Klaus Rödler: Das Handbuch „Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen" – Rechnen durch Handeln

Rezensiert von Wolfram Meyerhöfer

Klaus Rödler ist Grundschullehrer in Frankfurt a. M. und hat m. E. eines der interessantesten neueren Konzepte für den Mathematikunterricht in der Grundschule entwickelt: http://www.rechnen-durch-handeln.de

Für die 1. Klasse ist nun das Lehrerhandbuch „Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen" in einer Neuauflage erschienen. Im ersten Teil (S. 5-13) entfaltet Rödler seine didaktischen Grundideen. Der zweite Teil (S. 15–39) enthält Vorschläge für den Unterricht. Es folgen 13 Kopiervorlagen und eine Bauanleitung für einen Schultagezähler (gute Idee!).

Eckbausteine des Rödler'schen Konzepts

Man kann Rödler in jenen Diskursstrang einordnen, der im relationalen Zahlkonzept den Schlüssel für verständiges Rechnen sieht. Ich würde hier die Namen Gerster, Gaidoschik, die JRT-Autoren, Moser-Opitz und mittlerweile auch das mathe-2000-Umfeld nennen. Sein Fokus liegt dabei auf dem Konzept reversibler Wertebenen, das auf dem Teile-Ganze-Konzept fußt. Die Idee dabei ist, dass die Kinder erkennen, dass eine Zahl gleichzeitig als etwas benennbar Ganzes und als aus Teilen zusammengesetzt gesehen werden kann. Die Zahl Vier ist eben nicht nur ein benennbar Ganzes, sondern sie ist vom Schüler ebenso zusammengesetzt denkbar aus 2 und 2 oder 3 und 1 oder aus vier Einsen bzw. Einern. Rödler bewegt sich quer zur Frage „Welchen Zahlraum wollen wir in Klasse 1 erschließen?" Bis zu den Herbstferien wird bei ihm nicht im klassischen Sinne gerechnet, sondern

- er „lässt Zahlen bilden". Früher sprach er von „konkreten Zahlen". Es werden auf vielfältigste Weise Anzahlen bestimmt, verglichen und repräsentiert. Ein Beispiel:

  > Am Türeingang sind zwei Schalen mit den Schildern ‚weg' und ‚da'. Beim Gehen legt jedes Kind einen Würfel in die Schale ‚weg'. Am nächsten Tag legt jedes Kind beim Hereinkommen einen Würfel aus der Schale ‚weg' in die Schale ‚da'.
  > Auf diese Weise lässt sich sehen, ob schon alle Kinder da sind. Man kann auch zählen, wie viele Kinder noch fehlen. Oder man zählt gemeinsam mit den Kindern die Würfel in der Schale ‚da' und fragt, wie viele Würfel wohl in der Schale ‚weg' sind. So ergibt sich ein täglicher Zählanlass, der die Zahlreihe bis über 20 (Anzahl der Kinder in der Klasse) ins Spiel bringt und nebenher erhält man die Möglichkeit zu situationsbezogenem Sachrechnen. (S. 16)

  Jenen Kindern, die die Zahlzeichen noch nicht kennen, werden Brücken gebaut, z. B. in Form einer Art Anlauttabelle für die Zahlzeichen (S. 17 f.).
- Er baut Operationsverständnis auf. Dabei nutzt er die titelgebenden Würfel mit roten und blauen Seiten, z. T. nutzt er auch ungefärbte Würfel. Er spricht hier interessanterweise von vornherein die Multiplikation und die Division mit an, weil in deren flächigen Strukturen die kleinen Zahlen im Sinne des Teile-Ganzes-Gedankens als wiederkehrende Bausteine erscheinen:

  > Um die Verfestigung des zählenden Rechnens zu verhindern, ist es notwendig, dass die Kinder frühzeitig Alternativen kennen lernen. Führen sie (aus der Not heraus) Rechnungen überwiegend zählend durch, so stabilisiert sich dadurch die Vorstellung der Zahl als Zahlwortreihe und die des Rechnens als Weiter-, bzw. Rückwärtszählen. Damit dies nicht geschieht, ist es wichtig, dass die Kinder möglichst früh Alternativen kennen lernen und einen Bestand von Rechnungen aufbauen, den sie ohne zu zählen lösen können.
  > Aus diesem Grund lohnt es sich, bereits in den ersten Schulwochen einfache Multiplikationen und Divisionen zu behandeln, die zu wieder erkennbaren Rechteckmustern führen.
  > Dass 2×3 gleich 6, 2×4 gleich 8, 3×3 gleich 9 oder 3×4 gleich 12 ist, muss nur am

> Anfang zählend gefunden werden. Wenn diese Muster in der Folge wieder auftauchen, am Schubladenschrank, an den Fotos an der Wand oder auch in einer Rechnung, dann können sie unmittelbar erkannt und benannt werden. ‚2×3' und ‚6' sind fast gleichwertige Namen für eine kardinale Struktur.
> Während Addition und Subtraktion ihrer Natur nach lineare Operationen sind, die entsprechend zur Zahlwortreihe passen und das zählende Rechnen befördern, sind Multiplikation und Division flächige Operationen, die zu Mustern und Strukturen führen. Das gilt es, bereits im Anfangsunterricht zu nutzen. (S. 35 f.)

Hier nutzt Rödler insbesondere auch Würfelbauwerke, vergleiche dazu auch seinen Text in Sache-Wort-Zahl Nr. 129 (Oktober 2013).

- Er erschließt die Zahlzerlegungen und die zugehörigen Aufgaben des kleinen $1 + 1$ und $1 - 1$ im Zahlraum bis Fünf (ab etwa der 8. Schulwoche). Hier sollen Addition und Subtraktion im operativen Zusammenhang und im inneren Zusammenhang mit der Zerlegung automatisiert werden. Dies erfolgt unter Zugriff auf simultane Mengenerfassungen. Die Reduktion auf den kleinen Zahlraum wird damit begründet, dass der Zehnerraum diese Automatisierung nicht im Sinne eines Teile-Ganzes-Verständnisses erlaubt, sondern viele Schüler – zumindest in der ersten Klasse – zum Zählen zwingt.

Im Ganzen kann man sagen: Rödler nimmt die Ideen von anspruchsvoller Mathematik etwa aus dem Projekt „mathe 2000" auf, aber er nimmt jene Schüler, die mit geringen Vorkenntnissen in die Schule kommen, expliziter in den Blick. Dies gelingt ihm dadurch, dass er zwar auf der Ebene des Zählens und Abzählens deutlich über die 20 hinausgeht und mit den Schülern anspruchsvolle relationale Debatten führt sowie bereits multiplikative und divisible Probleme analysiert, dass er aber umgekehrt bei der Automatisierung eines Kernbestandes von Zerlegungen, Additionen, Subtraktionen und Ergänzungsaufgaben in den kleinen Zahlraum bis 5 hinunter geht. Als Grund gibt er an, dass dieser von der Spontanwahrnehmung gestützte Bereich auch den schwächeren Schülern eine rasche Automatisierung erlaubt und damit auch ihnen früh ein Gegenmodell zum zählenden Lösen gibt.

Der Zahlraum jenseits der 5 wird rechnerisch erst betreten, wenn die kardinalen Beziehungen bis zur 5 von allen Schülern verstanden und auch routinisiert sind. Als Bezugsgröße dient nun der Fünfer. Beim Rechnen dient als Fünfer die Fünferstange, die konsequent als Modell für eine reversible Wertebene behandelt wird. Dieses Modell des reversiblen Fünfers wird dann im Hunderterraum auf den Zehner übertragen und später auch auf die höheren Wertebenen (vgl. Rödlers Buch „Erbsen, Bohnen, Rechenbrett".)

In Klasse 1 verfolgt Rödler die Besonderung, dass Zehner und Zehnerübergang zunächst nicht in den Blick genommen werden. (Wenn Schüler den Zehner bereits früher als Bezugspunkt wählen, dann wird dies natürlich gestärkt.) Als Begründung erläutert Rödler mehrere Motivationsprobleme (S. 8 f.) und die Notwendigkeit eines bereits absolut stabilen Zerlegungswissens (S. 9). Er beschreibt Schüler, die angesichts eines Drucks Richtung Teilschrittverfahren wieder in zählende Strategien zurückfallen:

> Um diese Notlösung nicht als inneres Konzept zu konditionieren, ist es wichtig, dass man das Thema nur streift, in seiner Bedeutung aber nicht überhöht. Es ist ein Angebot für die schon gefestigten Rechner. Es sollte aber nicht diejenigen diskriminieren, welche die Grundlagen noch nicht besitzen. [...] Deshalb verbietet es sich, etwa eine Klassenarbeit zu diesem Inhalt zu schreiben. (S. 35)

Statt des Zehners wählt Rödler als erste Bündelungseinheit zum Rechnen den Fünfer, materialisiert in Fünferstangen. Mit ihnen baut er einen stimmigen Unterrichtsgang auf. Später kommt der Rechenstrich hinzu. Ich hätte mir gewünscht, dass er die dabei wahrscheinlich auftretenden Übergangsprobleme ein wenig intensiver diskutiert hätte, denn z. B. die Addition $8 + 7$ erscheint strukturell mit Fünferstangen ja deutlich anders als auf dem Rechenstrich.

Reibungspunkte mit der derzeitigen Mathematikdidaktik

Der von Rödler verkörperte Typus des Lehrers, der eine eigene didaktische Konzeption entwickelt, begründet und umsetzt, ist nahezu ausgestorben. In den sechziger oder siebziger Jahren wäre so jemand vielleicht irgendwann Didaktikprofessor geworden und hätte sein Konzept umfassender – z. B. in einer Lehrbuchreihe – publizistisch umsetzen können. Heute werden solch didaktisch interessierten Personen frühzeitig von der Mathematikdidaktik aus den Schulen abgesaugt und von ihrer Design-Arbeit weggeführt – oder sie fallen tendenziell aus dem Diskursraster der Kommunität.

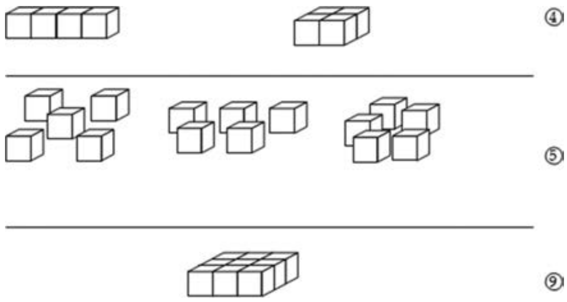
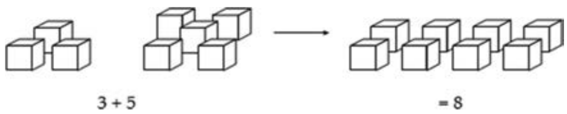
Dass Rödler trotz diverser Publikationen beim Kallmeyer-Verlag in der mathematikdidaktischen Debatte weitgehend ignoriert wird, liegt sicherlich auch daran, dass seine Konzeption einige Reizaussagen enthält. Da die Grundschul-Mathematikdidaktik eine Kultur der Debatte nicht pflegt, sondern gegenläufige Positionen ignoriert oder glättet, bleiben Nichtetablierte systematisch in Außenseiterpositionen gedrängt. Nichtsdestotrotz sollen hier einige der Reizpositionen angedeutet werden, weil die dahinterstehenden Argumente uns anregen, den innerdidaktischen Konsens zu befragen bzw. auszudifferenzieren:

1. Der Zahlraum bis 20. In der Grundschul-Mathematikdidaktik hat sich die Position etabliert, dass in der ersten Klasse sehr schnell der Zahlraum bis 20 erschlossen wird. Dies führt – nicht nur praktisch, sondern auch konzeptionell – dazu, dass sehr früh jenseits der 10 gerechnet wird. Rödlers Ansatz hat nichts mit jenen früheren Ansätzen zu tun, welche die Schüler lange in die Räume bis 5, bis 6, bis 10 oder bis 12 verweisen, aber er *rechnet* eben auch nicht sofort jenseits der 5, sondern erst nach den Herbstferien, und er arbeitet sehr offen mit dem Thema des Zehnerübergangs, indem er dem Schülertempo folgt und den Zehnerübergang durch die konsequente Arbeit mit den Fünferstangen aus dem Rechnen im Zwanzigerraum heraushält. Die Idee ist dabei, Zeit gewinnen, bis die Voraussetzungen für das Verstehen und Routinisieren des Teilschrittverfahrens vorhanden sind.

2. Verbot des Fingerrechnens. Ich selbst stehe für ein „Lob des Fingerrechnens“ (vgl. SWZ Nr. 104, September 2009) und würde sagen, dass ich damit eher im Mainstream der derzeitigen Grundschuldidaktik stehe. Rödler fordert hingegen, das Fingerrechnen „strikt zu unterbinden“, und bringt auch dafür durchaus einleuchtende Argumente:

> Die Würfel haben gegenüber den Fingern zahlreiche Vorteile. Die drei wichtigsten sind: Der Zahlraum ist bei den Würfeln im Prinzip unbeschränkt. Das Fingerrechnen provoziert beim Rechnen über die ‚10‘ und auch bei Subtraktionen Fehler, die bei den Würfeln nicht vorkommen. Und strukturelle Momente wie Tauschaufgabe und Gegenoperation werden beim gelegten Material sichtbar, während sie beim Fingerzählen unsichtbar bleiben. Die Rechnung findet auf einer Teppichfliese (20 cm × 25 cm) statt, was die Fokussierung auf den Vorgang fördert. (S. 18)

3. Nicht Zahlen in Mustern legen. Auch Rödler arbeitet mit bestimmten Mustern, aber er fordert, Zahlenmuster im Rahmen der Addition, Subtraktion und beim Aufbau der Zahlreihe eher zu meiden (S. 22). Seine Begründung zeigt, dass er sich im Grunde gegen die undifferenziert als positiv angenommene Verwendung von Zahlen in Musterformen richtet:

> Wenn man versucht, Anzahlen durch Anordnung sichtbar zu machen, so entstehen typische Muster, wie die folgenden.
>
> 
>
>
> Beim Rechnen mit diesen Zahlen zeigt sich aber, dass man Aufgaben, die in dieser Form gelegt worden sind, entweder abzählend rechnen oder die Muster im Rechenvorgang auflösen und verändern muss. Die ‚3‘ und die ‚5‘ sind in der ‚8‘ in gewissem Sinne nicht mehr vorhanden. (Siehe Abb.) (S. 22)
>
> 
>

Ein anderes Beispiel wäre die beliebte Verwendung von Würfelmustern: Eine Würfel-Zwei und eine Würfel-Vier ergeben eben keine Würfel-Sechs. Die Würfel-Muster sind nun einmal nicht für additive oder relationale Betrachtungen geschaffen worden. Es ist nicht undifferenziert jedes Zahl-Muster verständnisfördernd.

4. Frühe Nutzung multiplikativer Strukturen. Auch die frühe Nutzung multiplikativer Strukturen – und von Ausblicken in die Division – entfernen sich deutlich vom gegenwärtigen didaktischen Hauptstrom, erscheinen gleichwohl in ihrer Begründung (siehe oben, im Buch S. 20 f., S. 25 f., S. 35 f.) und in ihrer konkreten Ausgestaltung sinnvoll.

Im Ganzen legt Klaus Rödler ein praktisch bewährtes, stimmiges und originelles Konzept für den Mathematikunterricht der Klasse 1 vor, das auch für die Theoriearbeit interessante Fragen und Thesen aufwirft.

Klaus Rödler: *Das Handbuch „Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen“. Rechnen durch Handeln. Das Material für das 1. Schuljahr.* 2. Erweiterte Auflage 2013, 56 S., ISBN 978-3-00-043311-5, EUR 9,80.

Wolfram Meyerhöfer, Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: meyehof@math.upb.de