

Arbeitskreis Geometrie: „Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen – Ziele und Visionen 2020“

Jena, 18.–20.10.2013

Andreas Filler and Anselm Lambert

Der Arbeitskreis Geometrie führte in diesem Jahr seine 30. Herbsttagung durch. Zu den 30 Teilnehmern zählten sowohl langjährige AK-Teilnehmer, u. a. der Mitbegründer des Arbeitskreises Lothar Profke, als auch viele junge Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die gerade an ihren Promotionsvorhaben im Bereich der Didaktik der Geometrie arbeiten.

Den Hauptvortrag am Freitagabend hielt Rudolf Sträßer zum Thema *Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie* und stimmte damit auf das Tagungsthema ein. Er führte zunächst aus, dass Grundbegriffe der Schulgeometrie nicht Grundbegriffe in einem axiomatischen Sinne sein können, sondern wesentlich durch Grundvorstellungen fundiert sein müssen, die wiederum in engem Verhältnis zu (individuellen und gesellschaftlichen) „Nutzungen“ der Geometrie zu sehen sind. Bereits in diesem Vortrag stellte sich (wie auch im weiteren Verlauf der Tagung) heraus, dass sich die Suche nach Grundvorstellungen der Geometrie – als Vorstellungen der Lehrenden und Lernenden – überr-

schenderweise eher schwierig gestaltet und das Konzept der Grundvorstellungen bislang stärker auf den Gebieten der Arithmetik, Algebra, Analysis und Stochastik ausgearbeitet wurde als auf dem Gebiet der Geometrie. In der Diskussion hat sich dafür eine mögliche Ursache herausgestellt: In anderen Stoffgebieten sind Grundvorstellungen oft mit Anschauungen verbunden, welche zunächst in Prozessen erarbeitet werden müssen und den Aufbau von Grundvorstellungen befördern. Im Bereich der Geometrie sind hingegen „bildliche Darstellungen“ a priori vorhanden, welche nicht in Vorstellungserarbeitungsprozessen aufgebaut wurden.

Bereits nach dem Hauptvortrag von Rudolf Sträßer deutete sich an, dass die Grundvorstellungen-Problematik ein längerfristiges Arbeitsgebiet für den AK Geometrie sein wird und die AK-Tagung 2013 nur erste Zwischenergebnisse und Wege der weiteren Arbeit daran herauskristallisieren kann.

Der Samstag wurde mit einem Vortrag von Lothar Profke (Gießen) zum Thema *Geometrie,*

(Grund-) Begriffe, Vorstellungen – Fragen und Anregungen eingeleitet. Er plädierte für einen Geometrieunterricht, der „von der Geometrie des Raumes zur ebenen Geometrie“ führt, um räumliche Anschauung und praktische Handlungserfahrungen für den Aufbau von Grundvorstellungen zu nutzen und für ein „naives“ Betreiben von Geometrie (wofür keine explizite oder implizite Hintergrundtheorie erforderlich ist). Anschließend ging er auf zentrale Grundvorstellungen bezüglich einiger geometrischer Figuren und Körper ein und führte z. B. aus, dass die primäre, auf der Anschauung basierende Grundvorstellung eines Kreises auf der überall gleichen Krümmung basiert (und nicht auf der Tatsache, dass alle Punkte eines Kreises dieselbe Entfernung von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt, haben).

Philipp Ullmann (Frankfurt) diskutierte in seinem Vortrag *Grundvorstellungen zur Schulgeometrie – „Situating Cognition“ in der Geometriedidaktik* zunächst Merkmale von Grundvorstellungen als „robuster“ didaktischer Kategorie: Anschaulichkeit, Praktikabilität, weitgehende Theoriefreiheit, Einfachheit, Verankerung in der Lebenswelt, Anwendungserfolg. Anschließend schlug er fünf Kategorien von Grundvorstellungen zur Schulgeometrie vor, die sich auf folgende Aspekte beziehen:¹

- G1: Geometrie als Schule des rechten Sehens
- G2: Geometrie als Schule des verständigen Denkens
- G3: Geometrie als Schule des regelgeleiteten Gehorsams
- G4: Geometrie als Schule der technischen Naturbeherrschung
- G5: Geometrie als Schule der Ästhetik

Auf diese Kategorien (als Ansatz einer Klassifikation von Grundvorstellungen) wurde während der Tagung noch in unterschiedlichen Zusammenhängen Bezug genommen. In seinem Vortrag zog Philipp Ullmann dann Situated-Cognition-Ansätze heran und führte aus, dass Merkmale situierten Denkens (sensorisch, gegenstandsorientiert, grafisch-funktional, konkret erfahrungsgebunden) wesentlich mit dem Aufbau von Grundvorstellungen verbunden sind.

Ana Kuzle (Paderborn) und Christian Dohrmann (Halle) befassten sich mit *Winkelvorstellungen zur Winkelgröße 1° in der Sekundarstufe I* und untersuchten zunächst die Berücksichtigung statischer und dynamischer Aspekte des Winkelbegriffs in Schulbüchern der Klassenstufe 6. Im Mittelpunkt der Arbeiten von Kuzle und Dohrmann

steht die Frage, wie ein „reichhaltiges“ Winkelverständnis in einem zeitgemäßen mediengestützten Geometrieunterricht anschaulich vermittelt und durch eine an den Grundideen orientierte Begriffsentwicklung der Ausbildung von Fehlkonzepten begegnet werden kann. Sie berichteten über erste Ergebnisse einer Studie, in der sie Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 hinsichtlich ihrer Grundvorstellungen zur Winkelgröße 1° qualitativ anhand von „Anna-Briefen“ untersuchen und stellen daraus Beispiele vor.

Verena Rembowski (Saarbrücken) ging in ihrem Vortrag *Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?* zunächst auf das semiotische Dreieck Begriff-Bezeichner-Objekt und dabei mögliche Mehrdeutigkeiten am Beispiel des Würfels ein. Die durch Mehrdeutigkeiten entstehenden sich überlagernden und wechselwirkenden semiotischen Dreiecke führen zu Begriffsfeldern. Ein solches wurde für den Begriff „Würfel“ anhand der Ergebnisse einer Schülerbefragung umrissen und anhand dessen eine Unterscheidung zwischen Begriffsbildern und Begriffskonvention vorgenommen. Anschließend entwickelte Frau Rembowski auf der Grundlage philosophischer, psychologischer und fachmathematischer Überlegungen ein strukturiertes und strukturierendes Modell von Begriffsbildung. Auf der Grundlage dieses Modells diskutierte sie die Frage, was Grundvorstellungen sind bzw. sein sollen und illustrierte dies anschließend wiederum anhand des Würfelbegriffs.

Matthias Hattermann (Bielefeld) untersuchte in seinem Vortrag *Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie* Studierendenbearbeitungen in 3D-DGS und dabei auftretende Schwierigkeiten. Diese sind vor allem zwei Gruppen zuzuordnen: einerseits können dominierende mentale Repräsentationen von 2D-Objekten die erfolgreiche Durchführung raumgeometrischer Konstruktionen verhindern, andererseits aber auch fehlende mentale Schemata zur Softwarebedienung – in Hinblick auf Grundvorstellungen zur Raumgeometrie ist natürlich die zuerst genannte Problemkategorie interessanter. Herr Hattermann diskutierte dazu normative, deskriptive und konstruktive Aspekte von Grundvorstellungen und stellte Grundvorstellungen im Zwei- und Dreidimensionalen u. a. am Beispiel von Orthogonalen gegenüber.

Simone Reinhold (Braunschweig) ging in ihrem Vortrag *Baustrategien von Vor- und Grundschul-*

¹ Aus Platzgründen können die Erklärungen zu den Kategorien hier nicht wiedergegeben werden, es sei dazu auf den Tagungsband verwiesen, der zu dieser AK-Herbsttagung erscheinen wird.

kindern: Zur Artikulation räumlicher Vorstellungen in konstruktiven Arbeitsumgebungen vor allem auf das Projekt (Y)CUBES K-4 ein, das sich der Frage nach Zusammenhängen zwischen konkreten Konstruktionen und mentalen Operationen widmet. Dabei zeigten sich in bereits durchgeführten Teilstudien anhand von Charakterisierungen der Baustrategien, die Vor- und Grundschulkindern einsetzen, u. a. enge Zusammenhänge zwischen räumlichen Vorstellungen und elementaren arithmetischen Konzepten. Implikationen, die sich aus den Ergebnissen des Projekts für geometrische Aktivitäten in der mathematischen Frühförderung und in Hinblick auf den Geometrieunterricht der Grundschule ergeben, beziehen sich vor allem auf den Entwurf von Lernumgebungen, die geometrisch-konstruktivistische Aktivitäten in Verbindung mit arithmetischen Anforderungen bringen.

Katharina Gaab (Saarbrücken) befasste sich in ihrem Vortrag *Geometrie in der „Hauptschule“* mit der Frage, wie ein zeitgemäßer Geometrieunterricht für Hauptschüler bzw. Schüler ähnlichen Leistungsniveaus, welche die in den letzten Jahren neu geschaffenen Schultypen unterschiedlichen Namens besuchen, gestaltet werden müsste. Dazu ging sie zunächst auf die Reformen der 1960er Jahre, im Rahmen derer die Volksschule in die Hauptschule überführt wurde, und die damit verfolgten Ziele ein. Dass diese verfehlt wurden, ist nunmehr augenfällig und auch nach der Abschaffung der Hauptschule in vielen Bundesländern bleiben die Probleme dieser Schulform und ihrer Schülerschaft in der Praxis bestehen. Daher lohnt das Wiederaufgreifen der didaktischen Diskussion adäquater mathematischer Inhalte und Herangehensweisen. Frau Gaab verglich dazu Begriffseinführungen im Raumlehreunterricht der Volks- und im Geometrieunterricht der Hauptschule (z. B. hinsichtlich des Begriffs „senkrecht“). Anschließend ging sie auf die Diskussion um Basiskompetenzen ein und warf einen Blick auf geometrische Inhalte des Unterrichtsmoduls Mathematik und Physik der Handwerkskammer Hannover.

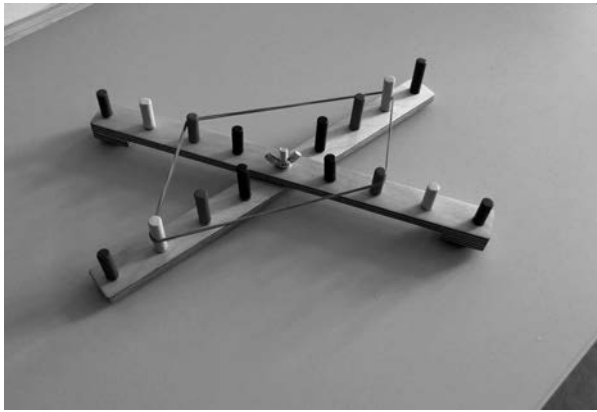
Emese Vargyas (Mainz) ging in ihrem Vortrag *Symmetrien: Vom Spielen bis zum Formalisieren* auf die von Zoltan Dienes aufgestellten sechs Stufen des Mathematiklernens ein (freies Spiel, Spiel nach Regeln, Vergleich der Spiele, Repräsentation, Symbolisierung, Formalisieren). Diese Stufen wendete sie auf die Entwicklung von Vorstellungen zu Achsensymmetrien an und stellte hierzu eine Reihe von Aufgabenbeispielen für die einzelnen Stufen vor.

Viktor Fast und Rudolf vom Hofe (Bielefeld) bekräftigten in ihrem Vortrag *Geometrische Darstellungen als Repräsentationen für algebraische Rechenoperationen am Beispiel der Multiplikation mit negati-*

ven Zahlen zunächst die bereits von Rudolf Sträßer getroffene Aussage, dass Grundvorstellungen im Bereich der Geometrie bislang wenig untersucht sind. Der Vortrag bezog sich dann auch vorrangig auf die Nutzung geometrischer Darstellungen für die Entwicklung von Vorstellungen zu der für Lernende schwierig zu begreifenden Rechenoperation der Multiplikation mit negativen Zahlen. Die Vortragenden verdeutlichten daran, wie sich geometrische Darstellungen für die Repräsentation von algebraischen Aufgaben eignen, um tragende Grundvorstellungen aufbauen zu können. Als Grundlage dient die Idee, die Multiplikation mit der Streckung zu assoziieren. An Beispielen stellte sich heraus, dass die auf diese Weise vermittelte Grundvorstellung auch für weitere mathematische Inhalte trägt. So wurden Analogien zwischen der Addition rationaler Zahlen und der Vektoraddition sowie zwischen der Multiplikation rationaler Zahlen und der skalaren Multiplikation von Vektoren deutlich, die sich aus der geometrischen Interpretation rationaler Zahlen durch gerichtete Strecken bzw. Streckfaktoren beinahe zwangsläufig ergeben.

Thomas Müller (Wien-Krems) verstand seinen Vortrag *Leitideen des Geometrieunterrichtes und seine Beiträge zur Allgemeinbildung* als Diskussionsbeitrag zu den Fragen: Wozu unterrichten wir in der Schule Geometrie? Welche Beiträge zur Allgemeinbildung kann der Geometrieunterricht leisten? Welche Schlüsselaktivitäten/Leitideen haben sich im gegenwärtigen Unterricht herausgebildet? Welche Geometrie-Basics sollen wir – auch unter dem Gesichtspunkt des Einsatzes digitaler Medien – an die Schülerinnen und Schüler weitergeben? Er arbeitete dazu folgende Schlüsselaktivitäten/Leitideen für den Geometrieunterricht heraus: Idee der Rekonstruktion, Idee der Projektion, Idee der Koordinatisierung/Messung, Idee der Abstraktion/des Formenschatzes, Idee der Dynamik, wobei alle diese Ideen begleitet und gestützt werden von der Idee des Begründens/Beweisens/Argumentierens.

Michael Gieding (Heidelberg) hielt einen Vortrag über *Das Haus der Vierecke aus der Sicht des Heidelberger Winkelkreuzes*. Dieses besteht aus zwei identischen Holzleisten, die in ihrem Mittelpunkt mittels einer Schraube mit Flügelmutter verbunden sind. Dadurch ist es möglich, die Leisten durch Drehung zueinander in eine neue Lage zu bringen. Auf den Leisten sind Holzstifte in äquidistanten Abständen angebracht, so dass mittels eines Gummibandes Figuren auf dem Winkelkreuz gespannt werden können. Insbesondere können Schülerinnen und Schüler spielerisch-experimentell Eigenschaften unterschiedlicher Vierecksarten untersuchen. Die Ver-



Heidelberger Winkelkreuz (Foto: M. Gieding)



Die flächentreue Herzkarte von Stab-Werner (H. Walser)

wendung des Winkelkreuzes „proviziert“ dabei ganz natürlich insbesondere die Betrachtung der Diagonalen, was u. a. zu folgenden Begriffsbildungen führt: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ein Rechteck ist ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleichlang sind. Der Vortragende berichtete über erste diesbezügliche Erfahrungen.

Hans Walser (Basel) stellte in seinem Vortrag *Maßstab eins zu eins. Geometrie für Geomatiker exemplarisch geometrische Beispiele* aus der Ausbildung Studierender in Geomatik, Kartographie, Vermessungswesen und Geographie vor. Viele seiner Beispiele (aus der Kartographie) mit räumlichen und sphärischen Überlegungen sind auch für den Schulunterricht geeignet. Insbesondere verdeutlichen sie auch häufig auftretende Schwierigkeiten, adäquate Beziehungen zwischen Wegen, die auf Karten eingezeichnet sind, und den entsprechenden Wegen auf der Erdoberfläche herzustellen.

Ein Poster zu *Teilprozessen der stoffdidaktischen Methode (in der Geometrie)*, das den zentralen Stellenwert der Herausbildung von Grundbegriffen und Grundvorstellungen verdeutlicht, wurde von Anselm Lambert (Saarbrücken) ausgestellt. Dessen Inhalt möchten wir gern innerhalb der GDM zur Diskussion stellen, das Poster ist daher auf der hinteren inneren Umschlagseite dieses Heftes abgedruckt.

Die Breite der während der AK-Tagung diskutierten Themen wirft ein Schlaglicht auf die Vielschichtigkeit der Thematik „Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen“. Der Arbeitskreis wird diese Thematik auf seinen kommenden Tagungen weiter verfolgen.

Das nächste Treffen des Arbeitskreises findet in Koblenz auf der Bundestagung im März 2014 statt. Hierzu ergeht schon heute die Einladung.

Andreas Filler, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin, Email: filler@math.hu-berlin.de

Anselm Lambert, Universität des Saarlandes, Postfach 151, 66041 Saarbrücken, Email: lambert@math.uni-sb.de