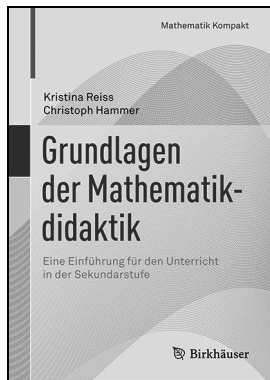


Kristina Reiss und Christoph Hammer: Grundlagen der Mathematikdidaktik

Rezensiert von David Kolloosche



Mit *Grundlagen der Mathematikdidaktik* legen Kristina Reiss, welche die Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität München vertritt, und Christoph Hammer, einem Mitarbeiter in der Didaktik der Mathematik an der Universität München, in diesem

Jahr eine neue „Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe“ vor. Da der Didaktik der Mathematik bedauerlicherweise nur wenige aktuelle Einführungen in ihre Disziplin zur Verfügung stehen, ist diese Veröffentlichung erfreulich und die für sie aufgebrachte Arbeit dankenswert. Zugleich steht ein Buch, welches Grundlagen legen und eine Einführung bieten soll, ganz besonders im Fokus der kritischen Begutachtung, zu welcher diese Rezension einen Beitrag leisten soll.

Zum Aufbau und Anlass des Buchs

Auf 132 Textseiten widmen sich Reiss & Hammer einer breiten Auswahl mathematikdidaktischer Themen. Ihr Werk umfasst folgende Kapitel:

1. Ziele des Mathematikunterrichts
2. Mathematik unterrichten
3. Die Entwicklung mathematischen Denkens
4. Individuelle Voraussetzungen des Lernens im schulischen Kontext
5. Grundmuster des Arbeitens in der Mathematik
6. Didaktische Prinzipien
7. Bildungsstandards und Kompetenzen
8. Aufgaben im Mathematikunterricht
9. Fehler und Fehlerdiagnose
10. Planung von Mathematikunterricht

Herausgegeben wird das Buch in der Reihe „Mathematik Kompakt“ des Birkhäuser Verlags. Die Herausgeber der Reihe erklären im Sammeltitel, dass die Reihentitel „als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende gedacht“ seien und „sich an der möglichen Stofffülle einer Vorlesung von zwei Semesterwochenstunden orientieren“.

Die Autoren präsentieren im Vorwort „ein kompaktes Buch, das entsprechend auf sehr begrenztem Raum versucht, wesentliche Themen der Mathematikdidaktik anzusprechen“. Sie wollen „grundlegende Ideen und Forschungsergebnisse der Disziplin beschreiben und sie an Beispielen aus der Mathematik der Sekundarstufe illustrieren“. Dabei erklären die Autoren ihre „besondere Nähe zur Pädagogik und Pädagogischen Psychologie“ und wollen darunter „keine Geringschätzung anderer Bezüge oder gar Bezugsdisziplinen“ verstanden wissen, sondern sehen „eine Auswahl des Wissens“ als Notwendigkeit einer jeden „Darstellung der Mathematikdidaktik“. Die Lektüre ihres Buchs und „ein umfangreiches Literaturverzeichnis“ sollen die Leser ermuntern, „ihren eigenen Interessen entsprechend die Beschäftigung mit den Themen zu erweitern und zu vertiefen“.

Kriterien der folgenden Bewertung

Natürlich obliegt es jedem Autor selbst, ein Buch nach seinen Wünschen zu schreiben, seinen eigenen Stil zu verfolgen, seinen eigenen roten Faden zu spinnen und dabei einige Inhalte hervorzuheben, andere in einem neuen Licht zu interpretieren und wieder andere ganz auszulassen. Reiss & Hammer explizieren die Ausrichtung ihres Buchs bereits im Vorwort.

Gleichwohl scheint es mir nicht zielführend zu sein, die vorgelegten *Grundlagen* einzig und allein am selbsterklärten Anspruch der Autoren zu messen und nach Konsistenz und Inkonsistenz von Anspruch und Geleistetem zu durchforsten. Immerhin handelt es sich bei einem Einführungsbuch für viele Studierende um den wohl ersten literarischen Kontakt mit der Mathematikdidaktik. Als Dozierender stellt sich jenseits der Konsistenz der vorlegten Grundlagen daher die noch dringlichere Frage, ob die Autoren in einer erstrebenswerten Weise in die Mathematikdidaktik einführen. Was erstrebenswert ist und was nicht, ist nun aber eine sehr subjektive Frage. Indem ich an dieser Stelle die der folgenden Kritik zugrundeliegenden Kriterien offenlege, möchte ich dem Leser die Möglichkeit geben, diese Kriterien zu bewerten und die folgende Rezension im Lichte dieser Gewichtung zu lesen. Meines Erachtens sollte eine gelungene Einführung die Mathematikdidaktik

- einen repräsentativen Überblick über Mathematikdidaktik ermöglichen und bei notwendigen Aussparungen auf das Übergangene zumindest hinweisen,
- für die zentralen mathematikdidaktischen Fragen Interesse und Problembewusstsein wecken sowie
- trotz aller Vereinfachung und Platzmangel der Wissenschaftlichkeit mathematikdidaktischer Erkenntnis verpflichtet bleiben,
- die Intentionen und Gedanken rezipierter Beiträge etwa redlich wiedergeben und in ihren Sinnzusammenhang einordnen.

Eine Bewertung nach diesen Kriterien kann an dieser Stelle freilich nicht das gesamte Werk in den Fokus rücken; stattdessen wird versucht, wiederkehrende Unstimmigkeiten zu benennen und an ausgewählten Textstellen zu verdeutlichen.

Thematische Auswahl

Die pädagogisch-psychologische Ausrichtung ihrer Themenwahl hatten Reiss & Hammer bereits im Vorwort angekündigt; sie überrascht folglich nicht. Wissenschaftstheoretische, mathematikhistorische und unterrichtsoziologische Aspekte anzuschneiden oder wenigstens in einem Verweis zu benennen, hätte allerdings an vielen Stellen zu einem umfassenderen Überblick und Problembewusstsein beitragen können. Dazu einige Beispiele:

- Abgesehen von den diskutierten ‚Grundmustern des Arbeitens in der Mathematik‘ (Kap. V) geht diese Einführung nicht auf die Frage ein, was überhaupt der Gegenstand des Mathematikunterrichts sei. Dabei können philosophische, historische und soziologische Aspekte der Mathematik das Verständnis der Mathematik und mathematikdidaktischer Probleme bedeutsam steigern.
- Beim Modellierungskreislauf auf S. 60 könnte sich die Frage aufdrängen, welchen Sinn es hat, die Mathematik als etwas der Welt gegenüberstehendes ‚Außerweltliches‘ darzustellen.
- An anderer Stelle wird die in der Mathematikdidaktik wohlgepflegte Wertschätzung des Beweisens in einem dogmatischen Schülerzitat zugespitzt, dieses aber nicht weiter philosophisch, historisch oder wissenschaftstheoretisch diskutiert: „Wenn man die vorgegebene Figur zeichnet, dann sieht man meistens sofort,

dass die Behauptung wahr oder falsch ist, doch das zählt leider nicht. Also muss das Ganze bewiesen werden“ (S. 49). Wieso zählt das intuitive Sehen nicht? Ist das bei den pythagoreischen figurierten Zahlen nicht noch anders? Wer entscheidet überhaupt, was zählt? Und was bedeutet es dann, „das Ganze“ zu beweisen?

- Schließlich ist es zumindest bedauerlich, dass soziologisch inspirierte Beiträge zur Mathematikdidaktik nicht berücksichtigt wurden, obwohl soziologische Betrachtungen des Mathematiklernens in den letzten 20 Jahren so sehr an Erklärungskraft gewonnen haben, dass zuweilen gar von einem *social turn* der Mathematikdidaktik gesprochen wird.¹ Beispielsweise im Kapitel zu den ‚individuellen Voraussetzungen des Mathematiklernens‘ hätte die Aufmerksamkeit auch auf die auf Basil Bernstein aufbauende Forschung zur schichtspezifischen Situiertheit des Mathematiklernens gerichtet werden können, hat diese doch einen entscheidenden Einfluss darauf, wie Mathematik und insbesondere Mathematikaufgaben von welchen Schülern verstanden oder nicht verstanden werden.²

Wissenschaftliche Redlichkeit

Wenn eine Einführung in die Mathematikdidaktik Zeugnis der Wissenschaftlichkeit der Disziplin ablegen und sogleich den Beginn einer Kultivierung einer wissenschaftlich redlichen Arbeitshaltung markieren soll, kann man von ihren Autoren erwarten, dass sie nachvollziehbar und überzeugend argumentieren sowie herangezogene Quellen, redlich rezipieren, deren Herkunft reflektieren und sie in die jeweilige Diskussion einordnen. Zum einen zeigen sich Schwierigkeiten bezüglich der Argumentation an den folgenden Stellen:

- Auf S. 6 wird argumentiert, dass „ein allgemeinbildender Mathematikunterricht sicherlich die subjektiven Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler ernst nehmen sollte“, weil Hans-Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept eine ‚individuelle Komponente‘ vorsehe. Ist das Gebot, die Schüler ernst zu nehmen, tatsächlich ein Desiderat aus Heymanns Bildungstheorie oder doch eher ein davon unabhängiger, ethischer Grundsatz?
- Auf S. 101 schreiben die Autoren: „Mathematik begegnet uns täglich und überall. Es ist daher ein wesentliches Ziel des Unterrichts, die

¹ Vgl. Lerman, Stephen: „The Social Turn in Mathematics Education Research“ in Boaler, Jo (Hg.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Ablex: Westport, CT, 2000.

² Vgl. Gellert, Uwe & Michael Serlt (Hg.) *Zur Soziologie des Unterrichts. Arbeiten mit Basil Bernsteins Theorie des pädagogischen Diskurses*. Beltz: Weinheim, 2012.

Alltagstauglichkeit der Mathematik zu zeigen“. Doch wozu sollte die Alltagstauglichkeit der Mathematik noch gezeigt werden, wenn sie uns doch täglich und überall begegnet?

Zum anderen werden die herangezogenen Quellen oft nicht in ihrer Gesamtheit wertgeschätzt, redlich rezipiert und in die jeweilige Diskussion eingeordnet. Stattdessen werden die unterschiedlichen Perspektiven einzelner Denker verschwiegen, ihre Worte und Ideen aus dem Zusammenhang gerissen und zum Untermauern der Ausführungen der Autoren genutzt ohne dass eine ernsthafte Auseinandersetzung oder Wertschätzung dieser Denker erkennbar wird. Beispielsweise werden auf S. 52 völlig unvermittelt die US-amerikanischen *Principles and Standards for School Mathematics* herangezogen, ohne dass diese vorgestellt, im Weiteren noch diskutiert, im Diskurs verortet oder weiter genutzt würden. Auf S. 65 leitet L. E. J. Brouwers Satz, die Mathematik sei mehr ein Tun als eine Lehre, ein lernpsychologisches Kapitel ein, wenngleich er von Brouwer offensichtlich nicht lernpsychologisch, sondern epistemologisch im Sinne der konstruktiven Mathematik gemeint war. Noch kurioser steht es um ein angeblich von d'Alembert stammendes Zitat, welches das Kapitel zur ‚Entwicklung mathematischen Denkens‘ einleitet (S. 27): „Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.“ Dieses Zitat taucht in der Literatur offenbar nur auf, um Präsentationen und Kapitelüberschriften zu schmücken; nachweisen lässt es sich jedoch weder im Deutschen noch im Französischen. In der Tat mutet es seltsam an, dass ein Aufklärer die Mathematik nicht verstehen soll als Weg von der Finsternis ins Licht, sondern als Werkzeug, um den Menschen in der Finsternis zu trösten und zu unterhalten.

Doch die Verwerfungen im Umgang mit den herangezogenen Quellen greifen tiefer und betreffen auch genuin mathematikdidaktische Beiträge. Exemplarisch betrachte man den Umgang mit dem Konzept des Dialogischen Lernens von Urs Ruf und Peter Gallin, einem zweifellos originellen Beitrag zur Mathematikdidaktik, welcher nirgends umfassend vorgestellt und gewürdigt wird, sondern nur in Bruchstücken zur Unterstützung des Gedankenganges der Autoren herangezogen wird – wobei Fehlinterpretationen die Regel sind. So werden auf S. 107 mit Bezug auf Ruf & Gallin *Aufgabe* und *Auftrag* unterschwellig ineingesetzt, obwohl Ruf & Gallin in der genannten Quelle gerade die Unterscheidung beider Konzepte als

einen zentralen Aspekt ihrer Pädagogik ausweisen. Ferner lässt sich das Konzept der *Kernidee*, ein weiterer zentraler Aspekt der Pädagogik von Ruf und Gallin, nicht wie auf S. 125 auf die gewöhnlich bildungstheoretisch verstandene Frage reduzieren, warum „Schüler den zu behandelnden Gegenstand lernen“ sollen; er steht stattdessen für ein revolutionär subjektives Verhältnis des Lehrers zur Mathematik. Schließlich kommen Reiss & Hammer auch auf die Passage in Platons *Menon* zu sprechen, in welcher Sokrates dem Sklaven des Menon (und nicht Menon selbst!) einseitig vorträgt, wie man ein Quadrat der Fläche nach verdoppeln kann, und dem Sklaven dabei kaum etwas tiefgründigeres als ein „Ja“, „Doch“, „Allerdings“ und „Offenbar“ abringt. Wenn das Dialogische Lernen, in welchem Lehrende und Lernende gleichermaßen und aneinander interessiert voneinander lernen sollen, dann als Fortführung dieser sokratischen Indoktrination dargestellt wird, obwohl sich Ruf & Gallin ausdrücklich von der Lehrmethode des Sokrates abgrenzen,³ bleibt selbst dem gutwilligen Kritiker nur zu sagen: Nein, beim Zeus!

Kritik oder Dogma?

Wissenschaftlichkeit zeichnet sich jedoch nicht nur durch einen redlichen Umgang mit Argumenten und Quellen aus, sondern auch durch eine bestimmte Haltung des Forschenden. Insbesondere in den Geisteswissenschaften schließt dies mit ein, scheinbar Selbstverständliches zu hinterfragen, fertigen Antworten kritisch zu begegnen, mehrere Erklärungsmodelle gegenüberzustellen und nach ihrem Nutzen und ihren Beschränkungen zu befragen. Gerade von solch einer Geisteshaltung zehrt die Lebendigkeit einer jeden Geisteswissenschaft. Von einer Einführung in eine Wissenschaft kann erwartet werden, dass sie ebendiese Haltung vorlebt, dass sie bedeutsame Fragen des Mathematikunterrichts aufwirft, lehrt, ungeeignete Erklärungsmodelle zurückzuweisen oder zu erweitern, und das Interesse an der mathematikdidaktischen Diskussion weckt.

In den *Grundlagen der Mathematikdidaktik* von Reiss und Hammer werden jedoch keine Fragen entwickelt, Konzepte kritisiert oder widersprüchliche Theorien diskutiert. Selbst wo sich dies aufdrängt, kommt es nicht zu einer Diskussion: Dass die PISA-Studien höchst umstritten sind, erfährt der Leser nicht einmal in einer Fußnote. Hey-

³ Vgl. Ruf, Urs & Peter Gallin (1998) *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Band 1. Kallmeyer: Seelze-Velber. S. 49, 109, 318.

manns Allgemeinbildungskonzept (Kap. I) einerseits und ‚Bildungsstandards und Kompetenzen‘ (Kap. VII) andererseits werden nicht gegenübergestellt, sondern stehen unvermittelt nebeneinander. Durchaus gegenübergestellt werden hingegen die instruktionale und die konstruktive Lehrmethode, deren Effizienz dann auch noch psychometrisch vermessen wird, wenngleich unklar ist, inwieweit diese Gegenüberstellung überhaupt sinnvoll ist.

Stattdessen liest sich die Einführung zuweilen dogmatisch. Auf S. 49 erfährt der Leser beispielsweise: „Mathematik muss [!] als *Prozess* und Tätigkeit gesehen werden“ – wer wagt es da noch zu widersprechen? Auf S. 16 f. werden „Kriterien guten Unterrichts“ nicht vorgeschlagen oder diskutiert, sondern sind einfach da: Sie brauchen nicht im mathematikdidaktischen Diskurs gewonnen werden, sondern werden von Klieme, Schümer & Knoll (allesamt Psychologen) nur noch ‚unterschieden‘ (S. 16). Hilbert Meyers ‚Merkmale guten Unterrichts‘ sind nicht etwa ein konkurrierender Vorschlag, sondern gehen lediglich „etwas stärker ins Detail“ (S. 17). Die sokratische Frage danach, was überhaupt das Gute sei, wann in unserem Fall also Mathematikunterricht ‚gut‘ genannt werden sollte, wird gar nicht erst gestellt.

Pflege des Berufsglaubens

Die sokratische Frage nach dem Guten wird meist affirmativ beantwortet. Da der rezensierten Einführung in die Mathematikdidaktik keine kritische Reflexion von Mathematik und Mathematikunterricht zugrundeliegt, kann sie den Wert von Mathematik und Mathematikunterricht nur proklamieren und nicht begründen. Schon auf der ersten Seite des Buchs erfährt der mathematikdidaktische Novize: „Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen.“ Wird hier wider besseren Wissens die Allmacht logischen Denkens beschworen? Ist der kritische Vernunftgebrauch im Mathematikunterricht wirklich „leichter anzugehen als in anderen Fächern“ (S. 5) oder ist der Mathematikunterricht mit seinem (selbst in dieser Einführung) unreflektierten Glauben an das Wahre und Richtige nicht seit jeher das unkritischste aller Schulfächer? Ist es in der Tat so, dass die Mathematik besonders kritisch und vernünftig ist „weil subjektive Ansichten nicht zählen und ohne den Rückgriff auf Autoritäten entschieden werden muss, ob eine Aussage richtig oder falsch ist“ (S. 5) oder wird durch solche Aussagen nur verdeckt, dass auch die Mathematik in einem gesellschaftlich-politischen Raum gewachsen ist, sehr eigentümlichen und nicht von

jedem geteilten Gesetzen des Denkens folgt und in der Gesellschaft wie im Mathematikunterricht von Autoritäten (sogenannten Mathematikern) vertreten wird? Und ist eine Aussage wie „Mathematik begegnet uns täglich und überall“ (S. 101) überhaupt sinnvoll oder wird der Begriff der Mathematik damit so weit gestreckt, dass schon Mathematik ist, wenn irgendwer in irgendeinem Phänomen oder Gegenstand Mathematisches angewendet oder verborgen wähnt? Die hier unkritisch reproduzierte Mathematik-ist-überall-Polemik mit Verweis auf MP3-Player und Co. wird allenthalben beschworen, um „die Unverzichtbarkeit der Mathematik“ zu belegen (S. 7); dabei wäre eine Differenzierung dieser Aussage hier dringend angebracht. Das Repertoire mathematikdidaktischer Mythen ließe sich freilich noch um weitere plakative Statements erweitern. Es wird jedoch schon jetzt deutlich, dass dem Leser wissenschaftlich fragwürdige Glaubensbekenntnisse auf die Zunge gelegt werden anstatt eine kritische Fragehaltung gegenüber dem Mathematiklernen zu kultivieren.

Fazit

Gemessen an den zugrunde gelegten Kriterien sind die *Grundlagen der Mathematikdidaktik* von Reiss & Hammer nicht „als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende“ geeignet, solange sie nicht durch Materialien ergänzt werden, die die beschriebenen Mängel auszugleichen imstande sind. Die thematische Ausrichtung des Buchs kann man mögen oder nicht; mit ihr gehen die Autoren aber lobenswert offen um. Besonders schwer wiegen meines Erachtens jedoch die inhaltlichen Unstimmigkeiten sowie die Befürchtung, dass sich Studenten schon beim Einstieg in die Mathematikdidaktik ein Bild von ‚wissenschaftlichem Arbeiten‘ machen, wie es sich eine Wissenschaft nicht wünschen kann. Das heißt nicht, dass die Einführung von Reiss & Hammer aus dem Hörsaal zu verbannen ist, aber doch, dass man ihr am besten – gerade auch im Hörsaal – so begegnet, wie die Autoren es gegenüber der Mathematik und ihrem Unterricht vermissen lassen: nämlich kritisch.

Reiss, Kristina & Christoph Hammer: *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Birkhäuser, Basel 2013, 143 S., ISBN 978-3-03460141-2, 18,90 EUR.

David Kollosche, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Email: dkollosche@googlemail.com