Kleine Welten und Netzwerke – Anregungen für die Didaktik

Horst Hischer

In diesem Diskussionsbeitrag wird ein Vorschlag zur Interpretation von „Vernetzung“ mit Blick auf mögliche konstruktive und analysierende Anwendungen in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik angedeutet, ergänzt um wenige inhaltliche Anregungen für den Mathematikunterricht.

1 „Vernetzung“ — was ist das eigentlich?

„Vernetzung“ und „Vernetztheit“ sind derzeit beliebte Termini in der Presse, aber auch in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik: „Alles ist vernetzt“. Jedoch scheint kaum Bedarf an einer expliziten tragfähigen Definition zu bestehen. So wird in [Brandl & Nordheimer 2011, 144] zu Recht bezüglich der Lehrpläne der Bundesländer betont:

> Was unter Vernetzung jeweils konkret verstanden wird, ist selten explizit beschrieben und erschließt sich nur mit Hilfe von Beispielen.

Und man begegnet z. T. der Meinung, dass bedeutende Autoren wie etwa Lietzmann, Wittenberg und Wagenschein bereits Termini wie „Netze“ bzw. „Vernetzung“ als *Metaphern* verwendet hätten. Hierzu sei zunächst auf die „Nachdenkseite“ von Götz Eisenberg mit dem Titel „Vernetzung“ verwiesen, auf der dieser u. a. schreibt (vgl. den entsprechenden Link im Enzyklopädie-Eintrag zu „Vernetzen“ in madipedia.de):

> Ich habe gelernt, bei der Verwendung von Metaphern Vorsicht walten zu lassen. Man muss immer darauf achten, in welchen Kontext man

> sich damit begibt und welche Deutungsmuster man übernimmt. Wer herausfinden will, was eine Katze ist, sollte auch die Mäuse fragen, und wer wissen möchte, was *Vernetzung* ist, sollte auch die Fische fragen.

Auf meiner Suche nach solchen Metaphern bei den o. g. Autoren nannte mir Hans Schupp dankenswerterweise Fundstellen bei Wittenberg und Wagenschein: Sie verwenden hier zwar nicht die Metaphern „Netz“ oder „Vernetzung“, sondern andere wie angeordnete Themenkreise, überschaubarer gedanklicher Bau, durchgespanntes geistiges Gebilde, Vektoren (Wittenberg), ferner Gewebe, System, Zusammenhang, Knotenpunkt (Wagenschein), die man allerdings nachträglich (auch graphentheoretisch) im Kontext von „Netz-Metaphern“ zu sehen geneigt sein mag. Jedoch ist anzumerken, dass solche Gebilde oft eine Baumstruktur aufweisen, wozu mir Anselm Lambert ergänzend und bekräftigend mitteilte, dass Lietzmann 1949 im Vorwort von „Das Wesen der Mathematik“ Mathematik metaphorisch als Baum beschreibt, denn für ihn sei das „historisch gewachsen sein“ immer ein sehr wichtiger Aspekt gewesen.

Immerhin wird mit den Umschreibungen dieser drei Autoren eine „Beziehungshaltigkeit“ gemäß [Freudenthal 1972, 143] angedeutet, wobei schon [Wagenschein 1970, 400] sinngemäß von einer „beziehungsreichen Schlüsselstellung im Gefüge der Mathematik“ spricht. Das passt zur „Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik“, wie es [Wittmann 1978^{2}, 125] als eines der Kennzeichen der „genetischen Methode“ nennt, ferner auch zur von [Vollrath 1976] so genannten „Verbindung“ (eine der „methodischen Variablen“), wozu auch Verbindungen des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen „Themenkreisen“ (s. o.) gehören (vgl. auch die Übersicht in [Hischer 2012, 28–31]).

Gleichwohl ist zu fragen: Wenn „Vernetzung“ oder „Vernetztheit“ nicht deutlich mehr bedeuten sollte als die (selbstredenden?) Bezeichnungen „Beziehungshaltigkeit“ oder „Verbindung“ – warum wählt man dann den undefinierten und leider vieldeutigen Terminus „Vernetzung“?

Im wissenschaftlichen Diskurs sollten grundlegende Termini eigentlich nicht einer subjektiv beliebigen Deutbarkeit überlassen bleiben, sie bedürfen vielmehr zumindest bereichsbezogener Definitionen (wobei es deren dann oft konkurrierende bzw. situativ unterschiedliche geben kann und auch gibt). Da aber „Vernetzung“ mittlerweile sowohl in der wissenschaftlichen Didaktik als auch in der Bildungspolitik bei Lehrplänen und auch beim Strukturieren von Schulbüchern offensichtlich sogar wesentlich verwendet wird, halte ich eine Begriffspräzision für erforderlich. Der nachfolgend unterbreitete Vorschlag beruht nicht auf dem (z. B. im Sinne des ersten Zitats) durchaus begehbaren Weg einer abstrahierenden Analyse all der Beispiele und Vorschläge, die in der Didaktik der Mathematik unter „Vernetzung“ bisher subsumiert worden sind und werden, sondern es wird wie folgt gefragt:

Welches Potential bieten einerseits Methoden und Ergebnisse der sog. Netzwerktheorie für Anwendungen in der Didaktik und in der Pädagogik, und was ergibt andererseits eine abstrahierende Analyse der Bedeutungsvielfalt, die mit „Netz“ (und in der Folge auch mit „Vernetzung“) zunächst im Alltagsverständnis (und damit auch im außerwissenschaftlichen Bereich) assoziiert wird?

2 Das Kleine-Welt-Phänomen

Stößt man als Fremder zu einer Versammlung und stellt nach kurzer Unterhaltung fest, dass man mit einem anderen Teilnehmer einen gemeinsamen Bekannten hat, so kommentiert man das sinngemäß etwa mit „Ach, wie ist die Welt doch klein!“. Doch was bedeutet das? Ist es tatsächlich eine „Binsenweisheit“, dass die Welt immer kleiner würde, wie in http://www.taz.de/!82628/ (gültig am 2. 5. 2014) zu lesen ist? Wohl kaum – immerhin wird das „Kleine-Welt-Phänomen“ erst seit Ende der 1990er Jahre statistisch und mathematisch modellierend seriös untersucht. Dazu zunächst zwei Beispiele:

2.1 *Das Kevin-Bacon-Orakel*

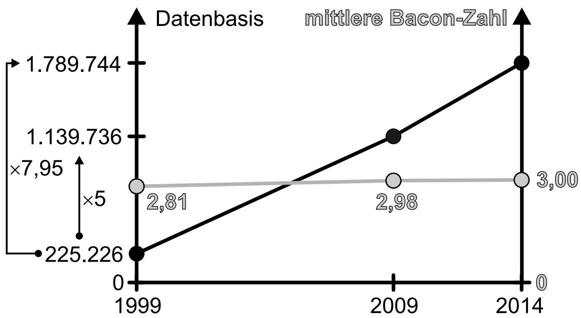
Der bis in die 1990er Jahre kaum bekannte Film- und Fernsehschauspieler Kevin Bacon trat früher vor allem in Nebenrollen auf. 1996 war er dann zu internationaler Bekanntheit gelangt, nachdem im *Time Magazine* die „The Oracle of Bacon“ genannte Website oracleofbacon.org des Informatikers Brett Tjaden als eine der „Top Ten“ ausgezeichnet wurde. Diese Website basiert auf imdb.com, der *Internet Movie Data Base*, einer ständig aktualisierten und öffentlich zugänglichen Datenbank, und sie enthält weitere aktuelle statistische Daten.

Die Eingabe des Namens eines beliebigen registrierten „Akteurs“ in oracleofbacon.org liefert eine Zahl aus $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ als „Abstand“ zu Bacon, genannt *Bacon-Zahl* dieses Akteurs (z. B. „3“ als

Bacon-Zahl von Heinrich George). Das funktioniert wie folgt: Im (zeitabhängigen) Zusammenarbeitsgraphen, dessen Knoten für die in der Datenbank erfassten Akteure stehen, verläuft zwischen zwei Knoten genau dann eine Kante, wenn beide in mindestens einem Film gemeinsam mitgewirkt haben. Die Bacon-Zahl eines Akteurs A ist dann die Länge eines kürzesten Weges in diesem Graphen zwischen A und Bacon, also $d(A, \text{Bacon})$.

Die größte bisher aufgetretene endliche Bacon-Zahl ist 8 (siehe folgende Tabelle), und die mittlere Bacon-Zahl ist seit 1999 erstaunlich stabil, und das trotz nahezu Verachtfachung der Datenbasis. Anfang Mai 2014 gab es weltweit nur sieben in imdb.com registrierte Akteure mit der (größten) Bacon-Zahl 8, und fast 1.150.000 (rund 64 %) der Akteure hatten die extrem niedrige Bacon-Zahl 3.

Bacon-Zahl	1999	2009	1.9.2013	3.5.2014
0	1	1	1	1
1	1.181	2.251	2.796	2.891
2	71.397	22.5506	311.207	331.090
3	124.975	719.767	1.059.651	1.145.508
4	25.665	178.784	266.847	285.450
5	1.787	12.205	21.222	22.156
6	196	1.040	2.157	2.391
7	22	165	226	250
8	2	17	28	7
mittlere Bacon-Zahl:	2,81	2,98	3,00	3,001
Datenbasis:	225.226	1.139.736	1.664.135	1.789.744



2.2 Die Erdős-Zahl

Die „Erdős-Zahl" bezieht sich auf den ungarischen Mathematiker Pál Erdős und ist ähnlich wie die Bacon-Zahl definiert. Der zeitabhängige Zusammenarbeitsgraph aller weltweit sowohl lebenden als auch nicht mehr lebenden, jeweils publiziert habenden Mathematiker(innen) – „Autoren" genannt – sei nun *Mathematiker-Graph* genannt und mit $\mathbf{C}_m$ bezeichnet („C" steht für „collaboration graph").

Genau dann verläuft zwischen zwei Knoten (den Autoren) von $\mathbf{C}_m$ in Analogie zum Akteurs-Graphen eine Kante, wenn sie mindestens eine Publikation *gemeinsam* verfasst haben (wobei auch weitere Autoren beteiligt sein können). Für alle Autoren M ist dann $d(M, \text{Erdős})$ deren *Erdős-Zahl*. $\mathbf{C}_m$ basiert auf der von der *American Mathematical Society* gepflegten „MathSciNet" genannten Datenbank. Die Erdős-Zahlen sind abrufbar unter ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html.

Die Autoren mit endlicher Erdős-Zahl bilden den *Erdős-Graph* $\mathbf{C}_e$ (ein Untergraph von $\mathbf{C}_m$). Im Stand von 2010, bei einer Datenbasis von damals rund 268.000, war 13 die größte Erdős-Zahl, und 4,65 war die mittlere Erdős-Zahl – ein wie bei der Bacon-Zahl ebenfalls sehr kleiner Wert (mehr dazu von Jerry Grossman unter oakland.edu/enp/).

Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010	Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010
1	504	8	3146
2	6593	9	819
3	33605	10	244
4	83642	11	68
5	87760	12	23
6	40014	13	5
7	11591		

Mittlere Erdős-Zahl: 4,65
Datenbasis: 268.015

2.3 Kleine Welten

Im Erdős-Graphen existiert zwischen je zwei Autoren A und B stets ein Weg über Erdős, und weil die Erdős-Zahl maximal 13 ist, folgt $d(A, B) \leq 26$. Analog ist im Akteurs-Graphen $d(A, B) \leq 16$, doch verschärft gilt sogar $d(A, B) \leq 15$. Dieser maximale Knotenabstand eines Graphen ist hier also angesichts der jeweils großen Datenbasen sehr klein. Damit ist auch der mittlere Knotenabstand jeweils „relativ klein" (was als „schnelle Durchsuchbarkeit" des Graphen beschreibbar ist), und darüber hinaus ist er bei beiden Zusammenarbeitsgraphen sogar nahezu unabhängig von der Knotenanzahl.

In dieser Sichtweise sind die beiden hier vorgestellten Graphen Beispiele für Kleine Welten.

2.4 Kleine Welten: „Naben" und das „Potenzgesetz"

In *vollständigen* Graphen sind je 2 Knoten direkt verbunden, d. h., es gilt $d(A, B) = 1$ für alle Knoten A und B – und damit ist jeder vollständige Graph ein trivialer Sonderfall einer Kleinen Welt. Doch wie kann dann bei großen, natürlichen, nicht-vollständigen Graphen wie z. B. den gerade betrachteten das Kleine-Welt-Phänomen auftreten?

Grad	Anzahl	Grad	Anzahl	Grad	Anzahl
0	83621	20	945	40	111
1	107647	21	825	41	113
2	71452	22	720	42	99
3	39574	23	665	43	95
4	22815	24	563	44	98
5	15205	25	541	45	67
6	10679	26	468	46	83
7	7917	27	460	47	79
8	6255	28	390	48	68
9	4959	29	364	49	67
10	4141	30	311	50	61
11	3283	31	279	51–60	399
12	2808	32	264	61–70	189
13	2368	33	222	71–80	103
14	1993	34	221	81–90	57
15	1756	35	227	91–100	35
16	1575	36	177	101–150	60
17	1311	37	172	151–200	10
18	1147	38	130	201–504	5
19	1046	39	150		

Die Erklärung findet sich oft in der Existenz „weniger“ Knoten mit extrem hohem Knotengrad, genannt „Naben“ („hubs“). Deren Auftreten ergibt sich in vielen Wachstumsprozessen sowohl empirisch als auch modellierend durch “preferential attachment“: Beim Entstehen neuer Kanten zum „Andocken“ an vorhandenen Knoten werden Knoten mit relativ hohem Grad bevorzugt. Dieses Prinzip heißt “rich get(s) richer“ oder auch (mit Bezug auf das Matthäus-Evangelium 25, 29) „Matthäus-Effekt“: „Denn wer da hat, dem wird gegeben werden, und er wird die Fülle haben [...]“

So „sind“ z. B. Bacon und Erdős jeweils Naben in „ihren“ Graphen (mit jeweils noch weiteren Naben). Naben sind für das Ausfallverhalten von realen „Netzwerken“ bedeutsam: Unter welchen Bedingungen bleibt die Funktionsfähigkeit erhalten, wenn gewisse (nicht zu viele) Knoten oder Kanten ausfallen? Bei gezieltem Angriff auf Naben (deren Zerstörung) kann das Netzwerk Schaden nehmen, im schlimmsten Fall sogar zusammenbrechen. Es ist dann in diesem Sinn instabil. Werden aber zu zerstörende Knoten nicht gezielt ausgewählt, sondern (in nicht zu großer Anzahl) nur stochastisch zerstört, so bleibt das Netzwerk funktionsfähig, es ist stabil. Das wurde sowohl empirisch als auch in Modellierungen bestätigt (vgl. [Hischer 2014, 29 ff.]).

Die Tabelle links zeigt die Häufigkeits-Verteilung der Knotengrade von $\mathbf{C}_e$ im Stand von 2010.

Die erste Abbildung unten stellt diese Daten graphisch dar, die zweite zeigt den Anfangsteil in doppelt-logarithmischer Darstellung, und die letzte zeigt (erkennbar für die Knotengrade von etwa 3 bis 16) einen vergrößerten mittleren Ausschnitt mit einem nahezu „geradlinigen Verlauf“, was in der Netzwerktheorie „Potenzgesetz“ heißt:

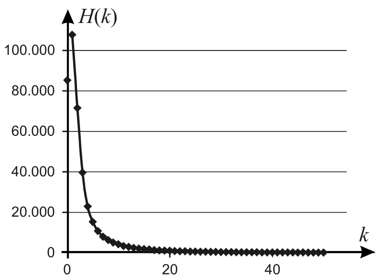
Ist k der Grad eines Knotens und $p(k)$ die relative Häufigkeit der Knotenanzahl in dem Graphen mit dem Grad k, so gilt mit einer Konstanten γ für einen großen Bereich von k die Proportionalität $p(k) \sim k^{-\gamma}$ (*„power law tail“*). Die dritte Abbildung liefert $\gamma_{\text{Erdős}} \approx 2{,}97$, und analog ist $\gamma_{\text{Bacon}} \approx 2{,}3$. Für Kleine Welten gilt dieses „Potenzgesetz“ oft sowohl empirisch als auch in Simulationsmodellen als wichtige weitere Eigenschaft. Die „meisten“ Knoten in solchen Zusammenarbeitsgraphen haben dann einen sehr kleinen Grad. Das Potenzgesetz gilt aber nicht für alle Kleinen Welten, z. B. nicht bei vollständigen Graphen, weil hier alle Knoten denselben Grad haben (vgl. die erste Abbildung!).

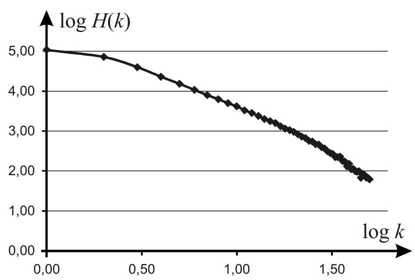
3 Netz, Netzwerke und Vernetzung

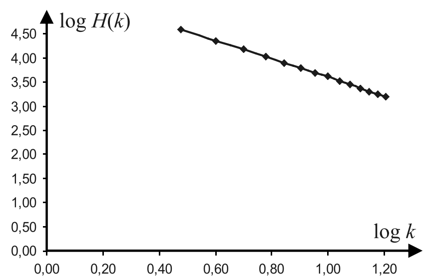
3.1 *Problematisierung*

Das in vielen Bereichen (wie z. B. Soziologie und Biologie) beobachtete *Kleine-Welt-Phänomen* wurde zuerst von Stanley Milgram beschrieben (vgl. [Hischer 2014, 8 f.]) und hat zur Entwicklung der Netzwerktheorie beigetragen (vgl. [Newman 2010]). Ende der 1990er Jahre gelang mit Methoden der Statistischen Physik eine mathematische Modellierung, die ein Verständnis mancher Phänomene wie z. B. dem der „Kleinen Welten“ ermöglichte.

Doch was ist im pädagogisch-didaktischen Kontext unter „Netzwerk“ bzw. „Netz“ zu verstehen? So verwendet z. B. [Hasemann 1988] (also noch vor Etablierung der Netzwerktheorie) im Kontext „kognitionstheoretischer Modelle“ synonym die Termini „Netzwerk“ und „Netz“ (auch „semantische Netzwerke“ bzw. „semantische Netze“ genannt), wobei die Kanten für „semantische







Relationen“ stehen. Strukturell liegen hier (gerichtete) Graphen vor (wie a. a. O. erwähnt).

Sucht man in der Mathematik nach Definitionen für „Netz“ oder „Netzwerk“, so bietet zwar die Graphentheorie mehrere Definitionen für „Netz“ an, die hier jedoch nicht hilfreich sind. Das gilt auch für die Definition von „Netzwerk“ als „zusammenhängender, gerichteter Graph mit genau einer Quelle, genau einer Senke und mit einer Kapazitätsfunktion“ in [Lexikon der Mathematik 2000].

Dies war für mich Anlass für einen eigenen Ansatz zur Entwicklung begrifflicher Präzisierungen für „Netz“, „Netzwerk“ und „Vernetzung“.

3.2 *„Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext*

Eine Sammlung der vielfältigen Bedeutungen von „Netz“ im Alltagsverständnis führt durch Bündelung und Abstraktion zu folgendem Katalog (ausführliche Darstellung in [Hischer 2010, 49 ff.], andeutungsweise auch in [Hischer 2014, 15 ff.]):
Ein Netz

- dient einerseits dem Aufzeigen von Verbindungen bzw. Zusammenhängen,
- dient andererseits dem Herstellen von Verbindungen bzw. Zusammenhängen,
- kann zwar ein Gefangensein bewirken,
- kann aber zugleich Sicherheit bzw. Schutz bieten,
- enthält dennoch oft Schlupflöcher,
- vermag über seinen Inhalt zu täuschen.

Eine Interpretation dieses Eigenschaftskatalogs von „Netz im Alltagsverständnis“ in pädagogisch-didaktischer Sicht lässt drei unterschiedliche Blöcke erkennen:

- *Bestandteile:* Die ersten beiden Eigenschaften beziehen sich auf die Bestandteile eines Netzes (im pädagogisch-didaktischen Kontext sind das Objekte wie Begriffe, Ideen, Dinge, . . . , ggf. Lebewesen), die man wie in der Graphentheorie *Knoten* nennen kann und die durch die oben angesprochenen *Verbindungen* bzw. *Zusammenhänge* als *Kanten* verbunden sind.
- *Benutzer:* Die nächsten drei Eigenschaften betreffen die Benutzer eines Netzes: Sie bilden wie in einem Gemüsenetz den „Inhalt“ eines Netzes, es sind also hier die mit den Bestandteilen umgehenden Benutzer gemeint (z. B. die Schülerinnen und Schüler).
- *Betrachter:* Die letzte Eigenschaft (Täuschung über den Inhalt) betrifft die Betrachter eines Netzes (z. B. Lehrpersonen, die ihre Schülerinnen und Schüler beobachten).

Aus pädagogischer Sicht ist zu beachten: Wie bei einem Spinnennetz oder einem Fischernetz können die Benutzer „Opfer“ eines Netzes werden oder sein, wenn sie sich z. B. in den „Maschen des Netzes“ verfangen, etwa beim Surfen im WWW.

So kann ein materielles Netz für seine Benutzer zum Gefängnis werden, aus dem es sich zu befreien gilt: Menschliche Benutzer eines Netzes laufen damit Gefahr, zum Bestandteil dieses Netzes zu werden – wenn sie etwa bei dessen Benutzung nicht hinreichend „emotionale Distanz“ wahren! Und weiterhin können menschliche Benutzer eines Netzes zu Betrachtern dieses Netzes werden (und umgekehrt), wobei das Netz diese (und ggf. andere) Gruppen (möglicherweise „durchlässig“) trennt.

Eine vierte denkbare Gruppe, nämlich die der Konstrukteure eines Netzes, ist verzichtbar – wir können die Aufgabe der Konstruktion bei den Betrachtern ansiedeln, fallweise auch bei den Benutzern. Insgesamt zeigt sich: Die begriffliche Unterscheidung zwischen Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern eines Netzes ist weder scharf noch absolut, sie ist relativ, sie meint eine zweckbezogene Tendenz, und es ist ein Rollenwechsel möglich.

Ein „greifbares“ materielles Netz (Fischernetz, Spinnennetz, Trapeznetz) wird i. d. R. als *einfacher* (mehrfachkantenfreier) *Graph* beschreibbar sein. Das scheint nach dem hier vorliegenden Ansatz für ein „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext nicht zu gehen.

Vielmehr liegen zunächst Assoziationen mit dem soziologischen „System“ nahe (bei dem ebenfalls die „Betrachter“ eine wichtige Rolle spielen). Dennoch benötigt man den dubiosen Systembegriff wohl nicht:

Das „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“ besteht aus den drei „Trägermengen“ der Bestandteile, der Benutzer und der Betrachter, den (noch näher zu beschreibenden) Beziehungen (Relationen, Operationen) innerhalb dieser drei Trägermengen und schließlich aus strukturellen Beziehungen zwischen diesen drei Trägermengen.

Zur strukturellen Beschreibung der Bestandteile (den „Knoten“ mit ihren Verbindungen als „Kanten“) bieten sich einfache (ggf. gerichtete) Graphen an, die man sich überlagert bzw. kombiniert denken kann, um auf diese Weise ggf. vorhandene Mehrfachkanten (bei „Multigraphen“) zu erfassen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der Benutzer zu den Bestandteilen und der Benutzer untereinander lassen sich bei Bedarf durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen Beziehungen der Betrachter zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, außerdem Beziehungen der Betrachter untereinander, so dass mehrere Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Kombination ein Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext ausmachen.

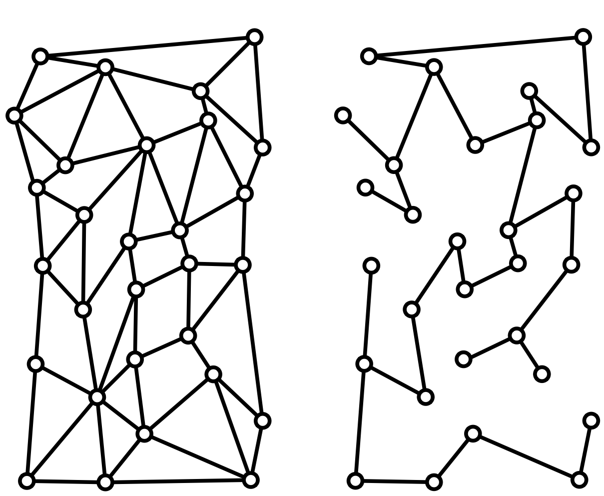
3.3 *Netzgraph, Netzwerk, Vernetzung*

Dazu sei hier zunächst ein kleiner Ausflug in die Welt der (mathematischen) Graphentheorie vorangestellt bzw. nachgeholt (vgl. z. B. [Hischer 2010]): In einem ersten Schritt sind spezielle einfache Graphen zu charakterisieren, die das graphentheoretisch „Innerste" der Netze (nämlich ihre Bestandteile) axiomatisch beschreiben:

Im idealtypischen Fall soll dies ein Netzgraph (Abbildung unten links) sein, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist: (1) ein endlicher, zusammenhängender Graph (ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Knoten ein „Weg" existiert), (2) bei dem jede Kante „Teil einer Masche" ist (eine Masche ist ein sehnenfreier Kreis, und ein Kreis ist ein geschlossener Weg, bei dem jeder Knoten und jede Kante genau einmal vorkommt, also auch ohne Wiederholungen), (3) ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat (der Grad eines Knotens gibt die Anzahl der Kanten an, die mit dem Knoten „andocken", „inzidieren" genannt). In Netzgraphen gibt es dann zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege (siehe Abbildung).

Diese *ideale Vernetzung* würde bedeuten, dass es zu jedem Eingang mindestens zwei Ausgänge gibt, oder anders: dass es *stets verschiedene Wege zu einem Ziel* gibt (was vielleicht als Kennzeichen für einen *offenen Unterricht* deutbar ist ...).

In der *Netzwerktheorie* ist „Netzwerk" oft nur ein anderer Name für die dort (in Anwendungs- oder Modellierungssituationen) betrachteten Graphen. Hier wird nun stattdessen vorgeschlagen, „Netzwerk" als abgrenzenden Namen für einen (einfachen) *zusammenhängenden, maschenhaltigen Graphen* (Abbildung unten rechts) zu nehmen, womit dann ein „Baum" kein Netzwerk ist. (Ein Graph sei „maschenhaltig" genannt, wenn er mindestens eine Masche enthält).



Jeder Netzgraph ist damit ein Netzwerk, aber nicht umgekehrt. Ferner: Genau *Netzwerke* sind stets *vernetzt*, *Netzgraphen* sind *ideal vernetzt*, *Bäume* sind aber *nicht vernetzt*, sondern nur *verzweigt*:

Während es in einem Netzgraphen zwischen je zwei Knoten stets mindestens *zwei* verschiedene Wege gibt, liegt bei Bäumen die konträre Situation vor, denn hier gibt es zwischen je zwei Knoten stets genau *einen* Weg. In diesem Sinne sind *Mind-Maps* i. d. R. nicht vernetzt, also keine Netzwerke.

Es gibt graduelle Abstufungen von „Vernetzung", die qualitativ beschreibbar und auch durch *Vernetzungsgradmaße* quantitativ messbar sind (vgl. [Hischer 2010, 110 ff.; 190 ff.]).

4 Konsequenzen

4.1 *„Vernetztes Denken" vs. „Vernetzendes Denken"*

Dies ist nur ein kleiner Zwischenruf, dem eigentlich mehr Platz gebührt:

Vielfach (leider: meistens) wird „vernetztes Denken" propagiert, jedoch fordert [Klafki 2007, 63] in seinem Allgemeinbildungskonzept erfreulicherweise „vernetzendes Denken". So sollte man zwischen „vernetztem Denken" (einer Nutzung bereits vorhandenen Vernetzseins) und „vernetzendem Denken" (der Herstellung neuen Vernetzseins) unterscheiden (vgl. auch hier die Ausführungen in [Hischer 2010]).

4.2 *Kleine Welten und vernetzender Unterricht*

Hier sei zunächst an die in der Didaktik bisher betrachteten „semantischen Netzwerke" gedacht (siehe z. B. [Hasemann 1988]), die der Beschreibung der Struktur von *Unterrichtsinhalten* dienen (sollen): *Knoten* sind z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen, Sätze, ...*, auch *Beispiele* unter Einschluss von *Übungsaufgaben*. *Kanten* sind Beziehungen zwischen diesen Knoten: *logische* im Sinne des Schließens und des Folgerns bzw. des Folgens, aber auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrens, Ratlosseins, ..., die insgesamt zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung" der Knoten beitragen (können).

Diese Kanten können sowohl *gerichtet* als auch *ungerichtet* sein.

Zur Vermeidung von Missverständnissen sei betont, dass diese nur beispielhaft und nicht abschließend gemeinte Aspektauflistung für Knoten und Kanten aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler zu sehen ist: Was sind für *sie* Ankerpunkte des Wissens (Entdeckens, Behaltens, ...), und wie verknüpfen *sie* das alles miteinander, wie „konstruieren" oder „rekonstruieren" *sie* das? Es soll also hier nur *angedeutet* werden, was möglich ist – Konkretes muss weiteren Untersuchungen und Analysen vorbehalten bleiben.

Hier sollten nun die erwähnten *Naben* in den Blick kommen, denn sie ermöglichen *kurze Wege* zwischen den Knoten, und ihr *Ausfallverhalten* ist wichtig: Wie entstehen solche Naben, wie kann man ihre Entstehung und Stabilisierung fördern, wie Wichtiges gegenüber Unwichtigem betonen?

„Vernetzen" ist dann ein Prozess, bei dem aus bereits vorliegenden Knoten ein *Netzwerk* gebildet und erweitert wird – durch Einziehen neuer Kanten bei vorhandenen Knoten (durch "preferential attachment"?) bzw. durch Einfügung neuer Knoten, gefolgt vom Einziehen weiterer Kanten –*vernetzendes Denken!* Zu Beginn eines solchen Prozesses müssen die ersten Knoten und Kanten noch kein Netzwerk im definierten Sinn bilden. Doch mit der ersten auftretenden Masche liegt dann zumindest eine teilweise Vernetzung vor. Dieser Prozess kann ggf. auf die Entstehung eines Netzgraphen hinauslaufen. Aber auch ein „Schrumpfen" ist möglich. Aufgrund der unterschiedlichen Kantentypen (gerichtet oder ungerichtet) können die Bestandteile ggf. in mehrere Graphen zerlegt gedacht werden, die sich überlagern.

Diese Andeutungen bedürfen einer Vertiefung an anderer Stelle: Zum Verstehen solcher Vernetzungsprozesse sind möglicherweise einschlägige Erkenntnisse und Methoden u. a. auch aus der (soziologischen) Netzwerktheorie heranzuziehen.

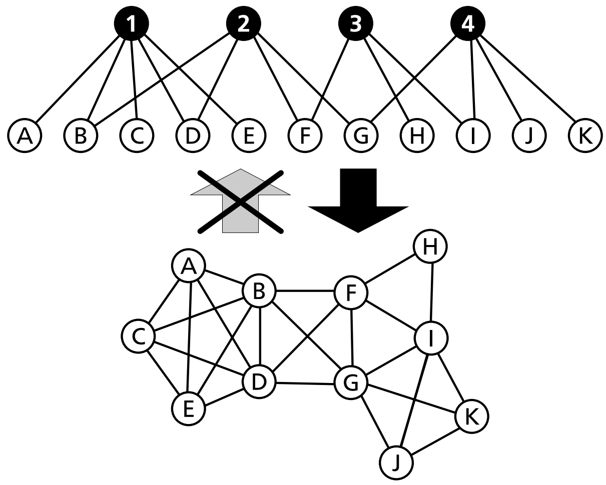
4.3 *Kleine Welten im Mathematikunterricht?*

Hier seien nur einige *inhaltliche Anregungen* für eine neuartige, aktuelle Betrachtung von Graphen im Mathematikunterricht skizziert. Diese *offene Liste* ist jedoch nicht als empfohlene Reihenfolge der Behandlung im Unterricht gedacht:

- „Renaissance" der Thematisierung endlicher Graphen im Unterricht durch Experimentieren mit „kleinen" endlichen Graphen.
- „Kleine-Welt-Phänomen": experimentelle Aneignung empirischen Wissens im WWW mit „großen" endlichen Graphen (Bacon, Erdős).
- Statistische Datenbankauswertung: Mittelwerte, zeitliche Entwicklungen, Potenzgesetz, …
- Eigenschaften großer „Netzwerke": Naben, Ausfallverhalten.
- Netzwerkstatistiken: mittlerer Knotenabstand, mittlerer Knotengrad, …
- Transfer dieses empirischen Wissens auf andere große „Netzwerke".
- …

4.4 *Kleine Welten und soziale Netzwerke*

Was ist ein „soziales Netzwerk"? Man denkt hier vermutlich an Facebook, Twitter usw. – jedoch: Wie sieht eigentlich die Struktur dieser Netzwerke aus? Die Abbildung oben rechts visualisiert Wesentliches (nach [Newman et al. 2001, 02618-2]):



Der obere Graph ist ein *bipartiter Graph*, dessen Knotenmenge in zwei Teilmengen zerfällt, deren Knoten jeweils nicht benachbart sind. Wenn beispielsweise die Ziffern für Filme und die Buchstaben für Akteure stehen, dann liegt ein Zusammenarbeitsgraph wie im Abschnitt 2.1 vor, also ein Akteurs-Graph.

Der untere Graph ist die *unipartite Projektion* des oberen Graphen, sie enthält offenkundig weniger Informationen als der obere Graph. Beides sind Beispiele für *soziale Netzwerke*, wie sie in der Soziologie als *affiliation networks* (also Verwandtschaftsnetzwerke oder Freundschaftsnetzwerke) untersucht werden:

Die Kanten in der unipartiten Projektion stehen für existierende „Gemeinsamkeiten" der Knoten (hier also für gemeinsame Filme der Akteure), während die obere Darstellung (also der bipartite Graph) auch angibt, welches jeweils die gemeinsamen Filme sind. Es werden sogar *alle* gemeinsamen Filme angegeben (so sind 1 und 2 gemeinsame Filme von B und D).

Ferner kann man die Abbildungen auch als Darstellungen des Erdős-Graphen ansehen oder sich hierbei Schülerinnen und Schüler mit ihren Interessen usw. vorstellen.

Insbesondere schließt sich mit dieser Darstellung sozialer Netzwerke der Kreis zur bisher vorgestellten und unabhängig davon entwickelten Konzeption von „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext": Die Ziffern im oberen Teil des bipartiten Graphen mögen für die Bestandteile (z. B. „Unterrichtsinhalte") stehen und die Buchstaben für die Benutzer (z. B. Schülerinnen und Schüler). Dann wird deutlich, dass mit diesem bipartiten Graphen ein Teilaspekt von „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext" erfasst wird.

Hinzu kommen die Betrachter, für die Ähnliches gilt, und man kann dann entsprechend die graphentheoretische Struktur (im einfachsten Fall) zu „tripartiten Graphen" erweitern: Beziehungen zwischen den Benutzern und gewissen Bestandteilen, Beziehungen zwischen den Betrachtern und denselben Bestandteilen und schließlich Beziehungen zwischen den Benutzern und den Betrachtern. (Komplexer wird es bei der Berücksichtigung von Beziehungen unterschiedlichen Typs).

In Abschnitt 3.2 wurde das auf einer Analyse des Alltagsverständnisses von „Netz" basierende Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext vorgestellt. Dieses erweist sich nun in neuer Sicht als ein verallgemeinertes dreifach strukturiertes soziales Netzwerk, das „Pädagogisches Netz" genannt sei.

Wegen der komplexen Beziehungen zwischen den Knoten der drei Ebenen (Bestandteile, Benutzer, Betrachter) wird der entsprechende tripartite Graph in aller Regel nicht planar sein. Berücksichtigt man, dass die in den „Bestandteilen" erfassten Elemente von unterschiedlichem Typ sein können und sein werden, so wird die „Bestandteilsebene" in Teilebenen aufzuspalten sein.

Diese (z. T. noch vagen) Andeutungen mögen zu einer ungewöhnlichen, ungewohnten Sichtweise anregen: Eine derartige graphentheoretisch orientierte Kennzeichnung sozialer Netzwerke bietet im Prinzip ein reichhaltiges Werkzeug zur Erfassung kommunikativer und sozialer Strukturen im Unterricht, welches sich für Untersuchungen, Beschreibungen und Planungen im pädagogischen Rahmen eignet. Entsprechende Methoden sind jedoch an anderer Stelle noch auszuarbeiten und zu erproben.

Dabei ist zu prüfen und zu berücksichtigen, inwieweit konkrete Werkzeuge in der mathematischen Netzwerktheorie und insbesondere in der Soziologie (oder auch in anderen Disziplinen) bereits vorliegen, um (in ggf. modifizierter Form) darauf zurückgreifen bzw. darauf aufbauen zu können.

Für die Planung, Durchführung und Auswertung des Unterrichts spielen sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrpersonen (und ggf. weitere Betrachter) eine wesentliche Rolle. Mit Hilfe des beschriebenen „Pädagogischen Netzes" werden diese explizit berücksichtigt. Damit sei ein interessantes Forschungs- und Entwicklungsfeld umrissen.

Ich danke Wilfried Herget, Anselm Lambert und Hans Schupp für wertvolle kritisch-konstruktive Rückmeldungen zu diesem Beitrag.

Literatur

Brandl, Mathias & Nordheimer, Swetlana [2011]: *Zufällig vernetzt? Vernetzungen mit Stochastik im Lehrplan und darüber hinaus.* In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 143–146.

Freudenthal, Hans [1973]: *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Klett.

Hasemann, Klaus [1988]: Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse, In: *Journal für Mathematikdidaktik*, **9** (1988) 2/3, 95–161.

Hischer, Horst [2010]: *Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? – Vernetzung als Medium zur Weltaneignung.* Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst [2012]: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hischer, Horst [2014]: *Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik.* Erscheint in einem Tagungsband. Vorab als Preprint: www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint342.pdf

Klafki, Wolfgang [2007]: *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik – Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik.* Weinheim/Basel: Beltz (6., neu ausgestattete Auflage; 1. Auflage 1985).

Lexikon der Mathematik [2000]: Mannheim/Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Lietzmann, Walter [1949]: *Das Wesen der Mathematik.* Braunschweig: Vieweg.

Newman, Mark [2010]: *Networks. An Introduction.* Oxford: Oxford University Press.

Newman, Mark E. J. & Strogatz, Steven H. & Watts, Duncan J. [2001]: Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. In: *Physical Review* E, 64(2001), 026118, 1–17.

Vollrath, Hans-Joachim [1976]: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht*, **22** (1976) 5, 7–24.

Vollrath, Hans-Joachim [2001]: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagenschein, Martin [1970]: *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I.* Stuttgart: Klett (2. Auflage; 1. Auflage 1965).

Wittenberg, Alexander Israel [1990]: *Bildung und Mathematik – Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Stuttgart: Klett. (Erstausgabe 1963, geschrieben in Québec, Kanada.)

Wittmann, Erich Christian [1978]: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg (fünfte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage; 1. Auflage 1974).

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de