Leserbriefe

Sehr geehrter Herr Professor Dr. Vohns,
das Vorwort des 1. Vorsitzenden, Herrn Prof. Rudolf vom Hofe, hat mich als Gründer und ersten Vorsitzenden des GDM-Arbeitskreises Geometrie sehr gefreut. Leider hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen: Die erste Herbsttagung des Arbeitskreises für Geometrie fand 1984 nicht an der TU München, sondern am Gymnasium Neubiberg statt. Man hatte sich damals zwar bemüht, sehr viele Lehrerinnen und Lehrer aus dem Münchner Osten einzuladen, die Resonanz war aber doch nur sehr gering, so dass zukünftig diese Idee nicht weiter verfolgt wurde.

Mit freundlichen Grüßen
Meyer (karlhorst@meyer-muc.de)

Sehr geehrter Herr Vohns,
Anlass des Briefes sind die neuesten Mitteilungen der GDM Nr. 96.

Eigentlich wollte ich schon früher schreiben und mich einfach einmal für die Arbeit bedanken, die (schon früher, aber durch die Zunahme des Umfangs immer mehr) in der Vorbereitung der Hefte steckt. Aber immer wider habe ich es dann doch nicht getan.

Jetzt also, weil mein Name (S. 5 – diese wie alle folgenden Seitenangaben beziehen sich auf das genannte Heft) auftaucht? Die menschliche Eitelkeit gleicht dem mathematischen Epsilon: Beliebig (groß oder klein), aber immer größer als Null. Das ist aber dennoch sicher nicht der Grund.

Schon eher, weil viele Namen auftauchen, die mit persönlichen Erinnerungen verbunden sind. Das sind z. B. die Autoren im Magazin und Werner Blum mit seinem anrührenden Nachruf auf Arnold Kirsch. Dennoch hätte das wohl noch nicht ausgereicht, „zur Feder“ zu greifen, also dafür den Computer anzufahren.

Schon eher, dass die Stoffdidaktik (endlich) wieder ohne schmähende Adjektive auftaucht – im Nachruf von Werner Blum (S. 75 f.) und im Bericht über den Arbeitskreis Geometrie (S. 34 samt der hinteren inneren Umschlagseite – so hoffentlich Anstoß zu einer Diskussion unter Einbeziehung anderer, „modernerer“ Aspekte der Mathematikdidaktik und der Bezugswissenschaften) – oder der Hinweis von Lothar Profke auf den Einstieg in den Geometrieunterricht von der Raumgeometrie aus (S. 32). Aber wahrscheinlich hätte all das auch das noch nicht gereicht.

Endlich sei es gesagt: Das „Merkel-Deltoid“ (S. 1) ist der Grund. Die Formulierung „Merkel-Raute“ kannte ich natürlich. Als ich sie zum ersten Mal las, legte ich irritiert meine Hände flach auf den Tisch und formte mit Daumen und Zeigefinger eine Figur, die man leicht zum Viereck abstrahieren kann – und das Viereck war bei mir (wie wohl bei allen „anatomischen Standardmenschen“) ein Drachen. Also, so dachte ich, ist das eben wieder einmal eine umgangssprachliche Benennung, die mit der mathematischen Begriffsbildung nicht zu vereinbaren ist. Das gilt schließlich z. B. auch für fast alle Stückchen „Würfelzucker“, denn wer würde schon „Quadratische-Säulen-Zucker“ sagen wollen.

Aber nun kommt einerseits der Text und andererseits das Bild zur „Merkel-Raute“ – und da passt einiges nicht mehr zusammen. „Geeignete Neigung der Handflächen erzeugt den gewünschten Rombus“ steht da, und dass es „eben nur auf die ‚richtige' Perspektive“ ankäme.

Je nun – eigentlich müsste man das Sehen und das Fotografieren mit Hilfe einer Zentralprojektion „mathematisieren“. Das erkennt jeder Fotograf, der mit nach oben geneigter Kamera z. B. von der Domplatte in Köln den Dom fotografiert: Die Bilder der Türme neigen sich aufeinander zu – es gibt „stürzende Linien“. Die erwartete Parallelentreue ist bei den über 150 m hohen Türmen verletzt. Man vergleiche z. B. www.wackerart.de/Foto/koeln/Dom-Cologne.html. Warum aber erwarten wir die Parallelentreue? Aus Erfahrung. Ist nämlich das abzubildende Objekt klein gegen die Aufnahmedistanz, so genügt zur mathematischen Beschreibung die Parallelprojektion. Das gilt auch beim Kölner Dom, wenn man im gleichen Foto das oberste (im Raum vertikalen) Fenster in einem Turm anschaut: Das Foto zeigt (nahezu, die Abweichung ist auch mit einem Geodreieck nicht erkennbar) ein Parallelogramm.

Mit der Idee der Parallelentreue zeichnen wir auch (insbesondre im karierten Mathe-Heft) leicht ein (Schräg-)Bild eines Würfels, der auf dem Tisch vor uns liegt. Dass es sich dabei um eine schiefe Parallelprojektion handelt, muss man zunächst nicht wissen. Das (ebene) Bild wird (zumindest in unserem Kulturkreis) problemlos, also auch von Kindern, als (räumlicher) Würfel interpretiert. Die Kinder sagen: „Das ist ein Würfel“ (und nicht „Das ist das Bild eines Würfels“ – wie es der am 14. 1. 2014 verstorbene Z. P. Dienes einst forderte – auch ein Beispiel für die auf S. 4 erwähnte „Neue Mathematik“). Es ist allgemeiner Sprachgebrauch, bei Bildern den Gegenstand als Namensgeber zu nehmen: „Das ist der Kölner Dom“ und nicht „Das ist ein Foto des Kölner Doms“ , „Das ist die Merkel-Raute“ und nicht „Das ist ein Foto der Merkel-Raute“. Dass das erwähnte „Würfel-Schrägbild“, das jedes Grundschulkind „erkennt“, auch das Schrägbild eines ganz anderen Körpers (nicht einer quadratischen Säule, nein, viel komplizierter) sein kann, weil die Parallelprojektion nicht bijektiv ist, sei nur am Rande erwähnt – es ist hier ohne Bedeutung, soll aber schon darauf hinweisen, dass „offensichtliche“ Deutungen oft falsch sind.

Nur bei einer Kugel wäre das Abbilden mit dem Schrägriss, einem Schrägbild als Ergebnis, fatal. Das Bild einer Kugel wäre eine Ellipse, und das widerspricht wieder eklatant unserer Erwartung. Wir erwarten einen Kreis als Bild einer Kugel. Auch das kann man haben: Man muss eben eine senkrechte Parallelprojektion (Normalprojektion) nehmen. Auf jeden Fall ist die (senkrechte und schiefe) Parallelprojektion (im Allgemeinen, die Ausnahme wird gleich erwähnt) parallelentreu: Das Bild zueinander paralleler Graden sind zueinander parallele Geraden.

Bei einer schiefen Parallelprojektion werden Längen von Strecken vergrößert oder verkleinert. Für Ersteres soll hier das Diktum „Zwerge müssen bis zum Abend warten, um lange Schatten zu werfen“ als Beleg gelten, für Letzteres, dass der Grundriss (ein Normalriss) eines auf einer horizontalen Ebene stehenden Würfels „nur“ ein Quadrat ist – die Länge der Höhen-Kanten ist auf 0 geschrumpft.

Bei einer Normalprojektion werden alle Längen mit dem Kosinus des Neigungswinkels multipliziert. Misst der Neigungswinkel 0°, bleibt die Länge unverändert, sonst wird sie kleiner. Bei 90° wird die Länge 0.

In beiden Fällen gilt aber: Lässt man den uninteressanten Fall der projizierenden Richtung (die, bei der die Länge 0 wird – und das ist der Fall, in dem man auch nicht mehr von „Parallelentreue“ sprechen kann) weg, dann werden Längen von Strecken auf einer Geraden immer mit demselben Faktor multipliziert. Das bedeutet, dass das Teilverhältnis invariant ist. Und jetzt sind wir wieder bei dem Merkel-Deltoid. Es kann, egal, aus welcher Richtung betrachtet, aber normale anatomische Verhältnisse (Daumen kürzer als Zeigefinger, damit verschieden lange Diagonalen, nur eine davon wird von der anderen halbiert) vorausgesetzt, niemals eine Raute (jede Diagonale halbiert die andere) werden.

Diese Argumentation „passt“ in ein (nicht „das“) „Haus der Vierecke“ (vgl. S. 33), das die Vierecks-Symmetrien als wichtiges Ordnungskriterium nimmt. Ein anderes, das die Parallelität von Seiten stärker betont, könnte scheinbar auf einen Schlag zum Ziel führen: Eine (echtes) Deltoid hat keine zueinander parallele Gegenseiten. Wo sollten also die zueinander parallelen Gegenseiten der Raute herkommen. Nur wird hier, überlegt man etwas genauer, nicht (nur) die Parallelentreue der Parallelprojektion für die Argumentation gebraucht, sonder (zusätzlich) die Bijektivität der Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere (im Nicht-Ausartungsfall, das Bild ist nicht nur eine Strecke) – ein hier zu weiters Feld. Aber da ist auf S. 1 doch auch das Wikipedia-Bild, und das sieht nun wirklich aus wie eine Raute – das IST eine Raute. Wie geht das denn dann?

Recht einfach: Das eingangs geschilderte Experiment, beide Hände flach auf den Tisch zu legen, hat das Problem nicht adäquat nachgebildet. Frau Merkel hält die Hände ja im Raum. Wenn man das mit den Händen nachmacht und die Hände von der Ausgangslage (beide in einer Ebene) nach und nach in die Lage von Dürers „betenden Händen“ (aus der Sicht der/des Betenden – notfalls bei https://de.wikipedia.org/wiki/Betende_Hände nachschauen) bewegt, hat man verschiedene Zwischenlagen. Man kann die Daumen abgespreizt lassen oder – wie bei Dürer – dann fast an die Zeigefinger anlegen. In allen Fällen (außer den uninteressanten Rand-Fällen, der eingangs beschriebenen Ausgangslage und der Endlage, in der die Handflächen aufeinander liegen) liegt kein ebenes, sondern ein räumliches Viereck vor. Dann gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Diagonalen – sie liegen auf zueinander windschiefen Geraden. Damit gibt es keine zwei festgelegte Teilstrecken auf der zunächst nicht halbierten Diagonalen der Ausgangslage, die bei der Parallelprojektion mit dem gleichen Faktor „gestreckt“ oder „gestaucht“ werden müssten. Die obige Argumentation „passt“ also nicht zum realen Problem. Und damit kann als Bild (!) der Hände von Frau Merkel eine Raute entstehen. Die Finger bilden aber ein räumliches Viereck – weder eine Raute noch ein Deltoid.

Oder doch etwas anderes? Silke Burmester (nach SPIEGEL ONLINE – 15. 9. 2013) schreibt:

> Unsere Kanzlerin ist Naturwissenschaftlerin, nicht Ausdruckstänzerin – also pflegt sie ihre Finger zur „Merkel-Raute“ aneinanderzulegen.

> Die Wahlkämpfer der CDU erklären das zu ihrem Markenzeichen. Aber womöglich verbirgt sich hinter dem ominösen Trapez etwas ganz anderes.

Aber das mit dem Trapez wäre eine neue Geschichte, und sie wäre wohl weder mathematisch noch anatomisch zu retten.

Und nicht vergessen: Ganz am Anfang des Briefes stand der Dank für die Arbeit mit den Mitteilungen!

Viele Grüße
Kurt Peter Müller

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

▪ ***Vorstand***. *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de
▪ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de
▪ *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg. Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de
▪ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at
▪ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
▪ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum
▪ Verleger: GDM ▪ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ▪ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ▪ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ▪ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.