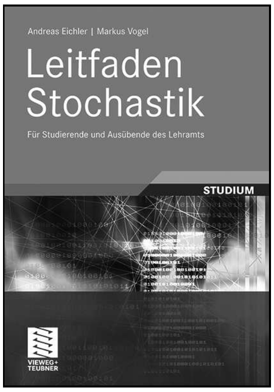
Andreas Eichler und Markus Vogel: Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts

Rezensiert von Norbert Henze



Dieses Buch versteht sich als fachlich orientierte Betrachtung der Leitidee Daten und Zufall für den Unterricht der Sekundarstufe I, wobei aber auch Lehramtsstudierende und Lehrende der Primarstufe angesprochen werden sollen. Im Vorwort betonen die Autoren, dass sie Wert auf einen datenorientierten Zugang zur Stochastik legen, bei dem auch elementare datenanalytische Methoden breiten Raum einnehmen. Zudem wird der Unterschied zwischen Daten und Modellen hervorgehoben. Fast jedes Kapitel beginnt mit einem Beispiel, an dem sich die Entwicklung der Methoden jeweils orientiert.

Das Werk gliedert sich in die neun Kapitel 1. *Erhebung statistischer Daten* (12 Seiten), 2. *Analyse statistischer Daten zu einem Merkmal* (35 Seiten), 2. *Analyse statistischer Daten zu zwei Merkmalen* (42 Seiten), 4. *Datenanalyse: Rückschau* (2 Seiten), 5. *Elementare Wahrscheinlichkeitsanalyse* (18 Seiten), 6. *Mehrstufige zufällige Vorgänge* (26 Seiten), 7. *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* (35 Seiten), 8. *Daten beurteilen und Simulationen* (15 Seiten) und 9. *Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse: Rückschau* (2 Seiten). Die jeweiligen Seitenumfänge verdeutlichen, dass die beschreibende Statistik (Kapitel 1–4) breiten Raum einnimmt, zumal auch datenanalytische Aspekte in anderen Kapiteln stark vertreten sind. In Kapitel 1 erfährt man unter anderem etwas über Probleme im Zusammenhang mit der Erhebung von Daten und wird für Fragen der Repräsentativität von Stichproben sensibilisiert. Kapitel 2 stellt alle gängigen Maßzahlen und grafischen Darstellungmittel für eindimensionale empirische Häufigkeitsverteilungen vor. Kapitel 3 behandelt die deskriptive Statistik zweidimensionaler Daten. Hier lernt man unter anderem neben der klassischen Pearson-Korrelation noch drei weitere Korrelationskoeffizienten kennen. Nach einer kurzen Rückschau auf die ersten drei Kapitel stellen die Autoren in Kapitel 5 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnismenge, Ergebnis, Ereignis, Zufallsgröße, Verteilung einer Zufallsgröße) bereit und nähern sich dem Kolmogorovschen Axiomensystem sowohl über das Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeits-Modell als auch über das empirische Gesetz der großen Zahlen. Kapitel 6 behandelt die (paarweise) stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsgrößen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Baumdiagramme, Pfadregeln, den Satz von Bayes und kombinatorische Grundformeln. In Kapitel 7 werden die Gleichverteilung, die Binomialverteilung und die hypergeometrische Verteilung vorgestellt und die Begriffe Erwartungswert, Varianz und Schiefe einer Verteilung behandelt. Über die Tschebyscheff-Ungleichung gelangt man dann zum Bernoullischen Gesetz der großen Zahlen. Mit der Multinomialverteilung und der mehrdimensionalen hypergeometrischen Verteilung erwähnen die Autoren noch kurz zwei multivariate Verteilungen. Kapitel 8 spricht aus datenanalytischer Sicht Probleme des Schätzens und Testens an, wobei auch Permutationstests und ein einfaches Bootstrap-Verfahren thematisiert werden und Simulationsverfahren zum Einsatz kommen. Das Buch schließt mit einer kurzen Rückschau, in der die Autoren noch einmal ihre grundsätzliche Vorgehensweise betonen, die Stochastik durchweg aus der Perspektive der Daten zu betrachten.

Laut Vorwort der Autoren soll das Buch weder eine Sammlung statistischer Methoden noch eine umfassende Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, wie sie für Studierende der Mathematik oder der Stochastik anwendenden Wissenschaften vorgesehen ist. Das Werk erhebt nichtsdestotrotz den Anspruch, eine fachlich orientierte Betrachtung der *Leitidee Daten und Zufall* für den Unterricht der Sekundarstufe I in *Stochastik*, d. h. innerhalb des *Mathematik*unterrichts, zu sein. Einem solchen Anspruch wird es in den rein beschreibenden datenanalytischen Teilen mit gewissen Abstrichen gerecht. Was den zweiten Teil der Leitidee und damit das Verinnerlichen elementarer Grundbegriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeits*rechnung* betrifft, bleibt das Buch vielfach nebulös und schwammig, und es enthält zahlreiche Ungereimtheiten sowie unwahre Behauptungen. So wird man als Leser bereits auf Seite 4 verwirrt, wo ein Merkmal zunächst als eine mit dem Buchstaben Ω bezeichnete *Eigenschaft* eines Subjekts oder Objekts eingeführt wird. Auf der gleichen Seite erfährt man aber auch, dass Ω als *Menge von Merkmalsausprägungen* angesehen wird. Zwei Seiten später werden Merkmale, deren Ausprägungen reelle Zahlen sind, mit dem üblicherweise für Zufallsvariablen vorgesehenen Symbol X geschrieben und als *Abbildungen* auf der wieder mit Ω bezeichneten Menge aller Merkmalsausprägungen betrachtet. Hier wäre es ungleich klarer und üblich, von Anfang an – wie dann auf Seite 98 geschehen – den Buchstaben Ω für die Menge der Ergebnisse eines stochastischen Vorgangs zu reservieren und bei Merkmalen auch in der Notation die Analogie zu den auf Seite 99 als Funktionen auf Ω eingeführten Zufallsgrößen herzustellen.

Auf Seite 98 führen die Autoren Ereignisse als Teilmengen der Grundmenge Ω ein. Hat man also als Studierender diese Definition verinnerlicht, so wird man auf Seite 116 mit einem „Ereignis $A|B$" konfrontiert. Dieses sollte eine Teilmenge von Ω sein; eine derartige, von den Autoren als „Ereignis A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B zutrifft" bezeichnete Teilmenge existiert jedoch nicht. Diesem mathematischen Fauxpax schließt sich direkt ein weiterer, grundlegender Fehler an. So liest man auf Seite 117, wie die stochastische Unabhängigkeit *zweier* Ereignisse definiert ist. Auf Seite 122 wird dann quasi „en passant" die *paarweise stochastische Unabhängigkeit* von mehr als zwei Ereignissen eingeführt, jedoch nie die $2^n - n - 1$ Gleichungen benötigende Unabhängigkeit von n Ereignissen. Ein Fehlschluss ist, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit dreier Ereignisse A, B und C die Gleichung $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ folgen würde (Seite 117 oben). Im Gefolge ist die Definition auf Seite 145, nach der eine Bernoulli-Kette der Länge n die „n-malige, *paarweise* stochastisch unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes" sei, schlichtweg falsch! Hieraus kann die Gestalt der Binomialverteilung nicht mathematisch hergeleitet werden. Zumindest verwirrend ist die auch Seite 144 aufgestellte Behauptung, jeder stochastische Vorgang ließe sich als Bernoulli-Experiment modellieren. Ein mehrfacher Würfelwurf, bei dem man sich für das gemeinsame stochastische Verhalten aller Augenzahlen interessiert und dann mit der Multinomialverteilung konfrontiert wird, ist ein simples Gegenbeispiel. Verwirrend ist auch das mehrfach verwendete Adjektiv *zukünftig* im Zusammenhang mit (theoretischen) Verteilungen, so etwa auf Seite 142 oben.

Auf Seite 151 wird der Erwartungswert plakativ als *Zentrum* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Diese Deutung trifft zwar für symmetrische Verteilungen zu, ist aber irreführend. Warum interpretiert man nicht – wie es üblich ist – den Erwartungswert als physikalischen Schwerpunkt, den man auch ganz anschaulich mit Hilfe einer Mobile-Konstruktion beschreiben kann? Hiermit erfährt der Erwartungswert auch seine eigentliche Bedeutung als Prognosewert für arithmetische Mittel in langen Versuchsserien (Gesetz großer Zahlen). Mathematische Fehler sind das *mehrfache* – und darum nicht als Druckfehler entschuldbare – Auftreten von ω's in Satz 14 und dem sich anschließenden Beweis auf Seite 152 sowie die in der Fußnote auf Seite 154 gemachte Bemerkung, man müsse den Erwartungswert einer Binomialverteilung mit Hilfe der Darstellungsformel ausrechnen, weil man ja diese Verteilung nicht nur mit Hilfe von Indikatorsummen aus einer Bernoulli-Kette heraus erzeugen könne. Unrichtig ist auch die Bemerkung auf Seite 157, nach der für die Additivität der Varianzbildung die stochastische Unabhängigkeit der beteiligten Zufallsvariablen *bestehen muss*. Da ja auf Seite 159 kurz die Kovarianz angesprochen wird, wäre ein simples Beispiel für unkorrelierte, aber nicht unabhängige Zufallsvariablen (wie etwa Summe und Differenz der Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf) angebracht gewesen. Ärgerlich ist der Fehler auf Seite 159 unten, wonach bei stochastisch *un*abhängigen Zufallsvariablen Kovarianzen auftreten, sowie die durchweg durch „$\leq$" zu ersetzenden Größer-Gleich-Zeichen im Beispiel auf Seite 163. Nicht minder ärgerlich sind die im Nachweis der Markov-Ungleichung auf Seite 165 stehenden Ausdrücke $P(Y(\omega))$, die sämtlich durch $P(\{\omega\})$ zu ersetzen sind. Falsch ist die auf Seite 188 aufgestellte Behauptung, die aufgeführte

Welch-Testgröße sei unter der Annahme identischer Normalverteilungen t-verteilt. Gemeint ist der Zwei-Stichproben-t-Test. Dieser besitzt jedoch eine andere Testgröße. Verwirrend sind auch Ausführungen zu Schätzfunktionen auf Seite 189, wonach „mit Hilfe einer Stichprobe ein *Schätzwert* $\hat{u}$ mittels einer Schätzfunktion $\hat{U}$ *geschätzt* wird: $\hat{U}(x_1, \ldots, x_n) = \hat{u}$." Was man erhält, ist natürlich ein Schätzwert für einen *unbekannten Parameter* wie etwa die Erfolgswahrscheinlichkeit p der Binomialverteilung. Auch die zwei Zeilen später aufgestellte Behauptung, ein Wert der Zufallsvariablen $\hat{U}(X_1, \ldots, X_n)$ sei der unbekannte Parameter u, ist absurd, wenn man bedenkt, dass das unbekannte p der Binomialverteilung eine irrationale Zahl sein kann. Die sich anschließende Diskussion über Konfidenzbereiche würde Missverständnissen vorbeugen, wenn man den unbekannten Parameter, dessen Spezifizierung erst Wahrscheinlichkeitsberechnungen ermöglicht, als Index an P anfügt, also P_u bzw. auf Seite 190 oben P_p schreibt. So sollte die Wahrscheinlichkeitsaussage $P(a \leq u \leq b) \geq 0.95$ (Seite 189 Mitte) in dieser Form nicht auftreten, sondern durch $P_u(a(X_1, \ldots, X_n) \leq u \leq b(X_1, \ldots, X_n)) \geq 0.95$ (für jedes unbekannte u) ersetzt werden. Die hier aufgeführten zum Teil erheblichen Mängel könnten noch durch Kritikpunkte im rein beschreibenden Teil ergänzt werden. So wundert man sich, weshalb das arithmetische Mittel nur bei eingipfligen Häufigkeitsverteilungen *aussagekräftig* (wofür?) sein soll (Seite 31), und dass das geometrische Mittel ein *Lageparameter* sei. So wird an keiner Stelle thematisiert, dass sich ein Lageparameter von Daten $x_1, \ldots, x_n$ bei Verschiebung eines jeden x_j um den Wert a um diesen gleichen Wert mitverschiebt, und dass ein gemeinsames Kennzeichen der Streuparameter deren Invarianz gegenüber derartigen Verschiebungen ist.

Die Autoren schreiben zu Beginn ihres Vorwortes, dieses Buch sei dem didaktisch motivierten Zitat *Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind* [...], *Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer* [...] von H. Schupp verpflichtet. Schülerinnen und Schüler sollten in der Tat lernen, dass sich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Hinblick auf Anwendungen gegenseitig bedingen. Die Prämisse für die erste Hälfte des Zitats ist jedoch, dass der Mathematikunterricht ein Grundgerüst an fundierter, mathematisch exakter Wahrscheinlichkeitsrechnung bereitstellt. Angesichts der obigen Ausführungen kann das vorliegende Werk in dieser Hinsicht als „Leitfaden Stochastik" nicht empfohlen werden.

Eichler, Andreas & Vogel, Markus: *Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011, ISBN 978-3-83481402-9, EUR 19,95

Norbert Henze, Institut für Stochastik, Karlsruher Institut für Technologie, Kaiserstraße 89–93, 76313 Karlsruhe, Email: henze@kit.edu