

## Herbert Möller: Elementaranalyse

Rezensioniert von Jürgen Maaß

Der Analysisunterricht in den Schulen stützt sich in der Regel auf die auch an den Universitäten verwendeten Basisdefinitionen und Sätze. Wer mit dem Unendlichen formal korrekt umgehen und dabei die ganze Fülle der definierbaren Funktionen zulassen will, muss mit großer Sorgfalt vorgehen. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden von verschiedenen Mathematikern Funktionen entdeckt, die von ihren Kollegen ‚pathologisch‘ genannt wurden. So veröffentlichte P. du Bois-Reymond 1875 ein Beispiel für eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion. Solche Funktionen sind in der Regel nicht Gegenstand des Analysisunterrichts in der Schule; dennoch sind die verwendeten Definitionen und Beweismethoden so angelegt, dass sie auch den Anforderungen gerecht werden, die solche Funktionen an sie stellen. Selbstverständlich ist es für Schülerinnen und Schüler schwer einzusehen oder gar wirklich zu verstehen, weshalb Definitionen und Beweise so umständlich sind, wenn sie die eigentlichen Ursachen dafür nicht kennenlernen. Um dieses Problem zu meiden, wird in der Schule bisweilen die Analysis weitgehend auf das Lösen bestimmter Aufgabentypen wie Kurvendiskussion oder Extremwertaufgabe reduziert. Infolgedessen beklagen sich an vielen Universitäten die Kolleginnen und Kollegen zu Recht über mangelnde Analysiskenntnisse der Abiturientinnen und Abiturienten.

Herbert Möller arbeitet im Anschluss an einen 1973 von Hermann Karcher veröffentlichten Artikel „Analysis auf der Schule“ an einem anderen Weg zum Umgang mit Analysis in der Schule. Er hat die Analysis so elementarisiert, dass alle zentralen Definitionen und Beweise auf Oberstufenniveau verständlich sind (jedenfalls deutlich verständlicher als die bisher üblichen) und andererseits die zentralen Eigenschaften reeller Zahlen, Folgen und Funktionen für Schülerinnen und Schüler verstehbar werden. Wie geht das? Im Detail lässt sich das nun dank Internet einfach und kostenlos in der Elementaranalyse nachlesen, deren Hauptteil seit 1981 schon durch drei Skripten weithin bekannt geworden ist. Die mathematische Idee kann stark vereinfacht so charakterisiert werden, dass Möller von verschärften Grundbegriffen ausgeht, etwa der „Lipschitz-Stetigkeit“, um die „pathologischen“ Fälle zu vermeiden. In der Einleitung schreibt der Autor dazu: „Bezeichnen-

derweise wird der Begriff der globalen Lipschitz-Stetigkeit, der mit der elementaren Stetigkeit identisch ist, in der klassischen Analysis als ein Arbeitsbegriff zusätzlich zu den durch Allgemeinheit ausgezeichneten Stetigkeitsbegriffen eingeführt. Seine wichtigsten Anwendungsgebiete sind Existenzaussagen und die Konvergenzsicherung bei der Methode der sukzessiven Approximation („Picard-Iteration“) zur Lösung von Differentialgleichungssystemen und bei Iterationsverfahren, die auf Fixpunktsätzen beruhen. Beide Methoden werden in der Elementaranalyse unmittelbar genutzt und zwar im ersten Kapitel bei der Herleitung der Polynomapproximation für die Exponentialfunktion (Seite 84) sowie im fünften Kapitel bei dem Fixpunktsatz (Seite 236) und dem Quadratkonvergenzsatz (Seite 241). Daraus ergibt sich, dass die elementare Stetigkeit auch in der Praxis genügend leistungsfähig ist.“ (Seite 5 f.)

Einige Lehrer haben sich von Herbert Möller und der Idee der vereinfachten bzw. elementaren Analysis für die Schule anstecken lassen und selbst nach diesem Konzept unterrichtet. Ihre Ergebnisse waren beeindruckend; aber wie immer in solchen Selbstversuchen lässt sich nicht feststellen, ob das Geheimnis ihres Erfolges die andere Analysiskonzeption oder das besondere Engagement und Können der Lehrenden war. Echte empirische Studien auf breiter Basis stehen noch aus. Wenn dieser Hinweis auf den Hauptteil der Elementaranalyse einen Anstoß zu solchen Studien liefert, kann Herbert Möller sein Lebenswerk vielleicht noch mit einer auf empirische Forschungen gestützten Vollversion krönen.

Herbert Möller: Elementaranalyse. Hauptteil. 297 Seiten mit 86  $\LaTeX$ -Figuren. Kompass-Buch. Eigenverlag: <http://www.math.uni-muenster.de/u/mollerh/data/ELAn5.pdf> (und ELAn5Print.pdf zum Ausdrucken sowie ELAn5Cut.pdf für E-Reader und Tablets)

Juergen Maaß, Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich, Email: [Juergen.Maasz@jku.at](mailto:Juergen.Maasz@jku.at)