Die Schülerinnen und Schüler können ...

Ein nicht ganz ernst gemeinter Beitrag zur Optimierung von (Mathematik-)Lehrplänen

Beat Jaggi

Heutige Lehrpläne sind kompetenzorientiert. Fast jeder Satz beginnt mit „Die Schülerinnen und Schüler können...“. Damit unsere Schülerinnen und Schüler auch in Zukunft vieles können und bei der nächsten PISA-Studie gut abschneiden, gilt es, einerseits möglichst viele solcher Kompetenzen oder ‚Candos‘ (von „can do“) aufzulisten. Anderseits sollte ein Lehrplan aber auch nicht die Seitenzahl einer Enzyklopädie erreichen. Diese beiden sich im Kern widersprechenden Anforderungen machen deutlich, dass es sich eigentlich um ein Optimierungsproblem handelt; und da hat die Mathematik doch einige Lösungsansätze anzubieten.

Zunächst ist festzuhalten, dass es gerade in der Mathematik im Prinzip einfach ist, mit wenigen Worten unendlich viele Candos zu formulieren. Betrachten wir zwei (frei erfundene) Beispiele:

Beispiel 1. *Die Schülerinnen und Schüler können für jede natürliche Zahl n die Summe* $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *berechnen.*

Da die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist, sind mit obigem Satz auch unendlich viele Candos formuliert.

Bemerkung: Es käme hier natürlich noch darauf an, in welcher Zeit und mit welchen Mitteln die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe lösen können. Der Legende nach hat der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1707–1777) die Antwort für $n = 100$ schon als Grundschüler in wenigen Minuten gefunden:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Das ist natürlich besser als wenn man selbst bei Verwendung eines Supercomputers Tage braucht, um die Antwort zu finden.

Beispiel 2. *„Die Schülerinnen und Schüler können jede reelle Zahl ins Quadrat setzen.“*

Da die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist, sind im Beispiel 2 mit lediglich 11 Wörtern im Prinzip überabzählbar viele Candos formuliert.

Im Folgenden wollen wir uns auf endliche Mengen von Anforderungen beschränken und unser Hauptaugenmerk auf ein Prinzip richten, das in (Entwürfen von) Lehrplänen und Bildungsstandards ansatzweise schon umgesetzt ist. Die Beispiele stammen alle aus dem Fachbereich Mathematik, das Prinzip aber lässt sich auf andere Fächer übertragen.

Beispiel 3. „Die Schülerinnen und Schüler können Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhalts und des Volumens von Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel verstehen und einsetzen."
(Quelle: [1], Klasse 10, Leitidee Messen)

Beispiel 4. „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken, Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Kugeln, Würfel ordnen und beschreiben."
(Quelle: [2])

Zum Beispiel 4 seien an dieser Stelle zwei Bemerkungen resp. Fragen erlaubt:

1. Eines der Candos lautet: „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken beschreiben." Wie könnte eine solche Beschreibung lauten? „Eine Strecke ist länglich und eher schmal." Es soll hier daran erinnert werden, dass schon ganz andere Leute daran gescheitert sind. So hat Euklid etwa 300 Jahre vor unserer Zeitrechnung in seinem Werk „Die Elemente" [3] versucht, geometrische Objekte zu beschreiben:
   „Was keine Teile hat, ist ein Punkt."
   „Eine Länge ohne Breite ist eine Linie."
   „Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist."
   Heute (genauer nach der Entdeckung nichteuklidischer Geometrien in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts) wissen wir, dass solche Definitionen zu großen Schwierigkeiten führen. Die moderne Mathematik beschränkt sich deshalb oft darauf, Eigenschaften von Objekten anzugeben, ohne die Objekte selber zu beschreiben.
2. Ein weiteres Cando ist: „Die Schülerinnen und Schüler können Kreise ordnen." Auch hier sei die Frage erlaubt, was erwartet wird. Ordnen von Kreisen nach der Größe, nach der Farbe?

Vergleichen wir nun die Beispiele 3 und 4 und führen dazu die sogenannte Produktregel-Schreibweise ein:

Beispiel 3.

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können Formeln zur Berechnung des}$$
$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Oberflächeninhaltes}\\ \textit{Volumens}\end{array}\right\} \textit{von} \left\{\begin{array}{c}\textit{Pyramide}\\ \textit{Zylinder}\\ \textit{Kegel}\\ \textit{Kugel}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{verstehen}\\ \textit{einsetzen}\end{array}\right\}.$$

Beispiel 4.

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können} \left\{\begin{array}{c}\textit{Strecken}\\ \textit{Kreise}\\ \textit{Dreiecke}\\ \textit{Quadrate}\\ \textit{Rechtecke}\\ \textit{Kugeln}\\ \textit{Würfel}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{ordnen}\\ \textit{beschreiben}\end{array}\right\}.$$

Im Beispiel 3 sind mit 18 Wörtern $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ Candos formuliert. Im Beispiel 4 stehen sieben Substantiven (Strecken, Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Kugeln, Würfel) nur zwei Verben (ordnen, beschreiben) gegenüber, was $7 \cdot 2 = 14$ Candos ergibt. Diese Asymmetrie ist nicht optimal. Schon das Ersetzen zweier Substantive durch zwei Verben erhöhte die Anzahl auf $5 \cdot 4 = 20$ Candos. Ersetzt man dann noch weitere zwei Substantive und ein Verb durch drei Adverben, dann kann die Anzahl der formulierten Candos auf 27 erhöht, also fast verdoppelt werden!

Diese Erhöhung der Candos könnte zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können} \left\{\begin{array}{c}\textit{Strecken}\\ \textit{Kreise}\\ \textit{Dreiecke}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{ohne nachzudenken}\\ \textit{ohne Luft zu holen}\\ \textit{schon am frühen Morgen}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{ordnen}\\ \textit{beschreiben}\\ \textit{zeichnen}\end{array}\right\}.$$

Als Satz würde dies wie folgt lauten: „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken, Kreise und Dreiecke ohne nachzudenken, ohne Luft zu holen und schon am frühen Morgen ordnen, beschreiben und zeichnen."

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie mit dem oben beschriebenen „Produktregel-Prinzip" eine möglichst grosse Zahl von Candos formuliert werden kann. Dazu erinnern wir uns an eine sehr schöne und bekannte Mathematikaufgabe (siehe zum Beispiel [4], Seite 90).

Zerlege eine natürliche Zahl derart in natürliche Summanden, dass das Produkt der Summanden möglichst gross ist.

Beispiel: Zwei Zerlegungen der Zahl 99 sind:

$$99 = 33 + 33 + 33 \longrightarrow 33 \cdot 33 \cdot 33 = 35937$$
$$99 = 11 + 11 + 11 + 22 + 22 + 22$$
$$\longrightarrow 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 = 14'172'488$$

Für welche Zerlegung von 99 in eine Summe wird das Produkt all der Summanden maximal?

Die Antwort lautet (siehe [4]):

$$99 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{33 \text{ Summanden}}$$

Das größtmögliche Produkt ist dann

$$3^{33} \approx 5.559 \cdot 10^{15}$$

also rund 5.6 Billiarden!

Bemerkungen:

1. Ist n ein Vielfaches von 3, so liefert stets $n = 3 + 3 + \cdots + 3$ die optimale Zerlegung.
   Ist die Zahl n kein Vielfaches von 3, dann sieht die optimale Zerlegung in eine Summe etwas anders aus:
   Für $n = 3k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $n = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{k-1 \text{ Summanden}} + 2 + 2$ optimal.
   Für $n = 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $n = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{k \text{ Summanden}} + 2$ optimal.
2. Lässt man als Summanden auch Brüche zu, kann die Aufgabe mit Differentialrechnung gelöst werden: Man überzeugt sich zuerst, dass alle Summanden gleich groß sein müssen (das liegt eigentlich an den binomischen Formeln) und sucht dann das Maximum der (reellen) Funktion
   $$f(x) = \left(\frac{n}{x}\right)^x.$$
   Das lokale Maximum von f wird bei $x = \frac{n}{e}$ angenommen und beträgt $e^{\frac{n}{e}}$. Dabei ist $e \approx 2.718$ die berühmte Eulersche Zahl.
   Für $n = 99$ ist $\frac{99}{e} \approx 36.42$. Die Zahl n muss also entweder in 36 oder 37 gleich große Summanden zerlegt werden. Eine Vergleich zeigt: Das maximale Produkt wird mit der Zerlegung
   $$99 = \underbrace{\frac{99}{36} + \frac{99}{36} + \cdots + \frac{99}{36}}_{36 \text{ Summenden}} \text{ erzielt}$$
   und beträgt $\left(\frac{99}{36}\right)^{36} \approx 6.546 \cdot 10^{15}$.
   Das ist doch noch um fast 18% grösser als 3^{33} (siehe oben).
3. Die Eulersche Zahl $e \approx 2.718$ liegt relativ nahe bei 3. Das erklärt noch einmal, weshalb man im ‚natürlichen Fall' 3 als Summanden nehmen muss.

Vorläufiges Fazit: Es gilt, beim Formulieren der Candos möglichst viele Blöcke mit je genau 3 Begriffen einzubauen!

Beispiel:

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Modelle} \\ \textit{Texte} \\ \textit{Situationen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textit{sinnvoll} \\ \textit{zielgerichtet} \\ \textit{angemessen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textit{interpretieren} \\ \textit{verarbeiten} \\ \textit{strukturieren} \end{array} \right\}.$$

Der entsprechende Satz lautet dann: „Die Schülerinnen und Schüler können Modelle, Texte und Situationen sinnvoll, zielgerichtet und angemessen interpretieren, verarbeiten und strukturieren." Einzeln ausgeschrieben lauten diese Candos nun so:

1. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll interpretieren.
2. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll verarbeiten.
3. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll strukturieren.
4. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet interpretieren.
5. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet verarbeiten.
6. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet strukturieren.
7. Die Schülerinnen und Schüler können Mo-

delle angemessen interpretieren.

8. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle angemessen verarbeiten.
9. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle angemessen strukturieren.
10. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll interpretieren.
11. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll verarbeiten.
12. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll strukturieren.
13. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet interpretieren.
14. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet verarbeiten.
15. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet strukturieren.
16. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen interpretieren.
17. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen verarbeiten.
18. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen strukturieren.
19. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll interpretieren.
20. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll verarbeiten.
21. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll strukturieren.
22. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet interpretieren.
23. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet verarbeiten.
24. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet strukturieren.
25. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen interpretieren.
26. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen verarbeiten.
27. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen strukturieren.

Wir haben mit 16 Wörtern tatsächlich $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Anforderungen formuliert! (Der Übersicht wegen haben wir noch drei Bindewörter eingefügt, die aber gut auch weggelassen werden können.)

Das oben beschriebene Produkteregel-Prinzip ist in bestehenden Lehrplänen oder Entwürfen ansatzweise schon relativ gut umgesetzt, wie folgende Beispiele zeigen: „Die Schülerinnen und Schüler können lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum in Termen, Zahlenfolgen und Graphen erkennen und Unterschiede beschreiben.“ (Quelle: [2])

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{lineares}\\ \textit{quadratisches}\\ \textit{exponentielles}\end{array}\right\} \textit{Wachstum} \left\{\begin{array}{c}\textit{in Termen}\\ \textit{in Zahlenfolgen}\\ \textit{in Graphen}\end{array}\right\} \textit{erkennen und Unterschiede beschreiben.}$$

Mit 19 Wörtern sind doch schon $3 \cdot 3 = 9$ Anforderungen beschrieben. Nicht schlecht! Mit weiteren Verben oder noch anderen Wortarten (z. B. beschreiben, interpretieren, ...) könnte man diese Anzahl aber noch beträchtlich steigern.

Beispiel:

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{lineares}\\ \textit{quadratisches}\\ \textit{exponentielles}\end{array}\right\} \textit{Wachstum} \left\{\begin{array}{c}\textit{in Termen}\\ \textit{in Zahlenfolgen}\\ \textit{in Graphen}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{in kuzer Zeit}\\ \textit{zielgerichtet}\\ \textit{konsequent}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\textit{erkennen}\\ \textit{verarbeiten}\\ \textit{interpretieren}\end{array}\right\}.$$

Als Satz: „Die Schülerinnen und Schüler können lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum in Termen, Zahlenfolgen und Graphen in kurzer Zeit, zielgerichtet und konsequent erkennen, verarbeiten und interpretieren.“ Das ergeben nun sogar $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Anforderungen.

Jetzt gehen langsam die Wortarten aus. Wir versuchen es trotzdem:

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Zahlen}\\ \textit{Variablen}\\ \textit{Funktionen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{selbstbewusst}\\ \textit{ohne zu zögern}\\ \textit{mit vollem Magen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{schriftlich}\\ \textit{mündlich}\\ \textit{mit dem TR}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{sinnvoll}\\ \textit{zielgerichtet}\\ \textit{angemessen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{untersuchen}\\ \textit{interpretieren}\\ \textit{strukturieren}\end{array}\right\}.$$

Wieder als ein Satz formuliert, lautet dies nun: „Die Schüler können Zahlen, Variablen und Funktionen selbstbewusst, ohne zu zögern und mit vollem Magen schriftlich, mündlich und mit dem Taschenrechner sinnvoll, zielgerichtet und angemessen untersuchen, interpretieren und strukturieren.“ Dieser Satz alleine enthält $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ Candos! Mehr geht nicht!

Fazit

Bei konsequenter Anwendung des Produktregel-Prinzips müssten bestehende Lehrpläne eigentlich auf einem Bruchteil der bis jetzt beanspruchten Seitenzahl Platz haben. Die grosse Herausforderung besteht darin, die Candos alle in Blöcken von je drei Begriffen anzuordnen.

Literatur

[1] Bildungsstandards für Mathematik, Realschule, Klassen 8, 9, 10, Baden-Württemberg.
[2] Entwurf zum Schweizerischen Lehrplan 21 für die Volksschule, April 2012.
[3] Euklid, *Die Elemente*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Verlag Harri, Deutsch, 2003.
[4] Peter Gallin, *101 Mathematikaufgaben*, sabe, 1997.

Beat Jaggi, Heideweg 24, 2503 Biel, Schweiz, Email: Beat.Jaggi@phbern.ch