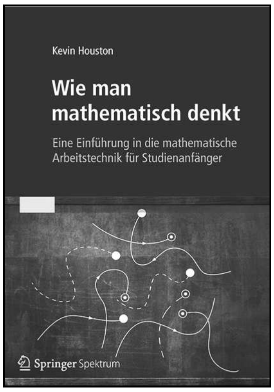
Kevin Houston: Wie man mathematisch denkt.

Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger

Rezensiert von Horst Hischer



Rezensionen sind zwar einer objektiven Sichtweise verpflichtet, gleichwohl sind sie nicht frei von subjektiven Einschätzungen und Vorlieben. Das gilt auch für die Rezension dieses Buchs, bei dem auf den ersten Blick der Titel verblüfft: Wie soll sich wohl das hier genannte Anliegen für den Adressatenkreis in einem Buch adäquat darstellen lassen? Und ferner: Gibt es eigentlich *das* mathematische Denken? Beim zweiten Blick macht auch das Inhaltsverzeichnis stutzig: Sollte es hier etwa um „Stricken ohne Wolle" gehen? Denn nur wenige Kapitel scheinen inhaltlich konkret(er) zu werden, und so scheint es abwegig zu sein, Studienanfängern „mathematische Arbeitstechniken" ohne konkreten inhaltlichen Bezug vermitteln zu wollen.

Die sorgfältige Lektüre der ersten beiden Kapitel bestätigte meinen Anfangsverdacht und führte bei mir dazu, dieses XII+323 Seiten umfassende Buch an die Seite zu legen. Nachdem ich das Buch zwei Wochen später eher zufällig und lustlos mittendrin aufschlug, blieb mein Blick erstaunt hängen, und fortan konnte ich mich bis zum Ende des Buchs nicht mehr lösen: Nach dem spontanen negativen Vorurteil erweist es sich nunmehr als ein Werk, das trotz einiger (wenn auch leicht behebbarer und per saldo meist marginal erscheinender) Mängel dem Adressatenkreis empfohlen sei und das durchaus auch methodisch befruchtend auf viele Vorlesungen und Seminare wirken mag. Im vorliegenden Rahmen seien aus Platzgründen nachfolgend nur einige wesentliche Mängel und Vorzüge exemplarisch herausgegriffen, beginnend mit einigen grundsätzlichen Anmerkungen.

Das Eingangszitat *„Frage: Wie viele Monate haben 28 Tage? Die Antwort des Mathematikers: Alle."* soll wohl zeigen, dass Mathematiker anders denken als „normale" Menschen – und so ist der Rezensent gespannt, zu erfahren, ob und wie es dem Autor gelingen mag, sein Anliegen zu realisieren. Die dann vom Autor gegebenen Antworten auf seine Frage *„Warum sollte jemand den Wunsch verspüren, Mathematiker zu werden?"* mit *„[...] mächtiges Werkzeug"* und *„Berufe, in denen Mathematik benutzt wird, sind oft gut bezahlt [...]"* führen zwar – aus meiner Sicht: leider – in eine utilitaristische Richtung, doch erfreulicherweise wird diese Einseitigkeit an späterer Stelle positiv aufgehoben. Der Autor will wohl mit diesem Hinweis die Adressaten nur dort abholen, wo sie aus seiner Sicht vermutlich stehen.

Die im Vorwort zu lesende Erklärung *„Ich will Ihnen beibringen, wie ein Mathematiker zu denken* [...]" passt zum englischen Originalbuchtitel „How to Think Like a Mathematician", aber gemäß Felix Klein, Jacques Hadamard und Leone Burton gibt es recht unterschiedliche Denkstile der Mathematiker (vgl. den Preprint Nr. 77 von Anselm Lambert in http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/). So kann es hier also nur darum gehen, dass der Autor (als Zahlentheoretiker) *seine* Denkweise bzw. *seinen* Denkstil vorstellt, wobei zugleich kritisch zu fragen ist, ob man so etwas „jemandem beibringen" kann bzw. ob sich das nicht jeder selber erarbeiten muss. Wertfrei sei an dieser Stelle ergänzt, dass der Autor seinen Adressaten diese von ihm propagierte mathematische Denkweise in einer starken Betonung verbalisierter mathematischer Formulierungen und einer damit verbundenen zurückhaltenden Verwendung formal-symbolischer Darstellungen vorstellt – und das vermutlich in voller methodischer Absicht.

Das Buch ist in sechs Teile gegliedert: *I Grundtechniken für Mathematik-Studierende* (Kapitel 1–5), *II Logisch Denken* (Kapitel 6–13), *III Definitionen, Sätze, Beweise* (Kapitel 14–19), *IV Beweistechniken* (Kapitel 20–26), *V Mathematik, die jeder gute Mathematiker braucht* (Kapitel 27–31) und *VI Abschließende Bemerkungen* (Kapitel 32–35), dazu noch drei nützliche Anhänge *(A: Das griechische Alphabet, B: Häufig benutzte Symbole und Bezeichnungen, C: Wie man beweist, dass ...).*

In den ersten beiden Teilen geht es um den technischen Umgang mit Mengen, Funktionen und logischen Grundstrukturen. Gleich im ersten Kapitel – *„Mengen und Funktionen"* – ist an einigen Stellen Einspruch zu erheben: So folgt auf die Mitteilung, dass *„Die Menge* [...] *das grundlegende Objekt der Mathematik"* sei und dass *„Die Mathematiker* [...] *eine Menge [nehmen] und* [...] *wunderbare Dinge damit]"* anstellen würden, unmittelbar „Definition 1.1", in der *„Menge"* als *„wohldefinierte Sammlung von Objekten"* tatsächlich „definiert" wird – ohne übrigens zu erörtern, was denn „wohldefiniert" bedeutet und wann denn etwas „nicht wohldefiniert" sei. So werden hier die Adressaten gleich zu Beginn nicht gut präpariert, was noch verstärkt wird, indem der Autor in einer Fußnote darauf hinweist, dass die *„korrekte mathematische Definition einer Menge"* wesentlich komplizierter sei. Dieser Lapsus ist jedoch leicht behebbar, indem „Definition" z. B. durch „Verabredung" und eine passende Anmerkung ersetzt wird. Sieht man von diesem bedauerlichen grundlegenden Fehler ab, so ist die gewählte „intuitive Vorgehensweise" inklusive der folgenden Beispiele allerdings sinnvoll.

Als *„grundlegendste Menge in der Mathematik"* wird die „leere Menge" als *„Menge ohne Elemente"* definiert, ohne zu begründen oder zu motivieren, warum es sinnvoll ist, eine solche einzuführen. Der Hinweis, dass *„doch tatsächlich* [...] *die leere Menge unverzichtbar für die Grundlagen der Mathematik"* sei, kann wohl kaum zu kritischem Denken und zum Fragen erziehen bzw. anleiten, wie es etwa der vierte gute „Ratschlag" auf S. XI fordert: *„Stellen Sie alles infrage – Seien Sie skeptisch gegenüber allen Ergebnissen, die Ihnen präsentiert werden."* Darf erwartet werden, dass die Adressaten das hier befolgen (können)? Und was sollen sie mit dem Hinweis anfangen, dass man mit Hilfe der leeren Menge *„eine Theorie des Zählens aufbauen"* kann, wenn das nirgendwo später aufgegriffen wird? Unvermittelt wird dann eine „Definition" für Mengengleichheit mittels *„Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben"* präsentiert („genau dann" fehlt hier noch). Zwar wird nicht erörtert, weshalb die Mengengleichheit überhaupt einer Definition bedarf, vor allem ist *diese* „Definition" nicht scharf, sondern eher intuitiv, denn was soll *„wenn sie dieselben Elemente haben"* bedeuten? Auch an den folgenden Beispielen wird das nicht geklärt, was aber möglich wäre. Gleichwohl erfährt diese Vorgehensweise in der Rückschau des gesamten Buchs ihren Sinn, wird doch später all dies vertiefend (inkl. „genau dann, wenn") aufgegriffen und auf diese Weise zu Beginn die Verständnisbarriere niedrig gehalten.

Anschließend wird *„endliche Menge"* als Menge, die *„aus endlich vielen Elementen besteht"* definiert. Hier wird natürlich der Teufel mit dem Beelzebub ausgetrieben, und in einem „normalen" Lehrbuch wäre eine solche Vorgehensweise verfehlt: Man würde eine derartige Formulierung vielleicht noch durchgehen lassen, wenn sie nicht in den Rang einer „Definition" gehoben würde. Vor allem braucht „endlich" doch den Kontrast zu „unendlich", um nicht inhaltsleer zu sein. Ferner: Die Elementanzahl einer endlichen Menge in derselben Definition mit „Kardinalität" zu bezeichnen, heißt mit Kanonen nach Spatzen schießen, denn der mit „Kardinalität" (oder „Mächtigkeit") bezeichnete Begriff entfaltet doch seine Bedeutung erst bei unendlichen Mengen. Auch die anschließende Bemerkung *„Wenn X unendlich viele Elemente hat, dann wird es schwierig, ihre Kardinalität zu definieren"* ist an dieser Stelle wohl kaum hilfreich. So wäre es in diesem Einführungskapitel sowohl redlich als auch ausreichend, nur naiv von „endlichen und unendlichen Mengen" zu sprechen. Immerhin wird auf Kapitel 30 verwiesen, wo dann tatsächlich im Zusammenhang mit Abzählbarkeit auf das Endliche und sogar auf verschiedene Arten des Unendlichseins eingegangen wird. So ist auch dieser Teil des ersten Kapitels erst in der Gesamtschau des Buchs zu rechtfertigen.

Die anschließende Behandlung von „Teilmenge" und „echte Teilmenge" ist als gelungen anzusehen, sowohl bezüglich der Definition als auch der Beispiele und der vertiefenden Betrachtungen. Zwar fragt man sich an dieser Stelle, warum der Autor zuvor die Definition der Mengengleichheit nicht analog zur Teilmengenbeziehung gewählt hat. Aber auch hier gilt, dass dieses an späterer Stelle des Buchs hinreichend ausführlich geschieht, so dass wiederum eine methodische Absicht vorliegen mag, in einer „spiraligen" Vorgehensweise anfangs behutsam vorzugehen. Erfreulich ist die Verwendung der Symbole $\subseteq$ bzw. $\subset$ für „Teilmenge von" bzw. „echte Teilmenge von" und die Begründung des Vorzugs dieser Symbolik gegenüber den in der Mathematik (leider!) häufig anzutreffenden Symbolen $\subset$ bzw. $\subsetneq$. Schön ist ferner die Erörterung von $\not\subset$ und von *„wenn $X \subseteq Y$, dann $|X| \leq |Y|$"*. Allerdings ist das Beispiel *„wenn $X \neq \emptyset$, dann ist $\emptyset \subset X$"* zwar richtig, aber wie sollen die Adressaten das an dieser Stelle aufgrund des Vorangegangen verstehen? Liegt hier vielleicht eine unausgesprochene methodische herausfordernde Absicht vor?

Es folgt eine sprachlich aufwendige „Definition" von „Funktion" (synonym „Abbildung") als „Zuordnung", dazu „Wert", „Definitionsmenge" (synonym „Definitionsbereich") und „Zielmenge". Die „Zielmenge" synonym auch „Bildbereich" zu nennen, mag angehen, aber „Wertebereich" mit „Zielmenge" zu identifizieren, ist nicht akzeptabel: „Mathematisches Denken" wird so nicht gefördert. Auch liegt ein innerer Widerspruch vor, wenn in einem späteren Beispiel eine Funktion f angegeben wird, bei der *„nicht jedes Element der Zielmenge ein Wert von f ist"*. Ergänzend soll eine Graphik Typisches solcher „Zuordnungen" visualisieren, und dazu findet man den verblüffenden Hinweis: *„Beachten Sie, dass jedem Element aus X eines in Y zugeordnet sein muss* [...]." Hier fehlt der wesentliche

Zusatz „genau“, insbesondere, wenn es doch darum gehen soll, wie man „mathematisch denkt“.

In einem anderen Beispiel werden Polynome als *„spezielle mathematische Objekte“* vorgestellt, die man als *„Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen“* kann, *„wenn wir $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ für $x \in \mathbb{R}$ definieren, wobei $a_0, \ldots, a_n$ feste reelle Zahlen sind“.* Das mag noch angehen, obgleich es unschön und formal „unsauber“ ist, das Polynom $f(x)$ (also hier den Funktionsterm!) als Funktion anzusehen. Jedoch wird dann in einem weiteren Beispiel die Feststellung getroffen: *„Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziert werden kann (beispielsweise, wenn es ein Polynom ist), dann ist die Ableitung, bezeichnet mit f', eine Funktion.“* Hier ist mehreres zu beanstanden: Zunächst kann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht „differenziert“ werden, sondern allenfalls f, denn f ist eine Funktion, während $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doch gerade besagt, dass f eine Funktion ist (und so wurde es zuvor auch definiert!). Weiterhin versteht man diese Darstellung nur, wenn bereits Grundkenntnisse der Analysis vorhanden sind, aber dann kann man doch gleich „falls f differenzierbar ist“ sagen. Ferner ist f' nicht die „Ableitung“, sondern die „Ableitungsfunktion“. Doch dann ist der gesamte Text eine Trivialität, der keinen Erkenntnisgewinn bringt, wie z. B. folgende knappe alternative Banalformulierung zeigen würde: „Ist f differenzierbar, so ist auch f' eine Funktion.“

Bei der Übungsaufgabe *„Bestimmen Sie den größten Definitionsbereich, für den $f(x) = x/(x^2 - 5x + 3)$ eine Funktion ist“* fehlt einerseits die Angabe einer Grundmenge, aus der man den „größten Definitionsbereich“ aussondern kann, und formal ist zu beanstanden, dass weder $f(x) = x/(x^2 - 5x + 3)$ noch $f(x)$ eine Funktion ist, sondern f – und dieses auch im Sinne der zuvor getroffenen Definition.

Beim recht offenen Auftrag, z. B. $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ anhand von Beispielen zu untersuchen, weiß zwar der Kenner, was dem Autor vorschwebt, nur scheint es angebracht zu sein, die Adressaten deutlicher auf die Spur zu setzen, u. a. dadurch, dass durch weitere mengenalgebraische Terme auch eine nicht vorliegende „Gleichheit“ mit einbezogen wird, etwa durch Vergleich mit $A \cup (B \cap C)$, verbunden mit der Frage, ob sich eine Vermutung ergäbe. Andererseits ist positiv hervorzuheben, dass all solche an dieser Stelle von mir vermisste und für nützlich gehaltene Aspekte in den folgenden Kapiteln eine große Rolle spielen. So handelt es sich wohl eher um individuelle Geschmacksfragen der Vorgehensweise, also um eingangs genannte „subjektive Aspekte“.

Dieses erste Kapitel endet wie alle weiteren sinnvoll mit einer „Zusammenfassung“, bei der man u. a. folgende Feststellung findet: *„Eine Funktion ordnet Elementen einer Menge Elemente einer anderen (oder derselben) Menge zu.“* Das stimmt zwar, kennzeichnet aber nur eine Relation, nicht aber eine Funktion, und damit wird dem Kennenlernen mathematischer Denkweisen ein Bärendienst erwiesen.

Im zweiten Kapitel – *„Mathematik lesen“* – betont der Autor zu Recht, dass das mathematische Denken auch das Lesen mathematischer Texte betrifft, welches sich vom Lesen manch anderer Fachtexte unterscheide; so sei etwa *„Querlesen* [. . .] *in der Mathematik* [. . .] *keine gute Methode“*, und es sei nützlich, *„verschiedene Aufbereitungen eines Themas“* und *„aktiv* [. . .] *mit Papier und Bleistift“* zu lesen. Andererseits widerspricht er sich im selben Kapitel mit dem Tipp *„Überfliegen Sie den Text“*, und seiner Empfehlung *„Lesen Sie erst die Aussagen – später die Beweise“* vermag ich nicht zu folgen, führt doch oft erst das Durchdringen eines Beweises zum Verständnis eines Satzes.

Die Übungsaufgaben und der Rückgriff auf Beispiele aus Kapitel 1 sind hingegen gut. Jedoch mag der Hinweis, dass man ein Thema nicht verstanden habe, wenn man eine Übungsaufgabe nicht lösen könne, bei den Adressaten zu Enttäuschungen führen, falls nämlich die Aufgaben nicht klug konzipiert und formuliert sind. Die Empfehlung, in Fachzeitschriften und wissenschaftlichen Magazinen zu lesen, ist eingeschränkt gut, denn nur wenige Fachzeitschriften sind für Anfänger geeignet. Auch etliche weitere (z. T. in Aufgaben gekleidete) Hinweise sind nützlich, jedoch sind die Empfehlungen *„Finden Sie drei Bücher über dasselbe Thema. Suchen Sie sich einen mathematischen Begriff, der in allen drei Büchern vorkommt* [. . .]*“* und *„Welches ist* [. . .] *Ihre Lieblingsdefinition?“* nur bedingt gut, wie man an der oben erwähnten Definition von „Menge“ sieht.

Die weiteren drei Kapitel des ersten Teils sind, abgesehen von Kleinigkeiten, im Wesentlichen erfreulich. Sie betreffen das *Schreiben von Mathematik* und das *Problemlösen*, wobei das Letztgenannte mit Bezug auf Pólyas Vierpunkteplan vielfältige vorzügliche Beispielprobleme und Übungsaufgaben enthält, die elementar zu verstehen sind, aber dennoch für Anfänger nicht auf Anhieb lösbar sind, weil noch keine Theorien dafür zur Verfügung stehen (deren Entwicklung oder Findung aber motiviert wird).

Im zweiten Teil werden ausführlich Grundlagen logischer Strukturen unter Einbezug von Elementen der Aussagenlogik entwickelt, wobei auf die Verwendung der üblichen aussagenlogischen Symbole zugunsten einer verbalen Fassung verzichtet wird. Obwohl der Autor betont, dass es *„überraschend schwierig“* sei, *„genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist“*, stellt er dennoch zu Beginn mit *„Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist – aber nicht beides"* eine „Definition" vor, die aber (wie bei Mengen, s. o.) nur den Rang einer „Verabredung" haben kann. Erfreulicherweise wird die kulturelle Problematik der doppelten Verneinung gestreift, und die logischen Verknüpfungen „und" und „oder" werden über Wahrheitstabellen definiert, wobei zwar die alltagssprachliche Doppeldeutigkeit des „oder" erwähnt wird, jedoch merkwürdigerweise das ausschließende „oder" aussagenlogisch nicht betrachtet wird. Es findet (wie meist in der Literatur) keine Unterscheidung zwischen Subjunktion und Implikation statt (analog bei der Äquivalenz), und letztere wird ebenfalls über Wahrheitstafeln erklärt, wobei „$-1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$" als Begründung für die Wahrheit im Fall (f, w) gekünstelt wirkt und den Anfänger wohl nicht zu überzeugen vermag. Davon abgesehen ist die Untersuchung von Feinheiten der Implikation hervorhebenswert, und hierzu gehört auch die ausführliche Erörterung von *Umkehrung*, *Inversion*, *Konversion* und *Kontraposition* in Bezug auf eine *Implikation*. Interessant und lobenswert ist auch die getroffene Unterscheidung von *Gegenbeispielen* (zur Falsifizierung einer Vermutung im Sinne von Popper) und *Nichtbeispielen* (für eine Definition), wobei der Autor Letztere an späterer Stelle auch für Theoreme heranzieht.

Aussageformen werden kurz angesprochen, wobei dies eigentlich erst im Zusammenhang mit Quantoren und Variablenbindung sinnvoll wäre. Während Letztere leider nicht thematisiert wird, werden All- und Existenzquantor in einem eigenen Kapitel behandelt, und zwar unter Verwendung der Symbole $\forall$ und $\exists$ (anstelle von $\bigwedge$ und $\bigvee$ in Konsequenz zur Nichtverwendung der Logiksymbole $\wedge$ und $\vee$). Inhaltlich werden diese Quantorsymbole an Beispielen verständlich entwickelt, wobei nach Einführung von $\forall x \in M$ ohne Erläuterung unvermittelt auch $\forall x$ verwendet wird. Bezüglich der Vertauschbarkeit bzw. Nichtvertauschbarkeit mangelt es an beeindruckenden und überzeugenden Beispielen.

Die „Komplexität" von Aussagen mit mehreren Quantoren wird erörtert, insbesondere, *„wenn sich $\forall$ und $\exists$ abwechseln"*. So wird wohl der Satz *„Beispielsweise wird $\forall x\ \forall z\ \exists y : P(x,y,z)$ im Allgemeinen einfacher sein als $\forall x\ \exists z\ \forall y : P(x,y,z)$"* Anfänger kaum erreichen können, auch dann wohl nicht, wenn folgt: *„Wenn wir jedoch $\forall x\ \forall y$ durch $\forall x, y$ ersetzen, erhalten wir ein gutes Maß für die Komplexität, indem wir einfach die Quantoren zählen."* Hier entsteht der Verdacht, dass der Autor die Quantorsymbole nur als umgangssprachliche Kürzel ohne logische Syntax verwendet, denn das Ersetzen von $\forall x\ \forall y$ durch $\forall x, y$ bedarf immerhin einer Definition. Die anschließenden Beispiele *„$\forall x\ \exists y$, so dass $y > x$ gilt"* und *„$\exists y$, so dass $\forall x : (y > x)$"* bestätigen diesen Verdacht, doch dann sollte man lieber gleich ganz verbal bleiben, denn korrekt wäre $\forall x\ \exists y : (y > x)$ bzw. $\exists y\ \forall x : (y > x)$ (ggf. ohne Klammern, besser noch mit Mengenangaben). Aber die vermutete Deutung von $\forall$ *bzw.* $\exists$ nur als Abkürzung der sprachlichen Floskeln „für alle" bzw. „es gibt" (ver)führt zu der oben kritisierten Notation, was hingegen bei der Verwendung der Quantorsymbole $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ nicht nahe liegt. Auch in den nachfolgenden Beispielen finden sich diese formalen Mängel, so etwa *„$\exists y \in \mathbb{Z}$, so dass $\forall x \in \mathbb{Z} : y > x$ gilt"* statt: $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : y > x$. Die *„Negation von Aussagen mit Quantoren"* wird argumentativ plausibel anhand von Beispielen entwickelt. Die abschließenden Übungsaufgaben sind vielfältig und hilfreich, wenn man von dem auch hier vorhandenen formalen Mangel der Verwendung der Quantorsymbole absieht.

Diese relativ ausführliche Betrachtung der ersten beiden Teile, die rund ein Drittel des Buchs ausmachen, zeigte nicht nur Vorzüge, sondern auch Mängel, die bei einer späteren Überarbeitung jedoch leicht behebbar sind. Die restlichen zwei Drittel des Buchs erfreuen den Rezensenten trotz weniger Fehler rundum und seien zusammenfassend gewürdigt, zunächst etwas ausführlicher:

Zu Beginn von Teil III erläutert der Autor, dass der Text eines mathematischen Fachbuchs in *„kleine Informationsbrocken"* aufgeteilt sei, die *Satz* (bzw. *Theorem*), *Proposition*, *Lemma*, *Korollar*, *Beweis*, *Definition*, *Vermutung* und *Axiom* heißen würden und dass *„[wir] in den folgenden Kapiteln* [...] *sehen [werden], wie man an sie herangeht."* Damit wird programmatisch der Rest des Buchs beschrieben, das sich dann anhand vieler konkreter sehr schöner anregender mathematischer Beispiele präsentiert, auch wenn an dieser Stelle für die Adressaten wohl (noch) nicht deutlich wird, was „Lemma", „Proposition" und „Axiom" im mathematischen Kontext bedeuten. Immerhin erwähnt der Autor, dass manche dieser Termini von verschiedenen Autoren durchaus unterschiedlich gebraucht würden.

Im Kapitel 15, *„Wie man eine Definition liest"*, werden acht elementare Beispiele für Definitionen vorgestellt, die später analysiert werden, z. B. *„Eine ganze Zahl wird quadrisch genannt, wenn ihre Ziffern gleich den letzten Ziffern ihres Quadrats sind"*. Zwar fehlt hier noch das „genau dann, wenn", was aber auf der folgenden Seite in Gestalt des „dann und nur dann" ergänzt wird. All diese Beispiele regen spontan zum Nachdenken und Ausprobieren an.

Sehr gut ist der Hinweis, dass man sich bei jeder Definition fragen müsse, *„ob der definierte Gegenstand überhaupt existiert"*, so dass also in anderer Formulierung die betreffende Definition nicht „inhaltsleer" ist. Und an späterer Stelle wird auch zu Recht hervorgehoben, dass man stets nach (vom Autor so genannten) *„Nichtbeispielen"* für eine Definition Ausschau halten solle, wobei der ergänzende Hinweis wünschenswert wäre, dass erst durch die Entdeckung mindestens eines Nichtbeispiels eine „Definition" als „Abgrenzung" vorliegt. Schön sind dann die Ausführungen über *Standardbeispiele*, *triviale Beispiele* und *Extrembeispiele* und die Aufforderung, solche zu finden. Die abschließenden Übungsaufgaben sind sehr anregend und von recht unterschiedlichem Niveau. Bei der letzten im Prinzip sehr schönen Aufgabe dieses Kapitels hat sich aber leider ein (behebbarer) Fehler eingeschlichen, den aufmerksame Leser hoffentlich bemerken: Die übliche Produktdarstellung von $n!$ ist bekannt, und alternativ sei nun $n!$ *„für nicht-negative Zahlen"* auch *„als die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen von* 1 *bis* n *anzuordnen (ohne eine Zahl zu wiederholen)"* definiert. Zu zeigen ist dann, *„dass die beiden unterschiedlichen Definitionen für* $n \geq 1$ *übereinstimmen"* (was leicht ist) *„und dass mit der neuen Definition auch* $0! = 1$ *gilt"* (was unter den Voraussetzungen nicht möglich ist).

Kapitel 16, *„Wie man einen Satz liest"*, ist eine sehr schöne Darstellung bezüglich der Analyse und Interpretation von Theoremen, insbesondere auch in Verbindung mit guten Beispielen. Die Bedeutung der „Stärke" von Voraussetzungen und auch der von Schlussfolgerungen wird erörtert, auch in Verbindung mit Verallgemeinerungen. Es wird deutlich, dass ein als Implikation formulierter Satz nicht automatisch umkehrbar ist, und die Adressaten werden aufgerufen, auch nach „Nichtbeispielen" Ausschau zu halten (die also die Voraussetzungen nicht erfüllen). Die abschließenden Übungsaufgaben sind geschickt zusammengestellt und zwingen erfreulicherweise zum Rückgriff auf vorherige Kapitel.

Kapitel 17, *„Beweise"*, bietet eine knappe, aber schöne Darstellung zur Bedeutung von Beweisen. Erfreulich ist auch der Hinweis auf den Unterschied zwischen einem in der Literatur dargestellten eleganten Beweis und dem meist mühsamen und publizierten Weg zu dessen Findung. Allerdings vermag ich den abgrenzenden Hinweis auf die Philosophie nicht zu goutieren: *„Philosophen* [...] *debattieren immer noch über dieselben Fragen, mit denen sich schon die alten Griechen abmühten. Nicht so in der Mathematik; unser Fachgebiet hat sich seitdem ein großes Stück weiterentwickelt."*

Bei Kapitel 18, *„Wie man einen Beweis liest"*, sei zunächst hervorgehoben, dass der Autor bei der verbalen Formulierung von Sätzen und Beweisen sprachlich vorbildlich stets „Es sei ..." anstelle (der leider üblichen Floskel) „Sei ..." schreibt. Das gesamte Kapitel ist vorzüglich, so u. a. die Analyse des Satzes: *„Es seien* m *und* n *natürliche Zahlen. Das Produkt* $m \cdot n$ *ist dann und nur dann ungerade, wenn* m *und* n *ungerade sind."* Hierzu zerlegt der Autor diesen Satz verbal in die beiden Bestandteile „[...] *dann ungerade, wenn* [...]" und „[...] *nur dann ungerade, wenn* [...]", die es in sich haben und zur Reflexion der Sprache herausfordern. Wichtig ist auch der Hinweis darauf, dass in Beweisführungen oft unausgesprochen die Kontraposition oder andere Sätze oder bestimmte Definitionen verwendet werden, was die Aufmerksamkeit der Leser herausfordert. Auch die weiteren Hinweise sind hilfreich, so auch die exemplarisch unterlegte Anregung, Beweisteile ggf. zu visualisieren.

Das letzte Kapitel dieses Teils III, *„Eine Analyse des Satzes von Pythagoras"*, bezieht sich exemplarisch auf die zuvor entfalteten grundsätzlichen Betrachtungen und ist aufschlussreich und lehrreich für die „Anfänger" (und gewiss nicht nur für diese). Schön sind auch die Analyse der Umkehrung des Satzes und die Anwendung auf diverse Beispiele.

Teil IV widmet sich ausführlich und mit Anwendung auf Beispiele grundlegenden Beweistechniken wie *Direkter Beweis*, *Beweis durch Fallunterscheidungen*, *Widerspruchsbeweis*, *Vollständige Induktion* und *Beweis durch Kontraposition*, und er kann als sehr gelungen gelten, wenn auch Kleinigkeiten anzumerken sind z. B.: So wird der Name „Dreiecksungleichung" über die komplexen Zahlen begründet, was aber kaum hilfreich ist, weil diese nicht behandelt werden. Im Satz *„Durch drei Punkte* [...] *in der Ebene kann entweder eine Gerade oder ein Kreis gezeichnet werden"* muss es entweder „drei verschiedene Punkte" heißen, oder das „entweder" muss entfallen (wobei die Adressaten das vermutlich gar nicht merken, was aber wichtig wäre). Und auch wenn klar ist, was der Autor meint, ist die Formulierung *„für alle* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$*"* nicht vorbildlich.

Auch Teil V ist gelungen, und hier fließen alle vorherigen Entwicklungen anhand konkreter Beispiele zusammen (was dem Inhaltsverzeichnis nicht in Gänze zu entnehmen ist), wobei natürlich die „Heimatdisziplin" des Autors (nämlich Zahlentheorie) erkennbar ist, was aber durchaus von Vorteil ist, weil sich hier viele Fragestellungen elementar formulieren (wenn auch nicht leicht lösen) lassen, so dass Zahlentheorie stets ein dankbares Einstiegsthema zum Kennenlernen „mathematischen Denkens" ist, wie es die Klassiker „Von Zahlen und Figuren" von Rademacher & Toeplitz und „Proben mathematischer Forschung" von Hasse zeigen. So geht es im Kapitel 27, *„Teiler"*, um Teilbarkeit, Primzahlen und den ggT. Hervorhebenswert ist hier die exemplarische Entwicklung des Beweises von Satz 27.5, der lautet: *„Wenn* $a \mid b$ *und* $a \mid c$ *gilt, dann gilt auch* $a \mid (mb + nc)$ *für* *alle ganzen Zahlen m und n."* Zunächst greift der Autor ausführlich auf Kapitel 16, *„Wie man einen Satz liest"*, zurück, führt Plausibilitätsbetrachtungen durch, untersucht die trivialen Fälle, betrachtet Beispiele und fordert die Adressaten auf, *„andere Methoden aus Kapitel 16"* anzuwenden und zu beobachten, was man dabei entdeckt, womit das „Umfeld" des Satzes vor einem Beweis ausgelotet wird. Wichtig ist dann folgende Ankündigung:

„Wir beweisen jetzt den Satz. Unsere Präsentation entspricht dabei zunächst nicht der Art, wie ein normales Lehrbuch den Beweis darstellen würde. Ich will Ihnen zeigen, wie ein Beweis entsteht, mit allen Fehlern und Sackgassen. Anschließend werde ich dann alles so zusammenfassen, wie es in einem Buch stehen würde." Das ist ein Weg, wie man sich ihn öfters wünschen würde und wie er im Mathematikstudium eigentlich unverzichtbar ist – insbesondere im Lehramtsstudium.

Es folgen die Kapitel 28, *„Der euklidische Algorithmus"*, und Kapitel 29, *„Modulare Arithmetik"*, jeweils mit schönen Beispielen und anspruchsvollen Übungsaufgaben, die Appetit auf Vertiefung in und Beschäftigung mit Zahlentheorie machen. Kapitel 30, *„Injektiv, surjektiv, bijektiv – und ein wenig zur Unendlichkeit"*, dient der Beschreibung und Erfassung von Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit und damit der Erkenntnis verschiedener Stufen des Unendlichseins. Kapitel 31 behandelt schließlich Äquivalenzrelationen und damit zusammenhängend Partitionen. Der Einführungstext ist sehr informativ, die knappe Einführung in „Relationen" ist aber unbefriedigend und ist wohl einer Umfangsbeschränkung geschuldet. Irritierend ist hierbei, dass $(x, y) \in R$ zwar mit $x \sim y$ notiert wird, der Autor aber darauf hinweist, dass R *„nicht das* $\sim$*"* sei. Die Behandlung von „Äquivalenzrelationen" ist gut inkl. der Übungsaufgaben, und die knappe Behandlung von „Äquivalenzklassen" ist akzeptabel (bis auf ein Beispiel betreffend „Winkel", weil dieser nicht eindeutig ist). Der Einleitungstext zu „Partitionen" ist verständlich und motivierend, beim Beweis des Satzes über den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen liegt ein formaler Fehler vor:

Es soll $\bigcup_{x\in X}[x] = X$ bewiesen werden. Der Beweis beginnt dann konkret mit *„Es sei* $x \in X$*"*, gefolgt von *„Wegen* $x \sim x$ *folgt* $x \in [x]$*, also* $x \in \bigcup_{x\in X}[x]$*"*.

Der letzte Term ist jedoch formal falsch, da das x vor $\in$ eine freie Variable ist, die beiden x danach sind jedoch gebundene Variablen. Hier rächt sich, dass dieser Aspekt von freien und gebundenen Variablen zuvor im Zusammenhang mit Aussageformen und Quantoren nicht erörtert wurde. Zwar ist für den Kenner klar, was gemeint ist, jedoch ist das für Anfänger nicht vorbildlich, und in Examensarbeiten müsste das gerügt werden. Unabhängig davon ist aber der Rest des Beweises einwandfrei.

Teil VI ist ohne jede Beanstandung, hier liegt eine vorzügliche Wiederholung der in den vorangehenden Kapiteln entwickelten Strategien und Methoden vor. Die Übungsaufgaben sind sehr anspruchsvoll und setzen keine geschlossene Theorie voraus. So bieten sie ein ausgezeichnetes Terrain für problemorientiertes, forschendes, offenes Vorgehen: Mathematik als Experimentierfeld! Und insofern wird das Buch insgesamt seinem Anspruch gerecht.

Leider spielt Geometrie in diesem Buch im Wesentlichen keine Rolle. Schön wäre es auch, wenn die Lösungen der Übungsaufgaben an geeigneter Stelle veröffentlicht würden.

Kevin Houston: *Wie man mathematisch denkt. Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger.* Berlin / Heidelberg: Springer Spektrum, 2012. ISBN 978-3-82742997-1. (Aus dem Englischen übersetzt von Robert Girgensohn.)

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de