, vor allem in Verbindung mit der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht". Wir gelangten ganz schnell zu der Auffassung, dass man im Mathematikunterricht viel sorgfältiger in Bezug auf Begriffsbildung und Formulierung sein musste, als wir es hier und da vom Studium her gewohnt waren. Die große Experimentier-Freiheit beim Unterrichten war faszinierend. Und die „Unterrichtsentwürfe" waren nur eine Seite lang, was völlig ausreichte und was ich später in den 1990er Jahren als Leiter eines Studienseminars manchen Fachleitern nur schwer vermitteln konnte (wobei ich das im Prinzip noch immer für richtig halte).

Am 3. und 4. Oktober 1968 beschloss dann die KMK „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen", die ein halbes Jahr später in Niedersachsen durch Erlass verbindlich wurden – leider (!) erst zum Ende meiner Referendarzeit. Aber gleich nach meiner Einstellung zum 1. 8. 1969 als Studienassessor setzten meine jungen Kollegen und ich gegenüber der Schulaufsichtsbehörde durch, dass das bis dahin etablierte Schulbuch „Reidt – Wolf – Athen" durch den neuen „Schröder – Uchtmann" ersetzt wurde. Ich erinnere mich noch an ein Gespräch, das ich als Vertreter der Mathematikkollegen meiner Schule mit dem zuständigen Oberschulrat, Dr. Mügel, in seinem Dienstzimmer führte, um ihn von unserer Meinung zu überzeugen, wobei er dann vorsichtig und mahnend entgegnete, dass doch im „Reidt – Wolf – Athen" so viele schöne Aufgaben stünden. Recht hatte er, das hatten wir damals (ich war gerade erst 26 Jahre alt) leider „übersehen"! Aber auf der Basis des neuen Schulbuchs in Verbindung mit etlichen selbst entwickelten Konzepten konnten wir uns austoben: Mengen, Aussagen, Aussageformen, Quantoren, Grundmengen, Lösungsmengen, Relationen, Funktionen als Relationen, quotientgleiche Paare (für Proportionalität), produktgleiche Paare (für umgekehrte Proportionalität) usw. Und schnell kam ich über damals schon im Referendariat aktuelle Namen wie Gerhard Holland, Arnold Kirsch und Hans-Georg Steiner mit der zu dieser Zeit gerade stürmisch aufblühenden Didaktik der Mathematik in Berührung, was mich dann schon 1971 als Studienrat im Hochschuldienst an die TU Braunschweig führte, wobei ich aber ständig nebenamtlich am Gymnasium unterrichtete. (1967 und 1968 gab es die ersten „Tagungen der Fachvertreter für Didaktik der Mathematik" und 1969 die erste „Bundestagung für Didaktik der Mathematik" – die Vorläufer der jetzigen GDM-Jahrestagungen!).

3.2 *Mathematikabitur 1982*

Nach meiner hauptamtlichen Rückkehr 1979 ans Gymnasium übernahm ich u. a. einen Leistungskurs Mathematik, der mir die Gelegenheit bot, neue Möglichkeiten im Unterricht zu erproben. Für das Abitur 1982 entwarf ich zwei Aufgabenvorschläge, die mir beide im getippten Original vorliegen: Der ausgewählte Vorschlag A und die zugehörige Beschreibung der „erwarteten Schülerleistungen" und der „Anforderungsniveaus" sind in den beiden vorseitigen Abbildungen original wiedergegeben. Man beachte, wie nach 1962 innerhalb von 20 Jahren eine (verordnete!) Engführung der Prüfungsanforderungen entstand. Ob diese Vorteile brachte, sei hier dahingestellt.

In nahezu gleicher Weise wurden (ebenfalls als Folge der Oberstufenreform) auch die mündlichen Prüfungen durchorganisiert: Im Gegensatz zu 1962 stand nun (recht-)zeitig vor den jeweiligen Prüfungen fest, wer in welchem Fach mündlich geprüft werden sollte, so dass die Kandidaten sich im Grundsatz gezielt darauf vorbereiten konnten. Für jeden Prüfling waren vom Prüfenden individuelle Prüfungsfragen (mit Blick auf die ihnen noch unbekannte Klausurbewertung) schriftlich auszuarbeiten und kurz vor der Prüfung auszuhändigen, so dass sie sich unter Aufsicht auf die Beantwortung der Fragen vorbereiten konnten. Abschlie-

Reifeprüfung Mathematik (LK) Vorschlag A März 1982

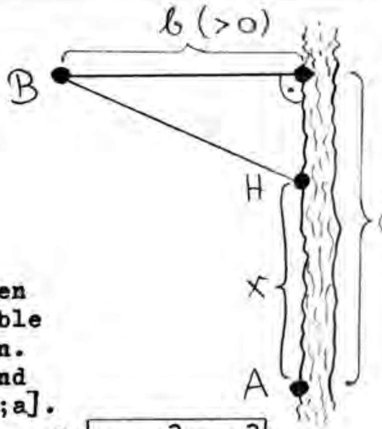
1. Für fest gewähltes $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) := e^{2\lambda} - \lambda^2 x^2$.

   a) Der Graph G_f schließt mit der x-Achse für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ in der oberen Halbebene ein Flächenstück ein. Dieses rotiere um die x-Achse. Das Volumen des entstehenden Körpers werde mit $V(\lambda)$ bezeichnet.
   Zeichnen Sie G_f für $\lambda = 1$!
   Untersuchen Sie $V(\lambda)$ auf Extremaleigenschaften und geben Sie ggfs. den/die Extremwert(e) von $V(\lambda)$ an!
   Untersuchen Sie, ob nur relative oder auch absolute Extremwerte vorliegen!

   b) Für alle zulässigen $x \in \mathbb{R}$ sei nun $g(x) := \dfrac{f(x)}{x - \frac{e^{\lambda}}{\lambda}}$.
   Zeigen Sie, daß es eine stetige Fortsetzung $\overline{g}$ zu g auf $\mathbb{R}$ gibt!
   (Verschiedene Lösungswege möglich!)

---

2. An einem geradlinig verlaufenden Fluß soll ein Hafen H so angelegt werden, daß die Transportkosten zu Wasser von A nach H und zu Lande auf einer noch zu bauenden, geradlinig verlaufenden Straße von H nach B insgesamt minimal werden.
Die Transportkosten für eine bestimmte Ware betragen
   auf dem Wasser α DM pro km ,
   auf dem Lande β DM pro km .
Die in der Zeichnung (nebenstehend) angegebenen festen Entfernungen a und b und die variable Entfernung x werden jeweils in km gemessen.
Die Gesamttransportkosten hängen von x ab und sollen mit f(x) bezeichnet werden, $D_f := [0;a]$.



   a) Aus der Zeichnung liest man ab: $f(x) = \alpha x + \beta\sqrt{(x-a)^2 + b^2}$
   Begründen Sie das!

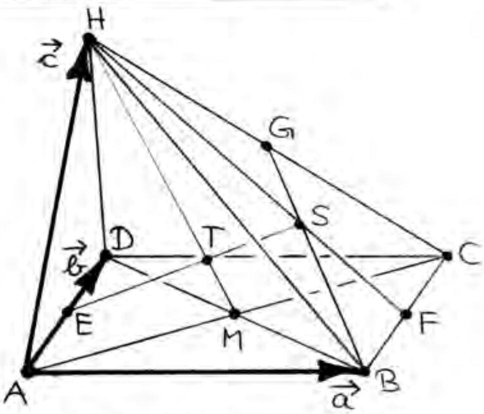
   b) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$!
   [Die Ergebnisse können bei der Klausuraufsicht gegen Protokollnotiz erfragt werden. Teil b) gilt dann als nicht gelöst.]

   c) Zeichnen Sie für $a=5$, $b=1$, $\beta=1$ und $\alpha=0{,}5$ bzw. $\alpha=2$ die entsprechenden beiden Graphen von f in ein Koordinatensystem! (Millimeterpapier, 1LE=1cm, Wertetabellen für $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$).

   d) Das im Eingangstext genannte Minimierungsproblem ist nur für $\alpha < \beta$ ein wirkliches "Problem"! Warum ?
   Lösen Sie dann dieses Problem unter der Voraussetzung $\alpha < \beta$!

---

3. Durch die drei nicht komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wird eine vierseitige Pyramide festgelegt, wobei noch $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ gilt.
M ist der Diagonalenschnittpunkt der Grundfläche, S ist der Schwerpunkt der Seitenfläche BCH, E ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$, und F ist Mittelpunkt von $\overline{BC}$.



   a) Zeigen Sie, daß sich die Geraden ES und MH in einem Punkt schneiden, der mit T bezeichnet werde, und berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Strecken $\overline{ES}$ und $\overline{MH}$ von dem Teilpunkt T geteilt werden!
   Geben Sie $\overrightarrow{AT}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an !

   b) Die Figur werde jetzt so verändert, daß Punkt H mit D zusammenfällt, während das Viereck ABCD unverändert bleibt. Fertigen Sie dafür eine Zeichnung an, und lösen Sie dann die in a) genannte Aufgabenstellung!

   c) Ist es möglich, H so zu legen, daß $\vec{c}$ und $\overrightarrow{MG}$ kollinear sind ?

   d) Es sei $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=z\vec{k}$ mit $z \in \mathbb{R}$. Kann z so gewählt werden, daß $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{FS}$ gilt ?

Dr.Horst Hischer, StD
Reifeprüfung Mathematik (LK), März 1982, Erläuterungen zum Vorschlag **A**

Dieser Vorschlag bezieht sich schwerpunktmäßig auf das 4.Halbjahr des vollentwickelten Kurssystems (ANALYSIS).

Aufgabe	Thema	Niveau	Erwartete Schülerleistung
1.a	Graph	I	Graphtyp erkennen;Scheitelpunkt und Nullstellen angeben; G_f für =1 korrekt zeichnen
	V(λ) = ?	II	Formel für Rotationsvolumen auf die gegebene Funktion mit den ermittelten Grenzen anwenden und auswerten. (Symmetrieüberlegung verringert den Rechenaufwand)
	V(λ) opti-mie-ren	I	V'(λ) berechnen, V'(λ)=0 lösen;
		II	Extremsituation diskutieren (entweder mit V"(λ) oder durch Grenzwertbetrachtung an V(λ))
		III	neben rel. Extremeigenschaft auch absolut unters.
		I	Extremalen Volumenwert berechnen
1.b	g stetig fort-setzen	II	Problem erkennen(3 Möglichkeiten): 1)g gebrochen-rational, 2) g(x) mit Nenner kürzbar, 3) g ist Sekantensteigungsfunktion von f an Nennernullstelle
		II	Problem lösen(wieder 3 Möglichkeiten):1) Grenzwert von g(x) mit de l'Hospital, 2) "Lücke stopfen", 3) g stetig forstsetzbar, weil f differenzierbar
2.a	f(x) = ?	I	Entfernung H-B mit Satz des Pythagoras berechnen
		III	Bedeutung von α und β erkennen und zur Berechnung von f(x) verwenden
2.b	f'(x), f"(x) = ?	I	Differentiationskalkül auf diese neue, unbekannte Funktion anwenden (Summen-,Produkt-,Quotienten-, Kettenregel; Ableitung von x ↦ x)
2.c	Graph ?	II	Wertetabellen entwerfen und ausfüllen
		I	Die beiden Graphen zeichnen
2.d	Mini-mie-rungs-probl.	III	Bedeutung der Voraussetzung α< β untersuchen
		II	f'(x)=0 unter der Voraussetzung α< β nach x auflösen und begründen, warum eine der beiden Lös.entfällt
		II	Nachweis, daß der Extremwert ein Minimalwert ist
3.a	T ?	II	Begründen, daß T Schnittpunkt ist (geom. od. rechn.)
		II	Geschlossene Vektorkette suchen
		II	Vekt.d.Vektorkette als Linearkomb. von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ darst.
		I	Vektorgleichung nach $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ordnen, mit der Vorauss. der lin.Unabhäng. ein lineares Gl.system bilden
		I	Lin.Glsystem nach geeigneter Methode lösen
		I	Teilverhältnisse folgerichtig angeben
		I	$\vec{AT}$ folgerichtig berechnen
3.b	3.a spez. für H = D	III	Situation anschaulich richtig erfassen und durch eine korrekte Zeichnung wiedergeben
		III	Durch geeignete Argumentation das gestellte Problem lösen. (auch rechner.mögl., aber aufwendiger)
3.c	$\vec{c}$ koll. $\vec{MG}$?	II	anschaulich (A,M,C,G,H in einer Ebene, C Strahlenzentr., M und G Seitenmittelp., Strahlensatz) oder formal (Kollinearitätsbedingung ausnutzen)
3.d	$\vec{MS}$ ⊥ $\vec{FS}$?	II	$\vec{MS} \perp \vec{FS} \Leftrightarrow \vec{MS}\cdot\vec{FS} = 0$ erkennen; $\vec{MS}$ und $\vec{FS}$ als Linearkombination von $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=z\vec{k}$ darstellen; Skalarprodukt bilden und Gleichung nach z auflösen

Die drei Aufgaben sind in bezug auf Schwierigkeitsgrad und Zeitbedarf ausgewogen; eine Analyse ergibt folgendes Gesamtbild für die drei Niveaubereiche I(Routine), II(Transfer) und III(neues):

I: 32% , II: 54%, III: 14%

Zugelassene Hilfemittel: Formelsammlung Kemnitz/Engelhard, Taschenrechner (alle Prüflinge können gleichwertige Geräte benutzen).
Ich versichere, daß ich die für die Geheimhaltung erforderlichen Maßnahmen getroffen habe.

Prüfungsfragen aus den Gebieten "Vekt.Anal.Geom." und "Kompl.Zahlen"

1. In einer Formelsammlung befindet sich ein Tintenklecks, so daß die Schülerin das Folgende nur noch unvollständig lesen kann:

Definition:	Zwei von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen genau dann wenn gilt: $\bigvee_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} (\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}\wedge \quad)$

   Was fehlt hier?

2. In dem Parallelogramm ABCD halbiere E die Seite $\overline{DC}$, und $\overline{EB}$ schneide $\overline{AC}$ in T.
   In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale $\overline{AC}$?

3. Mit der imaginären Einheit i sei $z := 1+i$.
   Berechnen Sie $|z^3|$ und $\arg(z^3)$.

Prüfungsfragen aus den Gebieten "Logik" und "Vektor.Anal.Geometrie"

1. Es seien p und q Aussagenvariable. Formulieren Sie dann die folgenden sprachlichen Wendungen mit Hilfe aussagenlogischer Junktoren !

   a) Nicht nur p , sondern auch q .
   b) Wenn p , so außerdem q .
   c) Wenn p , dann aber keineswegs q .
   d) Wenn nicht p , so zumindest q .
   e) Höchstens dann p , wenn q .
   f) wenn nicht q , dann bestimmt nicht p .

   Welche dieser Aussagen sind gleichwertig ?

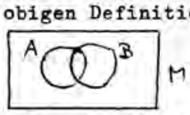
2. Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beliebige Vektoren des Anschauungsraumes.
   Welche der folgenden Äquivalenzen sind richtig ?
   Bei welchen ist zumindest eine Schlußrichtung richtig ?

   a) $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
   b) $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
   c) $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$
   d) $\vec{a}$ kollinear zu $\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
   e) $\vec{a}$ kollinear zu $\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$

Prüfungsfragen aus den Gebieten "Mengenalgebra","Logik" und "Analysis"

1. | Definition: | Es sei M eine beliebige Menge und $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. $\bigwedge_{A,B\in\mathfrak{P}(M)} A\Delta B := \{x\in M \mid x\in A \,\dot{\vee}\, x\in B\}$
 $A\Delta B$ heißt symmetrische Differenz von und B . |
   |---|---|

   a) Geben Sie eine Definition für $\mathfrak{P}(M)$ an .
   b) Ermitteln Sie $\mathfrak{P}(M)$ speziell für $M=\{1, 2, 3\}$.
   c) Begründen Sie die Namensgebung für $\mathfrak{P}(M)$.
   d) Erläutern Sie die logischen Bestandteile der obigen Definition.
   e) Veranschaulichen Sie $A\Delta B$ an einem Mengendiagramm nebenstehender Art.

   f) Statt "symmetrische Differenz" sagt man z.T. auch "disjunkte Vereinigung".
   Jede dieser beiden Bezeichnungen steht zugleich für je eine mögliche Darstellung von $A\Delta B$ durch die Mengenverknüpfungen $\cap$, $\cup$, $\setminus$.
   Versuchen Sie, $A\Delta B$ auf eine dieser beiden Weisen darzustellen!
   (Hinweis: An obigem Mengendiagramm orientieren!)

2. | Definition: | A und B seien beliebige Mengen. $A\subseteq B \;:\iff \bigwedge_{x} \ldots$ |
   |---|---|

   a) Vervollständigen Sie diese Definition.
   b) Den Sachverhalt "$A\subseteq B$" kann man auch sprachlich ausdrücken durch "Jedes Element aus ... ."
   Vervollständigen Sie das !
   c) Es sei nun $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, D die Menge der auf $[a;b]$ differenzierbaren und I die Menge der auf $[a;b]$ integrierbaren reellen Funktionen.
   Welche Beziehung besteht dann zwischen D und I ?

ßend seien drei Prüfungsfragen exemplarisch wiedergegeben.

Es sei hiermit angeregt, weitere Abituraufgaben nebst Bearbeitungen zusammenzustellen.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig
Email: hischer@math.uni-sb.de