

## Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium

---

Gregor Nickel

Auch wenn der Titel dieses Aufsatzes<sup>1</sup> auf Friedrich Nietzsches bekannte, zweite unzeitgemäße Betrachtung (vgl. [16, pp. 209]) anspielt, möchte ich einer sinngemäßen Übertragung seiner Diagnose, das Leben der Zeitgenossen leide an einem *Übermaß* an historischem Sinn, gerade nicht zustimmen. Bei der derzeitigen Situation im schulischen Mathematikunterricht wie auch im mathematischen Lehramtsstudium kann sicherlich kaum von einem solchen Übermaß die Rede sein – im Gegenteil: Mathematik wird in aller Regel fast vollständig ahistorisch vermittelt. Dies liegt vermutlich nicht zuletzt an dem merkwürdig überzeitlichen Charakter des Fachs selbst. Wenn es den Anschein hat, als seien alle (historisch kontingenten) Hervorbringungen der Mathematik eigentlich nur (bessere oder schlechtere) Abbilder Ewiger Formen, einer *mathematica perennis*<sup>2</sup>, so spielen die vergangenen Gestalten und die historische Entwicklung keine Rolle; sie werden u. U. sogar als störend empfunden. In der Tat gelingt es der Mathematik offenbar wie kaum einer anderen Wissenschaft kumulativ voranzuschreiten. Ältere Erkenntnisse werden in eine aktuelle sprachliche und formale Darstellung transformiert, dabei in der Regel vereinfacht, z. T. sogar trivialisiert, während die konkrete historische Gestalt und der präformale Kontext einschließlich Motivationen und inten-

dierter Anwendungen vergessen werden (dürfen). In diesem Sinne scheint Nietzsches Überzeugung, es sei „ganz und gar unmöglich, ohne Vergessen überhaupt zu *leben*“ ([16, p. 213]), in der Mathematik nicht nur mit Bezug auf das radikale Ausblenden störender, konkreter Details beim jeweiligen Abstraktionsprozess (vgl. hierzu [3, pp. 41]), sondern eben auch in Bezug auf die eigene Geschichte zum Programm zu werden. Der *mathematische Gehalt* scheint dabei verlustlos bestehen zu bleiben bzw. in Verallgemeinerungen aufgehoben zu werden. Zudem liegen genügend Schwierigkeiten in der Sache selbst. Die Darstellung historischer Aspekte wirkt dann wie eine zusätzliche Belastung, auf die schon aus Zeitgründen verzichtet wird.

Dass Geschichte und Philosophie einer wissenschaftlichen Disziplin jedoch untrennbar zu ebendieser Disziplin gehören, auch wenn die Reflexions- und Orientierungsdisziplinen methodisch teilweise ganz anders arbeiten, soll hier nur kurz vermerkt, aber nicht weiter vertieft werden. Schon von daher besteht Veranlassung, philosophische und historische Reflexionen als Bestandteile in ein umfassendes Studium des Fachs Mathematik zu integrieren. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns jedoch nur auf einen kleinen Ausschnitt dieser umfassenden Thematik

<sup>1</sup> Der vorliegende Aufsatz ist eine Kurzfassung des Beitrages [15]. Für hilfreiche Kommentare danke ich Andreas Vohns und Gabriele Wickel!

<sup>2</sup> Diese Haltung kommt besonders hübsch in dem Mythos vom „Buch der Beweise“ zum Ausdruck, vgl. das Vorwort in M. Aigner, G. M. Ziegler: Das Buch der Beweise. Springer-Verlag, Berlin 2002.

konzentrieren, nämlich den Bereich der *Hochschulbildung für das Lehramt*. Für die Rolle der Mathematikgeschichte ergeben sich in Bezug auf das Lehramtsstudium natürlich Spezifika gegenüber dem reinen Fachstudium, insofern ein Studium für das Lehramt auf den speziellen Beruf der MathematikpädagogInnen vorbereiten soll; dies gilt insbesondere mit Blick auf die später zu leistenden Aufgaben für die Elementar- und Allgemeinbildung. Unter Elementarbildung kann hier in etwa das verstanden werden, was Hans Werner Heymann unter der Überschrift „Lebensvorbereitung“ diskutiert (vgl. [7, pp. 134]). Durchaus im Sinne Nietzsches soll im Folgenden zunächst eine ‚lebensdienliche‘ Funktion der Mathematikgeschichte diskutiert werden; sie wird hierbei also als *hochschuldidaktisches Hilfsmittel* betrachtet (vgl. 1). Anschließend werden die Gefahren eines ‚Zuviel‘ bzw. einer falsch verstandenen Integration der Geschichte skizziert: *Mathematikgeschichte als Hinderung* oder als schlechte *Karikatur* (vgl. 2). Im Bereich einer umfassenderen mathematischen Allgemeinbildung geht es – erneut mit Heymann gesprochen – auch um die Rolle der Mathematik für die „Stiftung kultureller Kohärenz“, für „Weltorientierung“ und „kritischen Vernunftgebrauch“ (vgl. [7, pp. 154]); in Bezug auf diese Aspekte wird die Mathematikgeschichte über eine unterstützende Funktion hinaus auch zu einem Lehrgegenstand eigenen Rechts (vgl. 3).

Wenn im Folgenden verschiedene Verwendungsweisen der Mathematikgeschichte voneinander unterschieden werden, so soll dies nicht so verstanden werden, als ließen sich diese säuberlich voneinander trennen und jeweils gesondert aufrufen; sie stellen eine Art von Idealtypen (im Sinne Max Webers) dar. In der konkreten Situation werden in der Regel mehrere Verwendungsweisen gleichzeitig und in jeweils unterschiedlichem Ausmaß zum Tragen kommen.

### 1 **Mathematikgeschichte als (hochschul)didaktisches Hilfsmittel**

Eine Integration historischer Elemente kann die Lehre der fachlichen Inhalte in vielfältiger Weise unterstützen. Diese inzwischen nahezu unstrittige Überzeugung soll im Folgenden etwas differenzierter entfaltet werden. Das Augenmerk soll also bewusst auf eine Indienstnahme der Mathematikgeschichte zum Zwecke einer besseren, fachlich angemessenen, ein tiefergehendes Verstehen

der mathematischen Inhalte befördernden Lehre gerichtet sein. Eine solche – wohletablierte und akzeptierte – Funktionalisierung für die Zwecke anderer Fächer ist der Mathematik selbst ohnehin nicht fremd, leistet sie doch für sämtliche Natur- und Ingenieurwissenschaften wie auch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften als ‚Grundlagenfach‘ einen unverzichtbaren ‚Service‘. Dies entspricht einer der charakteristischen Formen des Verhältnisses innerhalb der universitären Disziplinenvielfalt, indem nämlich eine Disziplin der anderen als ‚Hilfswissenschaft‘ dient, wobei für die Mathematik sicherlich die Bandbreite der Anwendungsfächer besonders groß ist. Dabei dürfen (und müssen!) zumindest für die Lehre die eigenen wissenschaftlichen Standards weitgehend verleugnet werden, um den jeweiligen Bedürfnissen der Anwendungsfächer Rechnung zu tragen (die Theoreme werden etwa ohne Beweise vorgebracht und lediglich durch Beispiele plausibilisiert). Die Mathematik wird allerdings bei diesem Unternehmen die eigene Wissenschaftlichkeit von ihrer rezeptartigen Anwenderform klar abgrenzen. Analog ‚darf‘ die Mathematikgeschichte – wenn es ihr im Rahmen der Lehre vor allem um ein besseres Verstehen der mathematischen Inhalte geht – historische Standards einigermaßen lax handhaben. Zugleich sollte jedoch die Mathematikgeschichte als Disziplin von ihrer funktionalisierten Gestalt deutlich unterschieden werden. Und überdies darf nicht übersehen werden, dass eine mathematikhistorisch differenzierte Darstellung – zumindest exemplarisch – ein unverzichtbarer Bestandteil des Lehramtsstudiums ist (eine Diskussion dieses Aspektes folgt erst im Abschnitt 3).

### **Der anekdotische und der tröstende Gebrauch.**

Der vermutlich häufigste Gebrauch der Mathematikgeschichte ist anekdotisch: Der als allzu trocken empfundene Stoff wird gelegentlich durch kleine Geschichten aus der Geschichte gewürzt. Das Anekdotische lebt vom Kontrast zur ‚normalen‘ Präsentation: So liegt etwa die Betonung hier auf dem biographisch Persönlichen oder dem originellen Einzelfall, die sonst gar keine Rolle spielen. Typisches Beispiel für eine solche Anekdote ist die ‚Geschichte vom kleinen Gauß‘, der als Elementarschüler seinen Lehrer durch die genial-einfache Lösung einer mühseligen Fleißaufgabe überrascht.<sup>3</sup> Die populärwissenschaftliche Literatur enthält hier natürlich eine große Zahl von wei-

<sup>3</sup> Daniel Kehlmann gewinnt dieser eigentlich etwas abgestandenen Anekdote auf überraschende Weise eine existentielle Tiefe ab, indem er die Situation des zum fachlichen und pädagogischen Offenbarungseid genötigten Mathematiklehrers ins Zentrum der Betrachtung rückt (vgl. [9, p. 55]).

teren Beispielen. Auch wenn es sich hier sicherlich um eine eher defizitäre Form des Historischen handeln mag, sollte die Möglichkeit einer produktiven Rolle des Anekdotischen nicht allzu gering geachtet werden. Wie bei jeder Aufführung, müssen dazu jedoch die Pointen gekonnt gesetzt werden.

Eine spezielle Variante des anekdotischen Gebrauchs ist der tröstende. Am Beispiel historischer Persönlichkeiten und langjähriger Entwicklungen wird verdeutlicht, dass die beim Studierenden – in aller Regel – auftauchenden, hartnäckigen Verständnisprobleme nicht nur herablassend oder gütig tolerierbar, sondern sogar ‚ganz natürlich‘ sind. Wenn sogar die größten Mathematiker ihrer Zeit über Jahrzehnte an der Lösung eines Problems haben arbeiten müssen, wenn es Jahrhunderte währender Forschung bedurfte, um zentrale mathematische Begriffe herauszuarbeiten, dann sollte der Studienanfänger nicht daran verzweifeln, dass er sich über Monate damit plagt die vorgelegte Lösung nachzuvollziehen. Als Beispiel sei nur an den mühevollen Weg erinnert, bis das Konzept der komplexen Zahlen volle Akzeptanz gefunden hatte (vgl. [2, pp. 45]).

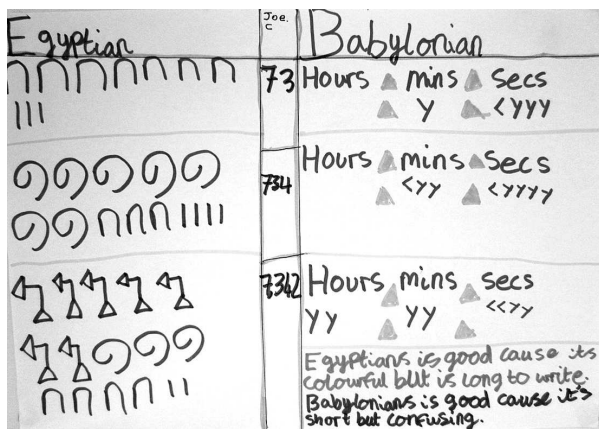
**Der genetische Gebrauch.** Einen deutlich höheren Anspruch erhebt der genetische Gebrauch. Dabei stellt der historisch-genetische Zugang nur *eine* Facette eines umfassenderen Konzepts<sup>4</sup> dar, das sich vor allem gegen eine ‚deduktivistische‘ bzw. ‚formalistische‘ Vermittlung der Mathematik wendet. Im Kontrast zu einem Vorgehen, das zu Beginn eines mathematischen Themas eine bereits (seit Ewigkeit her) fertige Axiomatik, bzw. die allgemein(st)e Struktur präsentiert, die allenfalls später konkretere Beispiele abwirft, sollen bei einem genetischen Zugang die abstrakteren Begriffe schrittweise aus den konkreteren entwickelt werden. Von Beispielen und Gegenbeispielen geleitet wird also quasi empirisch das mathematische Terrain erkundet, bis schließlich erst am Ende des (Lern)Prozesses die allgemeinen Begriffe und Theoreme erreicht sind. Ausgehend von einer Analogie von historischer (Phylo)Genese und lernbiographischer (Onto)Genese wird die historische Entwicklung eines mathematischen Begriffs als didaktische Hilfe zum (besseren) Verstehen eingesetzt. In der Tat lässt sich mit guten Gründen der Verlauf der Mathematikgeschichte so lesen, als konzentrierten die mathematischen Begriffe (etwa

der Begriff der Stetigkeit) eine lange Erfahrungsgeschichte, in der ein mathematisches *Phänomen* auf den (*axiomatischen*) *Begriff* gebracht wird.<sup>5</sup> Ohne die genaue Kenntnis etwa von Beispielen und Gegenbeispielen, von verworfenen Alternativen, von intendierten Anwendungen etc. ist ein umfassendes Verstehen eines solchen Begriffs kaum denkbar. Allerdings stellt die Kenntnis der historischen Genese in diesem Sinne ein extrem anspruchsvolles Ziel dar, das deutlich über das Verstehen der resultierenden Begriffe hinausgeht. Hier ist also genau darauf zu achten, ob die Geschichte tatsächlich auf eine unterstützenden Funktion beschränkt bleiben soll, oder aber als Thema eigenen Rechts betrachtet wird (siehe Sektion 3). In diesem Sinne stimme ich den kurzgefassten Thesen Lutz Führers zu, wenn er einerseits feststellt, dass „das historisch-genetische Prinzip [...] Beispiele zu denkbaren Erschließungsprozessen“ liefert, andererseits jedoch nicht verabsolutiert werden darf, „weil der ‚historische Weg‘ [...] sich in all seinen Erkenntnismotiven und Mühseligkeiten nicht ohne Verkürzungen vergegenwärtigen lässt, [...] weil es möglicherweise inzwischen leichtere, kürzere, einleuchtendere oder übertragbarere Wege zum jeweils angestrebten Wissen gibt“ ([4, p. 53]).

Innerhalb des genetischen Gebrauchs möchte ich zwei Varianten unterscheiden. Ein implizit historisch-genetisches Verfahren baut zwar bei der Organisation der Lehre auf einer Kenntnis historischer Prozesse auf, wird diese jedoch u. U. gar nicht explizit darstellen. So können etwa die Konzepte der mehrdimensionalen Analysis zunächst ausschließlich für den Spezialfall  $\mathbb{R}^3$  entwickelt werden, der schließlich über Jahrhunderte hinweg dominierte. Erst später können die ‚konkreten‘ Resultate dann auf den Fall eines beliebigen endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinert werden. Dies wird sicherlich aus einer strukturellen Sicht als unnötig kompliziert erscheinen. Dennoch kann es für den Lernenden erheblich einfacher sein, die neuen analytischen Begriffe zunächst mit einer vertrauten ‚räumlichen Anschauung‘ zu verbinden, und erst dann, wenn diese eine gewisse Festigkeit gewonnen haben, die Abstraktion des Raumbegriffs zu vollziehen. Ein explizit historisch-genetisches Vorgehen entwickelt schließlich die Inhalte parallel zu einer mehr oder weniger ausführlichen Darstellung ihrer historischen Genese; hier stellt [6] den ausgesprochen lesenswerten Versuch dar, die

<sup>4</sup> Eine ausführliche (historische) Studie zu diesem gerade für die Mathematikdidaktik wichtigen Begriff legt G. Schubring in [17] vor.

<sup>5</sup> Man vergleiche hierzu die für die Mathematikgeschichte (und -philosophie) bahnbrechenden Arbeiten von Imre Lakatos (1922–1974), etwa [11]. Sicherlich nicht ganz zufällig präsentiert Lakatos seine historische Rekonstruktion des Verfahrens von „Beweisen und Widerlegungen“ am Beispiel des Eulerschen Polyedersatzes in einem fiktiven Klassenzimmer.



Ägyptische und Babylonische Zahlzeichensysteme im Schüler(innen)urteil (<http://www.gfsmaths.com>)

Themen der Analysis entlang ihrer Geschichte zu entfalten.

**Der verfremdende Gebrauch.** Ein spezifisch auf das spätere Berufsfeld Schule bezogener Gebrauch des Historischen ist verfremdend. Gerade beim Lehramt für den Primarbereich liegt der eigene schulische Lernprozess zeitlich weit zurück, und somit entfällt sehr oft eine lebhaftere Erinnerung an eigene Schwierigkeiten – beispielsweise beim Erlernen der elementaren Arithmetik. Hier kann der historische Kontext die elementare Mathematik soweit verfremden, dass Studierende erneut die Erfahrung eigenen Lernens machen können bzw. müssen. Auch öffnet der Blick auf historisch realisierte Alternativen die Augen dafür, dass es keineswegs selbstverständlich und einfach ist, dass ‚man‘ so notiert und rechnet, wie es heute üblich ist. Zudem kann der Wert einer (für den jeweiligen Zweck) gut geeigneten Notation überhaupt erst gewürdigt werden, wenn Erfahrungen mit Alternativen gemacht werden. Zwei Beispiele mögen dies illustrieren.

Von elementarer Bedeutung für jede Kultur sind sicherlich das System und die Notation der Zahlen. Hier sind das additive Dezimalsystem Ägyptens und das sexagesimale Stellenwertsystem Babylons (und eher aus Gründen der historischen Orientierung auch das Römische System) Lehrinhalte, die sicherlich zum Kanon eines jeden Lehramtsstudiums für den Primarbereich zählen sollten.<sup>6</sup> Die häufig gewählte axiomatische Einführung der reellen Zahlen verdeckt leicht die enormen Schwierigkeiten, die in einer formalen Operationalisierung des Kontinuums liegen. Aber auch ein technisch aufwendigerer, konstruktiverer Zu-

gang – etwa über Äquivalenzklassen rationaler Cauchyfolgen – wird den tatsächlichen systematischen Problemen nicht gerecht. So könnte eine Präsentation des klassisch griechischen Umgangs mit dem Phänomen der Inkommensurabilität – ahistorisch gesprochen: die antike Theorie irrationaler Zahlen (besser Größenverhältnisse) – zumindest einen Eindruck der grundlegenden Schwierigkeiten vermitteln (vgl. [1, pp. 61]).

**Der exemplarische Gebrauch.** Schließlich erlaubt ein exemplarischer Umgang mit der Mathematikgeschichte eine ‚Erfahrung Mathematik‘ im – zwar nicht aktuellen, aber doch authentischen – Forschungskontext. Gerade für das gymnasiale Lehramt sollten solche Erfahrungen mit ‚echter‘ Mathematik ermöglicht werden, ohne dass dies auf das schlichte Erleben vollständigen Nichtverstehens hinausläuft. Hierbei ist zu beachten, dass zwar einerseits mit zunehmendem Alter der Quelle die mathematischen Schwierigkeiten tendenziell abnehmen, dass jedoch andererseits die historische Fremdartigkeit (etwa der Sprache, des kulturellen Kontexts, des mathematischen Stils) deutlich zunehmen kann. In der Regel wird man beim exemplarischen Umgang bzgl. der historischen Präzision Abstriche machen müssen, etwa Übersetzungen verwenden, oder sogar Sekundärautoren konsultieren, die die primäre Quelle überhaupt erst erschließen (für eine Vielzahl von Themen in dieser Richtung vgl. [1, pp. 58]).

## 2 Mathematikgeschichte als Hindernis oder Karikatur

Von Nietzsche sensibilisiert soll nicht verschwiegen werden, dass ein schlichtes Übermaß an Mathematikgeschichte zumindest für das Lehramtsstudium (aber auch für den Schulunterricht) nicht wünschenswert ist, selbst wenn die aktuelle Situation davon noch weit entfernt sein mag. Das Fach Mathematik soll also keinesfalls durch das Fach Mathematikgeschichte ersetzt werden. Allerdings scheint mir derzeit weniger ein schlichtes ‚Zuviel‘ als vielmehr ein wenig adäquater Gebrauch der Stolperstein zu sein, bei dem sowohl das systematische wie auch das historische Verständnis für Mathematik behindert werden kann. Auch hierzu werden nun einige Idealtypen skizziert.

**Die antiquarische Karikatur.** Eine schon von Nietzsche heftig kritisierte Variante des Historischen, die im wesentlichen ein Übermaß an rein

<sup>6</sup> Eine nützliche Einführung in die historische Entwicklung verschiedener Zahlkonzepte und -darstellungen geben etwa [5], [8], [18].



positivistischer Historie bedeutet, ist sein antiquarischer Gebrauch. Hier sammelt und hortet der unreflektierte und unkontrollierte historische Sinn längst verstaubte Kuriositäten, schließt sich mit diesen in einem Museum ein und schließt gleichzeitig die Anfragen und Bedürfnisse der Gegenwart aus. Übertragen auf unser Thema würde dies heißen, dass die Arbeit am mathematischen Inhalt durch die rein referierende Präsentation der Werke historischer Autoren ersetzt wird. So würde etwa eine Lehrveranstaltung über (elementare) Arithmetik in einer Sammlung von Rechenmeistern des 14. und 15. Jahrhunderts aufgehen. Im antiquarischen Umgang gehen allerdings sowohl der mathematische als auch der historische Gehalt unter bzw. werden beide unterkomplex vermittelt.

**Die monumentalische und die joviale Karikatur.** Zwei hinderliche Varianten des Anekdotischen sollen an dieser Stelle benannt werden. Zum einen können die historischen Bemerkungen als rein monumentalische Präsentation der großen Heroen der Mathematikgeschichte erfolgen. Mathematik wäre dann gemacht von geistig unerreichbaren Giganten, in deren Schlagschatten an eigene Produktivität gar nicht zu denken wäre, ja nicht einmal eine sinnvolle Antwort auf die Frage „Wie kommt man darauf?“ wäre zu erwarten.

Die Kehrseite der monumentalischen (und ein Zerrbild der tröstenden) Variante ist der joviale Umgang mit der Geschichte; was wusste der große XY schon von dem, was 'wir heute wissen'. Dabei wird zugunsten der propagierten Fortschrittsideologie von allem historischen Kontext abstrahiert. XY ‚wollte‘ also nichts anderes, als die Begriffe und Theoreme zu entdecken, als deren Vorläufer wir heute seine Resultate ansehen. Selbst wenn dieser Bezug auf die Mathematikgeschichte dem systematischen Ziel neutral gegenüber stehen mag, so vermittelt er doch in aller Regel ein völlig unzutreffendes Bild der historischen Situation.

**Do you remember all the times you've made this classic mistake?**

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{d}{dx}f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

**Don't worry. So did Gottfried Wilhelm von Leibniz, the co-inventor of calculus.**



Motivational Leibniz (<http://math-fail.com>)

**Geschichte als Verstehenshindernis.** Nicht zu unterschätzen sind auch die mit einem unkontrollierten bzw. allzu genauen historisch-genetischen Gebrauch verbundenen Probleme. Die Komplexität der Mathematikgeschichte, zu der ja ganz wesentlich auch Irrwege und Umwege (aus heutiger Sicht!) zählen, kann – gerade für Studierende, die sich noch keinen festen Stand in Bezug auf mathematische Konzepte erarbeitet haben und damit auch keinen beweglichen Umgang mit diesen – durchaus verwirrend wirken. Insofern kann das Genetische nicht selten die deduktive Form, die das Resultat eines langen historischen Prozesses sein mag, geradezu konterkarieren. Die Funktionalisierung der Mathematikgeschichte geht somit leicht in die – durchaus legitime! – Präsentation eines Lehrgegenstands eigenen Rechts über, der im Kontrast zum Fachinhalt nochmals einen ganz eigenen Reiz, aber auch eigene Schwierigkeiten bietet.

### 3 Mathematikgeschichte als Lehrinhalt eigenen Rechts

Es ist kaum zu bestreiten, dass Geschichte (im Sinne der Geschichtsschreibung) im allgemeinen wie auch die Geschichte der Mathematik im speziellen eine zentrale Orientierungsleistung unserer Kultur darstellt. Nur ein Denken in geschichtlichen Zusammenhängen ermöglicht ein Kontingenz-Bewusstsein, das Bestehendes als Resultat zwar nicht zufälliger, aber durchaus kontingenter Entscheidungen zu bestimmen und damit zu beurteilen, zu rechtfertigen, aber auch zu kritisieren vermag. Geschichte wird daher quasi automatisch zum Pflichtinhalt eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts und zumindest mittelbar auch eines jeden Lehramtsstudiums. Dabei spielt die Mathematik jedoch nicht nur für die *Wissenschaftsgeschichte* eine zentrale Rolle, sondern gerade auch für die *Sozial- und Kulturgeschichte*. Dieser letztere Aspekt wird viel zu häufig kaum wahrgenommen bzw. dramatisch unterschätzt.<sup>7</sup> Moderne Gesellschaften werden jedoch durch Mathematik – indirekt via Technik, aber auch direkt durch mathematisch kodifizierte soziale Regeln (etwa demokratischer Wahlsysteme, der Sozialversicherungs- und Rentensysteme, der Unterstützung oder gar Determination von Entscheidungen durch Statistiken) – in extremer Weise geprägt. Diese Prägung und deren historische Genese gilt es wenigstens exemplarisch bzw. in Bezug auf einzelne Aspekte in den Blick zu nehmen.

<sup>7</sup> Vgl. hierzu [13], [14].



Proof (<http://xkcd.com/1153>, Copyright CC BY-NC 2.5)

### Mathematik als Element der Kulturgeschichte.

Ein kulturhistorisch orientierter Zugang zur Mathematik müsste also die – durchaus auch ambivalente – Rolle der Mathematik für die Kulturgeschichte der Menschheit präsentieren und diskutieren. Dies kann sicherlich nicht umfassend gelingen, ein an einzelnen Beispielen geschultes Grundverständnis stellt aber eine essentielle Anforderung für die Bildung zur (gesellschaftlichen) Urteilsfähigkeit dar. Zudem liefert ein historischer Zugang wesentliche Aspekte für eine Antwort auf die normative Frage nach Inhalten und Umfang des mathematischen Kanons für die allgemeinbildende Schule, die sich keineswegs nur aus dem allgemeinen Anwendungsbezug und der speziellen Wissenschaftspropädeutik beantworten lässt. Im Folgenden werden drei Themen skizziert, die in exemplarischer Weise Bezüge zwischen Mathematik- und Kulturgeschichte repräsentieren.

Eine für die Mathematik- wie auch die allgemeine Kulturgeschichte entscheidende Weichenstellung findet um das 5. Jahrhundert vor Christus im Antiken Griechenland statt; erstmals werden hier allgemeingültige Sätze formuliert und bewiesen. In der Mathematik werden Aussagen von absoluter Genauigkeit über besondere Gegenstände formuliert, jenseits aller Möglichkeit einer em-

pirischen Überprüfung. Zugleich mit einer Emanzipation der Philosophie von Mythos und Religion macht sich die Mathematik von Anwendungszwecken frei, wird zu einer ‚reinen‘ Wissenschaft. Neben den Anfängen dieser Denkbewegung (etwa bei Thales und Pythagoras) sollte die für Jahrhunderte Vorbild gebende axiomatisch-deduktive Gestalt bei Euklid, aber auch – als komplementäre Figur – der sich an einzelnen Problemen abarbeitende, unbekümmert Mathematik und Mechanik mischende Archimedes dargestellt werden.

Mit den Namen Galileo Galilei und Isaac Newton verbindet sich zurecht der Wandel zur (wissenschaftlich-technischen) Moderne; Mathematik wird seitdem als konstitutive Theoriesprache einer jeden Naturwissenschaft angesehen. Zur mathematischen Grundbildung gehört sicherlich ein Einblick in den doppelten Paradigmenwechsel von der ptolemäischen zur kopernikanischen Kosmologie und von der aristotelischen zur modernen Physik.<sup>8</sup>

Georg Cantor kann mit Recht als Begründer der ‚modernen Mathematik‘ (vgl. [12]) bezeichnet werden. Mit seiner transfiniten Mengenlehre beginnt ein dramatischer Themen- und Stilwechsel in der Mathematik, ebenso prägend wie die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Die Genese des von Beginn des mathematischen Fachstudiums an verwendeten Grundkonzepts sollte auf jeden Fall diskutiert werden. Ein historisch genauerer Blick zeigt dabei, dass die noch häufig als ‚naiv‘ (ab)qualifizierte Konzeption Cantors gerade begrifflich alles andere als naiv ist. Gegenüber dem formalistischen Zugang eines ‚leeren‘, rein axiomatischen Mengenbegriffs liefert seine (auch anschauliche) Begriffsbildung und deren argumentative Verteidigung ein viel reichhaltigeres Feld der intellektuellen Auseinandersetzung und zeigt, dass Motivation und Rechtfertigung für mathematische Forschung durchaus metaphysischer Art sein können (vgl. [1, pp. 83]).

### Mathematikgeschichte und historische Urteilsfähigkeit.

Schließlich präsentiert ein kritischer Zugang die Geschichte der Mathematik als einen Lehrgegenstand eigenen Rechts; er zeigt, dass und inwiefern Mathematikgeschichte ganz anders verläuft als die kanonisch gelehrt, formalisierte Version der mathematischen Themen unter Umständen erwarten ließe. Hier wird mit der Unterscheidung von Genese und resultierender Gestalt die enorme Leistung der axiomatisch-deduktiven

<sup>8</sup> Alexandre Koyré diskutiert hierbei besonders die sich auf Platon berufende neue Argumentation für eine zentrale Rolle der Mathematik in der Naturbeschreibung, vgl. [10]; zum Phänomen einer umfassenden Mathematisierung der Wissenschaften vgl. [13].

Kondensation überhaupt erst erkennbar. Zudem kann die innermathematische Frage nach Motivation und Heuristik nicht ohne eine historische Einbettung angemessen thematisiert werden. Die einigmaßen adäquate Präsentation eines mathemathikhistorischen Themas kann sicherlich nicht nebenbei in einer kurzen Bemerkung erfolgen, sondern benötigt Zeit und Aufmerksamkeit sowie ein solides Vorwissen der entsprechenden mathematischen Zusammenhänge. Sie ist in diesem Falle auch eher nicht als didaktisches Hilfsmittel zu verwenden, sondern stellt einen äußerst anspruchsvollen Lehrinhalt eigenen Rechts dar.

Als Beispiel sei hier auf den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und dessen Abgrenzung von der punktwisen Konvergenz hingewiesen; er geht als zentrales Kapitel höherer Analysis sicherlich deutlich über den Schulstoff eines Gymnasiums hinaus; gleichwohl ist der Begriff für ein tieferes Verständnis des Phänomens der Konvergenz und für einen Übergang zu Fragestellungen etwa der Funktionalanalysis oder Integrationstheorie unverzichtbar. Die verwickelte Geschichte der Genese des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz ist ein faszinierendes, zeitlich relativ dichtes Kapitel der Mathematikgeschichte im engeren Sinne, in dem drei analytische Schlüsselbegriffe *Funktion*,  $\epsilon - \delta$ -*Stetigkeit* und *gleichmäßige Konvergenz* gleichzeitig herausgebildet beziehungsweise präzisiert werden. Die Genese unterscheidet sich grundlegend von der systematischen Architektonik der Begriffe. Sorgfältig vermittelt und gut verstanden eröffnet sie ein tiefes Verständnis sowohl für einen der analytischen Grundbegriffe als auch für mathematische Forschungsprozesse und mathematische Begriffsbildung überhaupt.<sup>9</sup>

Das Studium der Mathematik mit dem Berufsziel des Lehramts an einer allgemeinbildenden Schule muss eine immense Spannbreite an fachlichen und didaktischen Kompetenzen vermitteln. Hierzu kann – wie ich hoffe überzeugend dargestellt zu haben – die Mathematikgeschichte einen wichtigen Beitrag leisten. Je nach Anspruch muss dazu auf Seiten des Dozenten eine mehr oder minder professionelle mathemathikhistorische Bildung vorausgesetzt werden. Ich möchte allerdings gerade auch mathemathikhistorische Laien ausdrücklich dazu ermutigen, historische Elemente in Fach- und Fachdidaktikveranstaltungen zu integrieren; zumal wenn dies in erster Linie um einer besseren Vermittlung der Fachinhalte willen erfolgt. Da eine solche Integration passend zum jeweiligen mathematischen Thema *und* zum historischen Bildungs-

hintergrund des Dozenten gewählt werden muss, wurde hier bewusst auf direkt verwendbare ‚Lehrstücke‘ verzichtet.

Zugleich soll jedoch auch daran erinnert werden, dass ohne eine wissenschaftlich professionelle Mathematikgeschichte die im dritten Abschnitt skizzierten Bildungsaufgaben, aber auch die Aufbereitung des historischen Materials für deren unterstützende Aufgaben, gar nicht zu leisten sind. So mag die unzeitgemäße Erinnerung an die variationsreiche, lebensdienliche Funktion des Historischen für die mathematische Bildung zugleich auch als fachpolitisches Plädoyer verstanden werden.

## Literatur

- [1] Albrecht Beutelspanner, Rainer Danckwerts, Gregor Nickel, Susanne Spies, and Gabriele Wickel. *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Vieweg+Teubner, 2011.
- [2] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, Max Koecher, Klaus Mainzer, Jürgen Neukirch, Alexander Prestel, and Reinhold Remmert. *Zahlen*. Springer, 1983.
- [3] Roland Fischer. *Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik*. Profil, 2006.
- [4] Lutz Führer. *Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen*. Vieweg, 1997.
- [5] Helmuth Gericke. *Mathematik in Antike und Orient*. Springer, 1984.
- [6] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Analysis in historischer Entwicklung*. Springer, 2010.
- [7] Hans Werner Heymann. *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz, 1996.
- [8] Georges Ifrah. *Universalgeschichte der Zahlen*. Campus, 1986.
- [9] Daniel Kehlmann. *Die Vermessung der Welt*. Rowohlt, 2005.
- [10] Alexandre Koyré. *Galilei. Die Anfänge der neuzeitlichen Wissenschaft*. Wagenbach, 1988.
- [11] Imre Lakatos. *Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Vieweg, 1979.
- [12] Herbert Mehrstens. *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*. Surkamp, 1990.
- [13] Gregor Nickel. *Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften – Ethische Erwägungen*. In J. Berendes, Hg., *Autonomie durch Verantwortung. Impulse für die Ethik in den Wissenschaften*, 319–346. Mentis, 2007.
- [14] Gregor Nickel. *Mathematik – die (un)heimliche Macht des Unverstandenen*. In M. Rathgeb, M. Helmerich, K. Lengnink, and G. Nickel, Hg., *Mathematik Verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven*, 47–58. Vieweg + Teubner, 2011.
- [15] Gregor Nickel. *Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium*. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, and G. Wickel, Hg., *Mathematik verständlich unterrichten – Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*, 253–266. Springer Spektrum, 2013.

<sup>9</sup> Eine Skizze dieser Genese ist in [1, pp. 74] zu finden und natürlich bei Imre Lakatos, [11, pp. 119].

- [16] Friedrich Nietzsche. *Werke. Band I (Hrsg. R. Schlechta)*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.
- [17] Gert Schubring. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Klett-Cotta, 1978.
- [18] Hans Wussing. *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*. Springer, 2009.

Gregor Nickel, Universität Siegen, Emmy-Noether-Campus, Walter-Flex-Str. 3, 57068 Siegen, Email: [nickel@mathematik.uni-siegen.de](mailto:nickel@mathematik.uni-siegen.de)