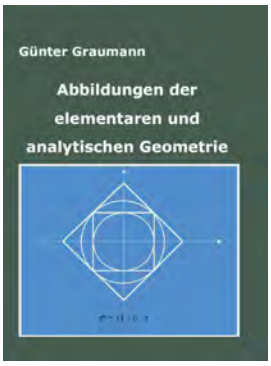
Günter Graumann: Abbildungen der elementaren und analytischen Geometrie

Rezensiert von Hans Schupp



Ziel des Autors ist die „systematische Untersuchung der Abbildungen der Elementaren Geometrie“. Die „grundlegenden Kenntnisse der Elementaren Geometrie und die Definitionen der üblichen geometrischen Abbildungen“ setzt er dabei als bekannt voraus. Für diese verweist er auf sein Buch „Grundbegriffe der Elementaren Geometrie“.

Jetzt orientiert er sich an Felix Kleins Erlanger Programm, d.h. er versteht Geometrie als Invariantentheorie von Abbildungsgruppen und führt konsequent erst Kongruenz-, dann Ähnlichkeits- und schließlich affine Abbildungen über ihre Invarianten ein. Das hat den Vorteil, dass sich die zugehörigen Kapitel im Aufbau gleichen und nicht wenige Strukturuntersuchungen analogisiert werden können.

Weiter ist es so recht einfach möglich, nach den ebenen die entsprechenden räumlichen Abbildungen zu betrachten (was meist viel zu selten geschieht). Die zugehörigen Abbildungsgleichungen der Analytischen Geometrie, ihre Synthese und Analyse schließen sich jeweils an.

Ein solcher Lehrgang verbietet sich für den Unterricht aus Zeit- und Anspruchsgründen. Der Autor stellt sich indessen vor, dass er Studierenden und Lehrenden der Mathematik bei der „Vorbereitung und Vertiefung des Kenntnishintergrundes“ nützlich sein kann. Er denkt dabei sogar an „interessierte Schülerinnen und Schüler“, was der Rezensent angesichts der durchziehenden Satz- und Beweisfülle des Werkes sowie des Schwierigkeitsgrades vieler Beweise für wenig realistisch hält.

Es verbleibt stets und vollständig im Bereich der Abbildungen. Die bekannte „Abbildungsalgebra“ dominiert. Wenn der Autor in seinem Vorwort davon spricht, dass Abbildungen „vielfach bei der Gewinnung von Erkenntnissen und dem Beweisen von Sätzen verwendet“ werden, so ist nachfolgend davon nicht mehr die Rede.

Das gilt leider auch schon für das Vorgängerwerk. Dort treten Kongruenzabbildungen unvermittelt auf und sind erstaunlicherweise sofort über ihre Invarianten definiert. Sodann werden die vier Typen dieser Abbildungen vorgestellt, aber lediglich als Konstruktionen und ohne Bezug auf diese Invarianten. Ihre Eigenschaften werden vielmehr der Anschauung entnommen. Ganz analog sind die Kongruenzabbildungen des Raumes behandelt. Die Arbeit mit Abbildungen beschränkt sich beide Male auf Symmetrien einfacher Punktmengen; regelmäßige Vielecke und Platonische Körper treten auf, werden aber nicht dynamisiert. Bezeichnenderweise erscheinen die Kongruenzsätze als bloße Erfahrungen bei der Dreieckskonstruktion. Die mathematische und die didaktische Basis für einen späteren, systematisch angelegten Abbildungslehrgang sind demnach recht schmal.

Das offenbart sich gleich in seinem ersten Kapitel. Nach Wiederholen der Definition einer kongruenten Abbildung mittels Invarianten (s. o) wird gezeigt, dass sie überbestimmt ist, d.h. dass alle anderen Invarianten aus Bijektivität und Längentreue folgen. Aber dazu und später beim Nachweis, dass die bekannten Kongruenzabbildungen wirklich solche sind, benutzt der Autor die unbewiesenen Dreieckskongruenzsätze. Das könnte man zwar vermeiden, macht aber diese ohnehin schon nicht trivialen Überlegungen noch umfangreicher. Erst bei der Festlegung der Bestimmungsstücke einer kongruenten Abbildung wird unter der Hand der Kongruenzsatz sss bewiesen.

Wenn es dann um Zweifach-, Dreifach- und allgemein um n-fach-Spiegelungen geht, ist der Autor in seinem Element. Die Spiegelungsalgebra führt er sorgfältig durch; er erhält damit alle vier Abbildungstypen und verkettet (diese Bezeichnung fehlt leider) sie dann in zahlreichen Beispielen.

Die analytische Behandlung der Kongruenzabbildungen folgt zunächst gewohnten Spuren (s. etwa Jehle; Möller; Zeitler), scheut aber auch nicht die teilweise komplizierten Gleichungen bei allgemeiner Lage von Spiegelachsen, Drehzentren und Verschiebungsvektoren. Dass die Gleichungen dann auch mit Vektoren und Matrizen dargestellt werden, führt nicht wirklich weiter. Hier wäre die Herleitung von Abbildungseigenschaften nun auch auf analytischem Wege aufschlußreicher gewesen.

Die kongruenten Abbildungen des Raumes schließen sich an. Sie werden in enger Analogie zur ebenen Kongruenz aufgebaut und vorgestellt. Die eindeutige Bestimmtheit einer solchen Abbildung durch ein Paar kongruenter Dreieckspyramiden leidet darunter, dass nicht deutlich gesagt wird, wie man diese Körperkongruenz de facto erkennt.

Die Analogie erfasst dann auch die analytische Darstellung. Obwohl dort nur noch ausgezeichnete Lagen der Ebenenspiegelungen, Achsendrehungen und Verschiebungen betrachtet werden, lesen sich diese Abschnitte recht mühsam. Das liegt weniger an den Inhalten als an der drucktechnischen Darstellung. Der Text ist dicht gedrängt, obwohl nur etwa ¾ jeder Seite genutzt werden. Die dreidimensionalen Figuren sind (jetzt und später) kaum nachzuvollziehen.

Die nächsten vier Kapitel sind den Ähnlichkeitsabbildungen gewidmet; es folgen vier Kapitel über affine Abbildungen. Da sie den geschilderten Aufbau der Kongruenzabbildungen großenteils übernehmen, sollen sie hier nur zusammenfassend vorgestellt werden.

Am Anfang steht jeweils die Definition per Invariantenangabe sowie die zugehörige Figurenverwandschaft (im Unterschied zur Kongruenz jetzt über die Abbildung). Dann wird die Gruppenstruktur hergeleitet. Es folgt eine herausgehobene Abbildung (die zentrische Streckung bzw. die axiale Streckung (Achsenaffinität oder Scherung)).

Dabei verwundert, dass in einem ansonsten streng abbildungsgeometrisch orientierten Lehrgang der zentrischen Streckung die Strahlensätze vorangehen. Deren Abbildungseigenschaften würden sie vollkommen ersetzen.

Die weiteren Abbildungen derselben Gruppe ergeben sich durch Verkettung der herausgehobenen mit bereits bekannten Abbildung(en). Spezielle Verkettungen führen zu weiteren neuen Abbildungen und mit ihnen zu einer Typisierung der jeweiligen Gruppenelemente.

Wie zuvor schließt sich eine analytische Behandlung und sodann eine synthetische und analytische Weiterführung in den Raum an. (Die Beschreibung von Ähnlichkeitsabbildungen durch komplexe Zahlen stört zwar nicht, bringt aber auch nicht weiter.)

Das alles ist umsichtig und mit ganz wenigen Ausnahmen auch korrekt durchgeführt und wegen der durchziehenden Analogien gut zu verstehen, aber eben deswegen auch recht trocken, zuweilen fast langweilig. Die in Werken gleicher Zielsetzung (s. u.) mitunter gezeigte konstruktive und ästhetische Wirkung der Abbildungen auf Figuren fehlt hier leider völlig. Hat der Autor diesen Mangel selbst gespürt? Die Cover-Figur (s. o.) zeigt als interessante Konfiguration ein Quadrat und seinen Inkreis vor und nach einer Drehstreckung. Innen vermisst man solche Beispiele.

Auf projektive Abbildungen in Ebene und Raum geht der Autor nicht ein. Stattdessen bringt er (synthetisch und analytisch) Grundzüge der Inversion in Ebene und Raum sowie einige wichtige Projektionen vom Raum auf die Ebene. Er schließt mit der stereographischen Projektion.

Graumann detailliert das Erlanger Programm in den Abbildungsbereichen bis zur affinen Geometrie (die Klein 1872 nicht eigentlich interessieren). Er tut dies – wie intendiert – auf systematische, strukturbetonende Weise und überzeugt damit trotz einiger Schwächen. Warum diese Analyse aber auch den Geometrieunterricht anbetrifft und ihn – etwa als eine Hintergrundtheorie – weiterbringen könnte, wird nicht behandelt und bleibt verborgen.

Graumann, G.: *Grundbegriffe der Elementaren Geometrie*. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz 2004

Jehle,F.; Möller, H.; Zeitler, H.: *Analytische Geometrie der Abbildungen*. München: Bayerischer Schulbuchverlag 1968

Klein,F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen: Deichert 1872

Schupp, H.: *Abbildungsgeometrie*. Weinheim: Beltz 1974[4]

Graumann, Günther: *Abbildungen der elementaren und analytischen Geometrie*, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2013, ISBN 978-3-88120-830-7, € 19,80

Hans Schupp, Universität des Saarlandes, Campus E2 4, 66123 Saarbrücken, Email: schupp@math.uni-sb.de