Schmitt-Hartmann, Reinhard und Herget, Wilfried: Moderner Unterricht – Papierfalten im Mathematikunterricht 5–12

Rezensiert von Bernd Wollring

Zuerst. Es ist begrüßenswert, dass Reinhard Schmitt-Hartmann und Wilfried Herget ein Buch zur Papierfaltgeometrie vorlegen, noch dazu für die Sekundarstufe. Das klingt zunächst ein wenig nach „Basteln in der Mathematik", nach der Ankündigung speziellen Lustgewinns beim Befassen mit einer bestimmten Art von Mathematik, ganz ähnlich, wie es auch bei den „etwas anderen Aufgaben" der Fall ist, für die Wilfried Herget bekannt ist.

Aber das ist nicht so, denn Papierfalten ist eine Artikulation geometrischer Prozesse, es ist ein händisches Darstellen von Abbildungen an Figuren, wie es in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz im Inhaltsbereich „Raum und Form" sowohl für die Sekundarstufe I als auch für die Primarstufe angesprochen wird. Papierfalten schafft eine mächtige Handlungs-Sprache zu geometrischen Konstruktionen. Vielen Menschen, Jugendlichen wie Erwachsenen, mathematikfernen wie mathematiknahen, macht es erhebliche Schwierigkeiten, Papierfaltkonstruktionen mit gesprochenen oder geschriebenen Texten zu begleiten. Das erfordert eine fundierte situative Sprache auf der Basis alltäglicher Erfahrung oder eine elaborierte und trainierte Fachsprache. Man versuche einmal, das Falten der vielen Kindern geläufigen Figur „Himmel und Hölle" ohne Benutzen der Hände in einen gesprochenen oder geschriebenen Text zu fassen. Deutlich wird, welch starke Sprache in den handelnden Händen steckt.

In diesem Buch werden ausschließlich Faltungen vorgestellt, die gradlinige Faltlinien erzeugen, die dargestellten Figuren bestehen aus gefalteten Strecken, Strahlen oder Graden. Das ist eine deutliche, wenn auch sehr zweckmäßige Einschränkung. Man findet durchaus Verpackungen, bei denen krummlinige Faltkanten im dreidimensionalen Raum entstehen. Kreise und Kurven sind also Figuren, die das hier vorgestellte Papierfalten nicht erschließt, wohl aber gerade Linien und gradlinig begrenzte Vielecke.

Die Kraft des Papierfaltens liegt darin, dass viele seiner Konstruktionen auf Achsenspiegelungen beruhen. Versuche zum Axiomatisieren des Papierfaltens ähnlich den Axiomen der euklidischen Geometrie zeigen, dass man mit Papierfaltungen mehr konstruieren kann als mit Zirkel und Lineal. Bereits ein Blick in das Inhaltsverzeichnis des Buches belegt dies: Unter den Aufgaben ab Klasse 7/8 findet sich die „Dreiteilung eines Winkels", euklidisch nicht lösbar. Das wirft die Frage auf, ob hier eine Art probierende Konstruktion vorliegt oder eine Konstruktion, die das gesuchte Objekt lediglich näherungsweise darstellt. Beides ist nicht der Fall, denn das Papierfalten erlaubt weitergehende Konstruktionsmuster als das Konstruieren mit Zirkel und Lineal. Lässt man diese ebenfalls zu, dann sind mit Papierfaltgeometrie tatsächlich mehr Probleme exakt zu lösen als mit euklidischer

Geometrie. Zwei dieser in der euklidischen Geometrie nicht lösbaren Probleme finden sich denn auch in diesem Buch:

- Auf Seite 74 findet sich die „Dreiteilung des Winkels“ mit einer Begründung, die genau die erweiterten „Axiome“ aufnimmt, welche durch die Papierfaltgeometrie modelliert werden. Diese Konstruktion schlagen die Autoren mutiger weise bereits für die Jahrgangsstufen 7 oder 8 vor, und ich teile diese Einschätzung: Da ist sie richtig platziert.
- Auf Seite 130 findet sich das „Delische Problem“, bei dem es darum geht zu einem gegebenen Würfel einen zweiten mit doppeltem Rauminhalt zu konstruieren. Hier waren die Autoren etwas vorsichtiger und haben diese Aufgabe als etwas schwieriger den Jahrgangsstufen 9 oder 10 gewidmet.

Diese beiden Konstruktionen haben eher grundsätzliche Bedeutung und dienen der Schulung des Argumentierens auf einer angenommenen Argumentationsbasis. Das Buch stellt eine Fülle von Aufgaben vor, nicht nur zahlenmäßig viele, sondern auch vom Schwierigkeitsgrad und vom ästhetischen Reiz her viele.

Man könnte sich natürlich mehr Fotos anstelle von Zeichnungen wünschen, weil diese die Papierfaltobjekte schöner und plastischer darstellen als Zeichnungen dies vermögen. So benötigt man schon eine spezifische Kompetenz, um die Zeichnungen korrekt lesen zu können. Auch hätte es das ganze Buch attraktiv gemacht, wenn man zumindest bei einigen Seiten einen farbigen Druck spendiert hätte, nicht nur aus Gründen der Ästhetik, sondern auch, weil mit Hilfe von Farben manche Unterscheidungen von Objekten leichter und schöner gelingen als mit den typischen Grauschattierungen.

Viele der Darstellungen zu den Faltungen ähneln Konstruktionsbeschreibungen, wie man sie aus Schulbüchern zur Geometrie kennt: Die ikonische Darstellung ist durch Bezeichnungen ergänzt und die Bezeichnungen werden im begleitenden Text wieder aufgenommen. Damit fordert dieses Buch zwei Kompetenzen:

- Es fordert zum einen die Kompetenz, die jeweilige Papierfaltung nachvollziehen und das zugrunde liegende mathematische Phänomen erklären und begründen zu können.
- Es fordert aber darüber hinaus die Kompetenz, eine bestimmte verschriftlichte ikonische Darstellung lesen und in eine Handlung übersetzen zu können. Wenden wir es ins Positive: Vielleicht hat ja diese oder jene Lehrkraft Interesse, einige dieser Faltungen durch Videoclips zu dokumentieren oder ihre Bearbeitung mit Hilfe vorgefalteter Musterstücke zu unterstützen, die dann von den Lernenden zu analysieren und nachzubauen sind.

Betrachten wir nun die einzelnen Abschnitte:

Klasse 5/6

Dort finden sich elementare Faltungen, die in reizvolle Objekte oder bedeutsame Konstruktionen münden, zum einen etwa die Konstruktionen von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden auf der Basis von Achsensymmetrie, zum anderen der „Puste-Würfel“, der zwar reizvoll aber möglicherweise mathematisch von sehr begrenzter Bedeutung ist. Faltungen zur Betrachtung der Flächeninhalte bei Drei- und Vierecken dagegen generieren flexible Darstellungen zum Unterstützen von Beweisideen. Besonders reizvoll und typisch für Aufgaben vom Stil der Autoren ist die Aufgabe „Die dicke Säule“, bei der es um experimentelles Herstellen von Säulen mit gegebenem Mantel geht und gefragt ist, welche Rauminhalte diese Säulen denn haben.

Klasse 7/8

Wie im vorhergehenden Abschnitt finden sich hier schulbedeutsame ebene Konstruktionen, die ausweisen, dass sich Papierfaltgeometrie begleitend und unterstützend zur ebenen euklidischen Geometrie nutzen lässt, wie sie in der Mittelstufe gewöhnlich stattfindet. Die Faltungen zu Würfeln und Tetraedern dagegen machen auf den ersten Blick den Eindruck, es gehe hier um das Herstellen von Spielzeug. Das ist meines Erachtens nicht so, vielmehr geht es darum, Symmetrien an dreidimensionalen Körpern handelnd zu erkunden und dazu einen Erfahrungsraum zu schaffen, welcher der Versprachlichung vorausgeht. Selbstverständlich naheliegend ist es, die Geometrie eines Industrieproduktes, wie es Papierbögen der Formate DIN A sind, auch an den originalen Objekten handelnd zu erkunden. Dazu sind Papierfaltkonstruktionen prädestiniert, und die beiden Aufgabenvorschläge zu DIN-Formaten sollten im Sinne einer technischen Elementarbildung jeder Schülerin und jedem Schüler der ausgehenden Mittelstufe bekannt sein.

Klasse 9/10

Hier werden die vorgestellten Projekte schon anspruchsvoller. Es wird ein Katalog von Problemen dargestellt, der in der Mathematik in der ausgehenden Mittelstufe nicht allein der Geometrie zuzuordnen ist. Vielmehr sind die Objekte gebietsverbindend in der Mathematik der Jahrgangsstufen 9 und 10. Drei Beispiele sollen dies belegen:

- Bedeutsam innerhalb der Geometrie, aber mit algebraischer Anreicherung, sind die beiden

Probleme „Parallelogramm im Quadrat" I und II. Dort geht es um besondere Eigenschaften von Figuren im Quadrat, deren Winkelsummen und deren Seitenverhältnisse. Diese Aufgaben bündeln alle Kompetenzen die man in der Geometrie der Mittelstufe zusammengetragen hat.

- Eine wundervolle Konstruktion ist die „Kasahara-Faltung des goldenen Schnitts" auf Seite 116, leider ohne Zitat angegeben. Diese Faltung ist derart schön und genial, dass man an ihrer Eleganz die ganze Macht der Papierfaltgeometrie denen demonstrieren kann, die sich für Schönheit in der Mathematik begeistern können. Natürlich muss man die Argumente wieder nahezu im ganzen Bereich der Mittelstufengeometrie zusammensuchen und sie treten auch durchaus verdichtet auf, aber die unmittelbare Zugänglichkeit des golden Rechtecks mit dieser Konstruktion ist meines Wissens nur noch bei der berühmten Freimaurerkonstruktion des „Secret Cut" für das regelmäßige Achteck zu finden. Es lohnt sich, im Internet einmal nach Kasahara und seiner Bedeutung für die Papierfaltgeometrie zu suchen.
- Eine weitere attraktive Konstruktion ist das „Falten des regelmäßigen Achtecks im Quadrat" auf Seite 128. Sie steht stellvertretend für explorative Konstruktionen zu regelmäßigen Vielecken. Vorgestellt wird ein Weg, das größte regelmäßige Achteck zu falten, das in ein Quadrat passt. Es liegt mit vier seiner Seiten auf den Quadratseiten. Eine dazu verwandte komplementäre Konstruktion ist das Falten eines regelmäßigen Achtecks im Quadrat, das mit vier seiner Ecken auf den Seitenmitten des Quadrates liegt. Diese Konstruktion ist verwandt zu der hier gezeigten und möglicherweise deshalb von den Autoren fortge- und dem Leser als Hausaufgabe überlassen.

Ein Klassiker ist ebenfalls die Umsetzung des Strahlensatzes in ein Faltprinzip, mit dessen Hilfe eine Strecke gegebener Länge in eine gegebene Anzahl gleichlanger Teilstrecken zu zerlegen ist. Diese Faltung auf Seite 86 ist gewissermaßen eine „Aufgabe ohne Jahrgang", sie lässt sich mit minimalen Anpassungen in allen Jahrgangsstufen von der Grundschule bis in die hohe Sekundarstufe einsetzen.

Jahrgangsstufe 11 und 12

Hier sind in erster Linie Probleme aufgenommen, die mit anderen Veranschaulichungen bereits in der Analysis thematisiert werden. Genutzt wird im Wesentlichen die Option, bestimmte Gestalten leicht variieren zu können oder Folgen von Faltfiguren herzustellen, deren Struktur algebraisch zu erkunden ist. Das allerdings setzt doch etwas Routine zur Papierfaltgeometrie aus dem Programm für die vorhergehenden Jahrgänge voraus. Möglicherweise lassen sich diese Probleme aber auch mit anderen Darstellungen, etwa mit hinreichend mächtiger Software ebenso gut darstellen. Der Vorteil der Darstellung mit Papierfalten liegt hier eher in der schnellen und unkomplizierten Verfügbarkeit, ähnlich der bei „Hands-on-Experimenten" in der Naturwissenschaft.

Überlegungen zur Geometrie des Papierfaltens

Wer mit der Voreinstellung in das Lesen dieses Buches einsteigt, es gehe beim Papierfalten um eine Art Schwierigkeitsausgleich zu den formalen und beweisbestimmten Teilen der Mathematik, dem sei empfohlen das Lesen dieses wunderbaren Buches auf Seite 156 zu beginnen. Dort findet man zunächst die euklidischen Axiome, korrekterweise fehlt das Parallelenaxiom. Diesen wird ein Axiomen-System zur Papierfaltgeometrie gegenüber gestellt, das auf die japanischen Mathematiker Huizita und Hatori zurückgeht. Es kennzeichnet die elementaren Faltungen mit Axiomen, deren Grundbegriffe Punkte und Faltlinien sind. Kreise sind darin nicht explizit als Objekte benannt. Dieses Axiomen-System ist mächtiger als das Axiomen-System der euklidischen Geometrie, wie bereits oben vermerkt ist. Eine kurze vergleichende Betrachtung zeigt an den Beispielen der beiden herausragenden Probleme „Winkeldreiteilung" und „Würfelverdopplung" woran das liegt: Es stehen in der Papierfaltgeometrie sogenannte „Einschiebe-Konstruktionen" zur Verfügung, die in der euklidischen Geometrie nicht darstellbar sind. Einen der zentralen Gedanken von Carl Friedrich Gauß aufnehmend wird zudem begründet weshalb: Beschreibt man die Objekte der euklidischen Geometrie und die der Papierfaltgeometrie durch algebraische Modelle, so zeigt sich, dass die Konstruktionen der euklidischen Geometrie dem Lösen von Gleichungen zweiten Grades entsprechen, die der Papierfaltgeometrie aber Gleichungen dritten Grades.

Betrachtung insgesamt

Papierfaltgeometrie muss man mögen. Eine motorische Grundkompetenz ist zudem erforderlich, denn nicht alle hier vorgestellten Faltungen sind robust im Sinne des „forgiving origami", bei dem kleinere Ungenauigkeiten beim Falten ein schönes Gesamtergebnis nicht beeinträchtigen. Manche Faltungen erfordern eine gewisse Routine zur Präzision. Andererseits ist festzuhalten, dass das Gestalten geometrischer Figuren durch Papierfalten teilweise flexibler ist als das mit Hilfe von Zeichnungen. Die Versuche führen teilweise schneller auf ergiebige experimentelle Ergebnisse als beim

Zeichnen. Künstlerischen Ideen zugewandte Menschen würden auch das taktile Erlebnis beim Papierfalten hervorheben. Leider fehlen Bezugnahmen auf die Bedeutung des Papierfaltens in den Ingenieurwissenschaften, aber das ist ein weites Feld. Eines noch ist mir abschließend wichtig: Papierfalten sollte man würdigen, und zwar nicht primär als ein Werkzeug zur Mathematik, sondern als einen substanziellen Beitrag japanischer Kultur an der Schnittstelle zwischen Kunst und Mathematik. Denn seinen Ursprung hat das Papierfalten nicht als Ausdrucksform für Mathematisches, sondern als künstlerische Ausdrucksform einer Kultur, die dieses nicht nur zielgerichtet konstruierend, sondern introvertiert und kontemplativ begreift. Dieses über das in diesem Buch Dargestellte hinausgehende Papierfalterlebnis wünsche ich allen, die dieses Buch zur Hand nehmen.

Schmitt-Hartmann, Reinhard & Herget, Wilfried (2013): *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht. 5. bis 12. Schuljahr*. Stuttgart: Ernst-Klett Verlag, 2013, ISBN 978-3-12-720062-1, EUR 23,95.

Bernd Wollring, FB 10 Mathematik u. N., Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel, Email:
wollring@mathematik.uni-kassel.de