Zu den KMK-Standards im Fach Mathematik

Exemplarische Analyse einer Beispielaufgabe für ein bundesweites Zentralabitur

Wolfgang Kühnel, Dieter Remus und Sebastian Walcher

1 Einleitung

Die Unterrichts- und Prüfungskultur im Fach Mathematik in der Sekundarstufe II der weiterführenden Schulen in Deutschland hat sich in den letzten Jahren grundlegend gewandelt. Manifestiert wird dies insbesondere durch eine Fokussierung auf Kompetenzorientierung in den gemeinsamen Standards, welche die KMK im Jahre 2012 beschlossen hat. Von einer Reihe von Lehrenden an Schulen und Hochschulen wird auch Kritik an der Reform und ihren Folgen geäußert. Hier soll es aber nicht um eine Kritik an den Bildungsstandards gehen, sondern um eine solche an deren Auswirkungen auf Abituraufgaben. Zu Details konkreter Aufgaben scheint die didaktische Fachliteratur eher etwas mager zu sein, selbst vor dem Hintergrund des geplanten (deutschen) bundeseinheitlichen Zentralabiturs. Die dennoch in Gang gekommene Diskussion über Abituraufgaben erweist sich dabei auch deshalb zum Teil als schwierig, weil schon die Vorgehensweise strittig sein kann. So wurde einer ausführlichen Kritik einiger Jahrgänge von Hamburger Abituraufgaben [3] u. a. entgegengehalten, die Auswahl der Aufgaben sei willkürlich und nicht repräsentativ (siehe [4]). Dass bei Untersuchungen dieser Art mit Blick auf den Umfang eine Auswahl getroffen werden muss, ist in der Tat ein Problem. Betrachtet man darüber hinaus alle 16 Länder (mit insgesamt ca. 100 Aufgaben pro Jahrgang), so ist eine Untersuchung sämtlicher Abituraufgaben über mehrere Jahre hinweg nicht realistisch, was den Arbeitsaufwand betrifft; zudem wäre ein allfälliges Resultat wegen des Umfangs nicht in einer Zeitschrift publizierbar.

Es stellt sich also das Problem, wo und wie überhaupt Kritik ansetzen kann, so dass sie als Ausgangspunkt für eine zielführende Diskussion dienen kann. Zudem ist auch zu unterscheiden zwischen grundlegenden Änderungen sowie der Art ihrer Umsetzung in Prüfungsaufgaben einzelner Länder.

Das Dilemma lässt sich nach Ansicht der Autoren so umgehen: Es gibt im Zusammenhang mit den KMK-Standards Beispielaufgaben [6, 7], welche vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) entworfen und publiziert wurden und die Umsetzung der neuen Regelungen exemplarisch illustrieren sollen. Eine Betrachtung und Kritik dieser „Vorzeigeaufgaben“ erscheint somit legitim, über den Einzelfall hinaus verallgemeinerbar, und bietet eine sinnvolle Grundlage für die Einschätzung der Reformziele, unabhängig von eventuellen Problemen bei der Umsetzung in Curricula oder Prüfungsaufgaben einzelner Länder. Wir betrachten im Folgenden ausführlich eine solche Aufgabe vor dem Hintergrund der KMK-Standards und der dort festgelegten Kompetenzen und leiten daraus einige grundsätzliche Kritikpunkte ab.

2 Die Aufgabe

2.1 *Kurze Beschreibung*

Es gibt eine (und nur eine) Analysis-Aufgabe in der Mustersammlung des IQB, welche erstens „erhöhtes Niveau“ aufweist und zweitens mit wissenschaftlichem Taschenrechner (WTR) und Formelsammlung zu bearbeiten ist. Sie gehört zum „Teil B“ (225 Minuten Bearbeitungszeit), dem ein hilfsmittelfreier Teil (Bearbeitungszeit 45 Minuten) voranzustellen ist. Die betrachtete Aufgabe ist unter [7] als Prüfungsteil B, Analysis, Aufgabe 1 (WTR) allgemein zugänglich; sie ist ihrerseits in Teilaufgaben 1a)–j) und 2a)–d) gegliedert. Sie deckt im Teil B die Analysis ab (neben analytischer Geometrie und Stochastik) mit 50 von 100 Bewertungseinheiten (BE) insgesamt. Also ist dafür rechnerisch eine Bearbeitungszeit von 112,5 Minuten vorgesehen. Für den Prüfungsteil A gibt es 20 Bewertungseinheiten. (In NRW ist in Leistungskursen im „Teil B“ die gesamte Arbeitszeit 210 Minuten, aber mit einem graphikfähigen Taschenrechner.)

Die Teilaufgabe 1 ist zunächst eine klassische Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion, deren Graph einer beigefügten Abbildung zu entnehmen ist (also eine jener heute gering geschätzten „Schema-F-Aufgaben“ der Vergangenheit [5], die als Motivation für den Einsatz der gegenwärtigen Aufgabentypen angeführt werden). In Teil c wird der Graph verschoben, und es soll der Funktionsterm zu diesem verschobenen Graphen angegeben (nicht aber ausgerechnet) werden. In Teil d soll die Punktsymmetrie des verschobenen Graphen bezüglich des Ursprungs sowie die Punktsymmetrie des ursprünglichen Graphen begründet werden. In Teil e ist ein bestimmtes Integral für f auszurechnen, in Teil f soll ein weiteres bestimmtes Integral ohne Benutzung der (aus e bereits bekannten) Stammfunktion mit Symmetriebetrachtungen bestimmt werden. Die Teile g–j schließlich behandeln eine Funktionenschar.

Die Teilaufgabe 2 beruht auf einem Anwendungsproblem, das in der Literatur wohlbekannt ist; siehe [13] sowie [11], [14], wo der Modellierungsaspekt näher diskutiert wird. Hintergrund ist die Tatsache, dass der Schwerpunkt einer teilweise gefüllten Getränkedose genau dann am tiefsten liegt, wenn er auf Höhe des Flüssigkeitsspiegels liegt. Die Höhe des Schwerpunkts über dem Dosenboden wird als Funktion der Höhe des Flüssigkeitsspiegels durch eine gebrochen-rationale Funktion h angegeben. Dabei ist ohne Kommentar ein bestimmtes Massenverhältnis zwischen Flüssigkeit und leerer Dose unterstellt, andernfalls würde die Funktion von diesem Parameter abhängen [11]. Gegeben sind weiterhin die expliziten Koordinaten des Tiefpunktes. In den Aufgabenteilen a und b sollen nur Informationen aus dem Graphen abgelesen werden; dabei ist auch nach der Besonderheit der Situation gefragt, in welcher sich der Schwerpunkt auf seiner geringsten Höhe befindet (man erinnere sich an die Angabe des Tiefpunktes). Bei Teil c ist erstmals eine Rechnung auszuführen. In Teil d schließlich ist eine andere Dose (ein anderer Funktionsterm mit zwei Parametern) zu betrachten. Die Bestimmung der Parameter führt auf ein sehr einfaches lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

Der Aufgabentext

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

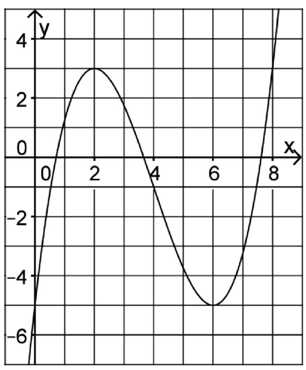

Abbildung 1

a. (5 BE) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.

b. (4 BE) Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.

Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

c. (2 BE) Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.

d. (3 BE) Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4|-1)$ ist.

e. (3 BE) Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^5 f(x)dx = 5$ gilt.

f. (5 BE) Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 1.

Die Funktion f gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

g. (3 BE) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_a.

h. (2 BE) Die Wendepunkte aller Graphen G_a liegen auf einer zur y-Achse parallelen Geraden. Begründen Sie, dass man dies am Term von f_a erkennen kann.

i. (5 BE) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, durch den alle Graphen der Schar verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich die Graphen G_a und G_3 in diesem Punkt senkrecht schneiden.

j. (4 BE) Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

2. Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung 2).

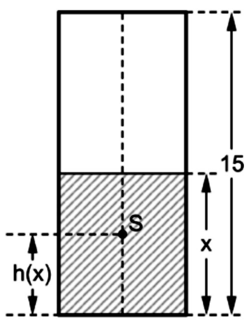

Abbildung 2

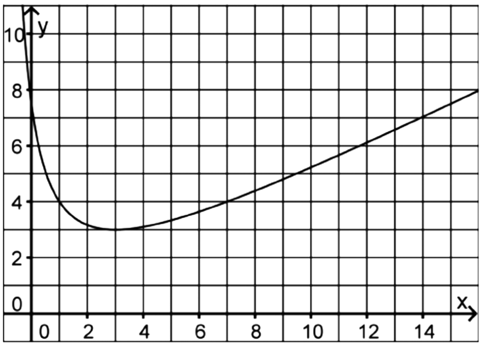

Abbildung 3

Abbildung 3 zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimeter angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $(3|3)$.

a (2 BE) Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.

b (4 BE) Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs. Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.

c (4 BE) Für die Funktion h gilt $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$. Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt.

d (4 BE) Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm. Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{2}x - s + \frac{t}{x+1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ beschrieben. Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t.

2.2 *Was von „traditionellen“ Anforderungen bleibt*

Als „traditionelle“ Aufgaben und ihre Anforderungen sollen hier jene Teile von Abituraufgaben bezeichnet werden, die schon Jahrzehnte vor der Einführung der Kompetenzorientierung gebräuchlich waren (Beispiel: Bestandteile der Kurvendiskussion, auch in einem Sachkontext, Integrale). Einige Beispiele solcher Aufgaben – auch zur Geometrie – wurden kürzlich von Hischer [2] publiziert.

Beide Teile der obigen Aufgabe behandeln Funktionen, die ganzrational (Teil 1) oder gebrochenrational (Teil 2) sind. Standardthemen der Differentialrechnung (Bestimmen von Ableitung bzw. Stammfunktion, Anwendung auf Extrema bzw. Flächenberechnung etc.) sind nur im ersten Teil zu absolvieren. Dass im zweiten Teil u. a. nicht nach der Ableitung gefragt wird, ist vermutlich auf die KMK-Richtlinien [8, 9] zurückzuführen, in deren Beschreibung der Leitideen explizit die (mindestens oder in der Regel zu behandelnden?) Funktionenklassen aufgeführt sind, wozu gebrochen-rationale Funktionen des Typs wie h nicht gehören. Die Quotientenregel wird konsequenterweise in den KMK-Standards [9] auch beim erhöhten Niveau nicht verlangt – siehe die Erläuterungen zur Leitidee L4 (Funktionaler Zusammenhang).
Eine „traditionelle“ Anforderung ist auch in Teilaufgabe 1d) zu sehen, nämlich Schließen auf Punktsymmetrie des Graphen (bezüglich 0) für ganzrationale Funktionen, deren Gleichung nur ungerade Potenzen enthält. Des weiteren sind an mehreren Stellen der Teile 1 und 2 quadratische Gleichungen zu lösen, in 2c) ist eine quadratische Gleichung mittels einiger Umformungen zunächst aus einer Bruchgleichung herzuleiten. Schließlich stellt 2 d) eine einfache Steckbriefaufgabe (ein in der Schulpraxis gängiger Begriff) zu einem Ansatz mit zwei unbestimmten Koeffizienten dar.

Insgesamt fällt auf, dass die genannten Anforderungen „auf erhöhtem Niveau“ vielfach eher dem Sek-I-Bereich zuzuordnen sind; typisch für „traditionelle“ Sek II sind nur einige (eher leichte) Fragen aus Teilaufgabe 1 wie Extrema zu bestimmen und ein Polynom zu integrieren.

2.3 *Neue Anforderungen*

Andererseits sind in der Beispielaufgabe Fragen enthalten, welche (jedenfalls in der vorliegenden Form) früher wohl nicht gestellt worden wären. Dies betrifft zum einen „Argumentation mit Bezug auf den Graphen“: So soll in Teil 1b) an der Skizze „ermittelt“ werden, wie viele Lösungen die Gleichung $f(x) = c$ mit variablem c hat. Man soll also nachsehen, wie oft der Graph eine horizontale Gerade in bestimmter Höhe schneidet. In 2a) und 2b) sollen wieder Lösungen von Gleichungen an Hand des Graphen bestimmt werden, und der Graph ist als bildliche Darstellung des Füllvorgangs zu interpretieren. Insgesamt erfordern diese Fragen aber nicht mehr als die Kenntnis elementarer Fakten aus dem Unterricht der Mittelstufe über den Bezug von Funktionen zu ihren Graphen. Brunner diskutiert in einer kürzlich erschienenen Arbeit Aufgaben ähnlichen Typs zu Funktionsgraphen in österreichischen Maturaprüfungen und zweifelt an ([1], S. 24), „inwieweit man mit Aufgabenformaten wie dem angeführten von Lernenden erworbenes ’mathematisches Denken’ zu entwickeln und zu überprüfen imstande ist.“ In Teil 1c) soll der Funktionsterm für einen verschobenen Graphen angegeben werden. Diese Aufgabe könnte Schwierigkeiten bereiten, wenn man sie zum ersten Mal sieht; auch ist nicht jede Formelsammlung dafür gerüstet. Für die Argumentation in 1d) (die ohne vorheriges Training nicht einfach wäre) benötigt man Wissen, wie sich Symmetrie unter Translationen verhält. Dies und die Flächentreue von Translationen und Punktspiegelungen (sowie die Interpretation des bestimmten Integrals als signierte Fläche) ist auch für die Lösung von 1f) vonnöten.

2.4 *Anspruchsniveau*

Das Anspruchsniveau der Aufgabe muss vor dem Hintergrund beurteilt werden, dass sie ausdrücklich „auf erhöhtem Niveau“ gestellt wird, also in der Nachfolge der früheren Leistungskurse.

Wie bereits angemerkt, sind die „traditionellen“ Teilaufgaben eher einfach, und auch die Argumentation an Hand des Graphen bei den neueren Teilen ist nicht als schwierig zu bezeichnen. Es wird klar, dass auf Kalkülfertigkeiten wenig Wert gelegt wird. Aufgabenteile wie 1d) und 1f) sind anspruchsvoller. Eine genaue Einschätzung ihres Anspruchsniveaus hängt jedoch sehr stark davon ab, ob und wie solche und ähnliche Aufgaben in der Vorbereitung behandelt wurden: Geht man von entsprechendem Training aus, so scheint uns das (zumal mit dem Anspruch „erhöhten Niveaus“) durchaus machbar zu sein. Bei Teilaufgabe 1f) fällt zudem auf, dass die Schwierigkeit künstlich geschaffen wurde, denn schlichtes Ausrechnen mittels der in der vorangehenden Teilaufgabe bestimmten Stammfunktion wäre weniger aufwendig. Die Stammfunktion wird nicht „zur Kontrolle“ angegeben, wie in vielen Prüfungen üblich. Insofern könnte man einwenden, dass eine Lösung von Teil 1f) auf diese Weise auch jenen möglich ist, die Teil 1d) nicht bearbeiten konnten. Wie groß der Anteil solcher Personen unter den Prüflingen ist, und ob es ggf. angemessen wäre, in einer Abituraufgabe mit „erhöhtem Niveau“ eine solche Ausweichmöglichkeit zu bieten, sei dahingestellt.

Der mathematische Anspruch von Teilaufgabe 2 wurde stark herabgesetzt, und jegliche Modellierung im klassischen Sinn des Wortes entfällt gänzlich, obwohl diese Kompetenz im Erwartungshorizont ausdrücklich genannt wird, s. unten. Anzumerken ist, dass ein Vorgänger dieser Teilaufgabe im bayerischen Zentralabitur 2013 gestellt wurde, mit anderen (und aus mathematischer Sicht höheren) Anforderungen; unter anderem war das Minimum der Funktion h mittels Differentialrechnung explizit zu bestimmen.

Es stellt sich die Frage, in welcher Hinsicht die gesamte Aufgabe ein „erhöhtes Niveau“ repräsentiert und ob der Teil 2 überhaupt zur Analysis gehört, da keine Infinitesimalrechnung vorkommt, sondern nur Themen aus der Sekundarstufe I. Teil 2 mit 14 Punkten hätten Neuntklässler auch lösen können, die Teile 1b), 1c), 1d) mit 9 Punkten auch. Das hätte nach dem gängigen Bewertungsschema zum rechnerischen Bestehen dieses Aufgabenteils gereicht. Mutatis mutandis ist auch für die betrachtete Aufgabe Brunners Kritik an kompetenzorientierten Reifeprüfungsaufgaben in Österreich zuzustimmen: „Die neuen Beispiele werden jedenfalls den eingangs angeführten theoretischen Ansprüchen nicht gerecht.“ (Brunner [1], S. 26.)

An der Formulierung und Schwerpunktsetzung dieser Aufgabe wird auch ein weiterer Mangel manifest: Diese neuen bzw. aus dem bisherigen Zentralabitur der Bundesländer übernommenen Aufgabenformate und Anforderungen wurden entwickelt, ohne Rücksicht auf das benötigte Wissen und Können etwa in MINT-Fächern zum Studienbeginn zu nehmen, und das trotz der allgemeinen Lippenbekenntnisse zur Wichtigkeit dieser Fächer. Da die Prüfungsanforderungen im Abitur bekanntlich normativ auch auf den Unterricht wirken, fehlen dann vielen Erstsemestern in einer Physikvorlesung oder im Mathematikkurs für Ingenieure gewisse mathematische Kenntnisse, die die Hochschulen einfach erwarten. Die Forderung, die Studenten „dort abzuholen, wo sie stehen“, ist wegen der ständigen Änderungen im Schulbereich problematisch, s. auch [12].

3 Kompetenzen

3.1 *Hintergrund und Überblick*

Wir zitieren zunächst aus der Webseite [6] des IQB, zur Klärung der Zielsetzung, mit der die Aufgabe (neben anderen) veröffentlicht wurde:

> Die vorliegende Aufgabensammlung soll insbesondere Lehrkräften sowie Schülerinnen und Schülern hinsichtlich der Gestaltung und der zu erwartenden Anforderungen der Aufgaben des gemeinsamen Abituraufgabenpools der Länder Orientierung bieten. (....) Die Auswahl der Aufgabenarten sowie die Aufgaben selbst zeigen exemplarisch, wie die Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Abiturprüfung umgesetzt werden können.

Wesentlich für die Bildungsstandards ist die Segmentierung der Themen und Anforderungen in ein Schema, das fünf „Leitideen“ (L1–L5) sowie sechs „allgemeine mathematische Kompetenzen“ (K1–K6) mit drei Anforderungsbereichen zu einem dreidimensionalen Kompetenzmodell vereint. Von einer umfassenderen Kritik an der Einteilung mathematischen Wissens und Könnens in Kompetenzen wird hier abgesehen; jedoch ist der Einfluss der Kompetenzorientierung auf die Stellung und Bewertung der Aufgaben relevant. Für die hier betrachtete Aufgabe sind folgende Kompetenzen ausweislich des Bewertungsschemas von besonderer Bedeutung:

- K1: Mathematisch argumentieren;
- K2: Probleme mathematisch lösen;
- K3: Mathematisch modellieren;
- K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

Vielfach sind die Beschreibungen der Kompetenzen und die Einteilung in Anforderungsbereiche diffus. So deutet das Wort „komplex" grundsätzlich auf den höchsten Anforderungsbereich III hin; bei (K2) geht es u. a. um „eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems", in (K3) ist „eine komplexe Realsituation [zu] modellieren", für die höchste Anforderungsstufe in (K5) müssen die Schülerinnen und Schüler „komplexe Verfahren durchführen". Die Kompetenz K5 ist eine besondere Betrachtung wert: Dass dort so unterschiedliche Begriffe wie „symbolisch" und „technisch" in eine Schublade gesteckt werden, ist zumindest verwunderlich. Zudem werden bei (K5) (anders als etwa bei den sehr ambitionierten Formulierungen in (K2) und (K3)) die Ansprüche überschaubar gehalten:

> Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.

Es ist durchaus konsequent, wenn ein Bundesland wie NRW in seinen Kernlehrplänen der Sek I [10] davon nur einen „Kompetenzbereich Medien und Werkzeuge nutzen" übrig lässt und – ganz nebenbei – die 5 Leitideen auf die 4 klassischen Themen Algebra, Funktionen, Geometrie, Stochastik sozusagen „eindampft" .

In der Fachdidaktik-Literatur findet sich andererseits zum Thema „formale Elemente der Mathematik" durchaus Respektables und Bedenkenswertes:

> Formale Fertigkeiten sind solche, die sich auf Handhabung von Sprache im weiteren Sinn (Umgangssprache, Diagramme, Schemata, Symbole, Zeichen. . .) beziehen und zwar derart, dass durch die ‚geregelte' Manipulation mit Sprachelementen unter (vorübergehender) Ausblendung von semantischen Bezügen inhaltliche Fragestellungen gelöst werden. Es geht hier also um die Förderung des algorithmischen, kalkülhaften Moments mathematischen Arbeitens (. . .)

Dieses Zitat stammt von Heinrich Winter, aus seiner Arbeit [15] über allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts.

3.2 *Erwartungshorizonte und Zuordnung der Kompetenzen*

Den Aufgabenteilen sind in [7] Erwartungshorizonte sowie ein Kompetenz- und Anforderungsschema beigefügt. Zu den Erwartungshorizonten wird angemerkt, dass nicht alle Lösungen vollständig ausgeführt sind; sie sollen jedoch darstellen, „in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird". Den Verfassern erschließt sich jedoch in mehreren Teilaufgaben die Zuordnung der Kompetenzen nicht; auch wird Umfang und Form der erwarteten Lösung nicht in jedem Fall klar. Dies soll nun im Einzelnen dargestellt werden.

In Teil 1b) soll man (allein) anhand der Abbildung sehen, wieviele Lösungen die Gleichung $f(x) = c$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ hat, also wie oft der Graph von f eine waagerechte Gerade in der Höhe c schneidet. Diesem leicht trainierbaren Vorgehen werden gleich drei Kompetenzen attestiert, jeweils im mittleren Anforderungsbereich II, darunter auch K1 (Mathematisch argumentieren) und K2 (Probleme mathematisch lösen). Welche Argumentation gefordert wird, ist der Modelllösung nicht zu entnehmen; sie listet nur das Ergebnis auf. Und welches Problem sollte hier gelöst werden? In Teil c) wird die naheliegende Gleichung $g(x) = f(x+4)+1$ offenbar nicht erwartet, denn im Erwartungshorizont wird $f(x+4)$ als Summe von vier Termen geschrieben. Zu Teil d) ist zu begründen, warum der abgebildete Graph punktsymmetrisch zum Punkt $(4,-1)$ ist. Ein Beweis wäre die Verifikation der Identität $g(x) = -g(-x)$, also $f(4+x)+1 = -f(4-x)-1$, aber der Operator „begründen" ist bekanntlich schwächer als „beweisen". Jedenfalls wird der Aufgabenteil sowohl bezüglich der Kompetenz K1 (Mathematisch argumentieren) als auch bezüglich Kompetenz K2 (Probleme mathematisch lösen) in die höchste Stufe III eingeordnet. Das beinhaltet laut KMK-Standards „Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln" sowie „eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwendung mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden". Es ist nicht leicht nachzuvollziehen, wie dies bei dem geschilderten Aufgabenteil der Fall sein soll. Realistisch ist zudem die Annahme, dass ähnliche Aufgaben im Vorfeld einer Prüfung behandelt werden; dieses Faktum scheint bei der Einstufung keine Berücksichtigung zu finden.

Die Punktsymmetrie ist dann in Teil f) zu nutzen für die Bestimmung eines Integrals, das ohne Verwendung der (bereits bekannten) Stammfunktion gefunden werden soll. Im Erwartungshorizont ist nur eine Skizze (mit zwei gleichen Flächen) und eine darauf bezogene Formel zu finden; ob für die Lösung detailliertere oder stringentere Argumente (etwa die Erwähnung der Flächentreue von Punktspiegelungen) gefordert sind, bleibt im Nebel. Wieder sind drei Kompetenzen zugeordnet, davon zwei (dieselben wie bei Teil d)) im höchsten Anforderungsbereich III. Bemerkenswert ist hier die weitgehende Beliebigkeit in der Bewertung, welche die Modelllösung zuzulassen scheint.

Auch Teil j) bekommt bei einer Kompetenz, nämlich K5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen) den höchsten Anforderungsbereich attestiert. Neben der Kenntnis des Faktums, dass eine waagerechte Tangente genau bei einer verschwindenden Ableitung vorliegt, geht es nur darum, eine quadratische Gleichung mit einem Parameter a zu lösen (eine Routine-Formel, auch in der Formelsammlung zu finden) und dann zu entscheiden, für welche Parameter der Radikand $16 - 4a/3$ negativ ist und somit keine reelle Lösung existiert. Eine lineare Ungleichung gilt offenbar schon als schwierig im Abitur auf erhöhtem Niveau.

In den Teilaufgaben 2a)–c) erscheint die Zuordnung der Anforderungsbereiche insgesamt hoch. Es werden zu ihrer Begründung jedoch vor allem die „weichen" Kompetenzbereiche K4 (Mathematische Darstellungen verwenden) und K6 (Mathematisch kommunizieren) genannt, womit eine Bewertung auf „traditioneller" Grundlage schwierig wird. Die Herleitung und Lösung der quadratischen Gleichung aus einer Bruchgleichung in Teil 2c) wird zum mittleren Anforderungsbereich bei Kompetenz K5 gerechnet. Teil 2d) hingegen wird dem höchsten Anforderungsbereich bei der Kompetenz K3 (Mathematisch modellieren) zugeordnet. Diese Aufgabe läuft auf ein einfaches System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten hinaus, ist also als Routine in Klasse 8 oder 9 anzusehen. Sie entspricht jedoch laut [7] dem höchsten Anforderungsbereich; insbesondere wird bei K3 (Mathematisch modellieren) das höchste Niveau postuliert. Sieht man in den Bildungsstandards [9] nach, so ist auf diesem Niveau „eine komplexe Realsituation [zu] modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen", oder es sind „mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation [zu] überprüfen, vergleichen und [zu] bewerten". Ersteres trifft bei der vorgelegten Aufgabe sicher nicht zu, und bezüglich Letzterem mag zwar ein mathematisches Modell im Kontext einer Realsituation gegeben sein, aber davon wird nichts überprüft, verglichen oder bewertet. Betrachtet man den mittleren Anforderungsbereich, so könnte man eine der genannten Kompetenzen zu K3 („ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen"), für geeigneter halten. Auffällig ist auch, dass Kompetenz K5 mit mittlerem Anforderungsbereich erscheint; die Lösung eines simplen linearen Gleichungssystems scheint damit überbewertet. Für weitere Anmerkungen zur Modellierung und zu den mathematischen Anforderungen der ursprünglichen Aufgabenstellung zum Schwerpunkt einer gefüllten Dose siehe auch [14]. In [11] ist darüber hinaus ein Vorschlag zu einer diesbezüglichen Aufgabe auf einem wirklich erhöhten Niveau formuliert, der auch das Massenverhältnis zwischen Flüssigkeit und leerer Dose berücksichtigt. Dass dieser Teil 2 zur Dose in der jetzigen Version laut [7] insgesamt gleich fünf Kompetenzen abprüft (obwohl keine wirkliche Analysis mit Infinitesimalrechnung drinsteckt), könnte man als Argument eher *gegen* als *für* die Kompetenzorientierung im Fach Mathematik anführen.

Diese kurzen Anmerkungen sollen deutlich machen, dass die Auslegung der vorformulierten Kompetenzen sowie deren Zuordnung zu Aufgabenteilen selbst dann zu wünschen übrig ließen, wenn man dem Ansatz grundsätzlich positiv gegenüber stünde. Wir finden das jedenfalls nicht überzeugend.

4 Fazit

Unabhängig von der Frage nach der Qualität der Aufgabe selbst kann man wohl festhalten: Diese Zuordnung einzelner Leitideen, Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Erwartungshorizont zu einzelnen Aufgabenteilen folgt, wie im vorigen Abschnitt erläutert, keinem klar erkennbaren Prinzip, das sich durch konsequente Bezugnahme auf die jeweiligen Beschreibungen in den Bildungsstandards ergeben würde. Vielmehr scheint es uns, dass man zu gewissem Verlegenheitslösungen dabei greift, die den (bürokratisch vorgeschriebenen) Zwang zu solchen Zuordnungen widerspiegeln. Es ist immer undankbar, eine „Schubladen-Zuordnung" vorzunehmen, wenn die Schubladen nicht richtig passen. Dieser Teil könnte einfach entbehrlich sein, denn welcher Verlust wäre nach einer Abschaffung zu beklagen? Eine gewisse Vielfalt wäre allein schon durch die Themen (Analysis, Geometrie, lineare Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung) gegeben. Darüber hinaus gäbe es die Möglichkeit, das mathematische Argumentieren durch kleinere Beweise abzuprüfen (zumindest beim Leistungskurs), das mathematische Kommunizieren könnte durch verlangte sprachlich korrekte Erläuterungen realisiert werden, von den Prüflingen wird ohnehin nicht modelliert, kalkülmäßiges Rechnen ist immer mit dabei, irgendwelche Probleme sind immer mathematisch zu lösen, und der Taschenrechner wird auch eingesetzt. Schließlich werden im Normalfall bei solchen Aufgaben einfachere und schwierigere Aufgabenteile immer dabei sein. So gesehen könnte man die Anforderungsbereiche durch die zugeordneten Punkte ersetzen (die den Prüflingen bekannt sind) statt eine sozusagen „juristische" Schwierigkeit mit Anforderungsbereichen zu deklarieren. Zwar hatte man schon 1982 drei „Niveaus" in Aufgabenteilen (Routine, Transfer, Neues) [2], aber diese wurden einzelnen Schritten beim Lösen der Aufgaben zugeordnet und nicht zusätzlich noch abstrakten Kompetenzen. Zudem schien es damals keine Punkte zur Bewertung einzelner Teile gegeben zu haben. Inzwischen neigt man wohl dazu, die bürokratischen Vorgaben zu übertreiben. Vereinfachung wäre wünschenswert. Dieses „juristische Element" betrifft auch und besonders den Unterschied zwischen grundlegendem und erhöhtem Niveau, der bereits in den KMK-Bildungsstandards nur ziemlich unscharf definiert ist und im Hamburger Abitur schon vor Jahren weiter verwischt wurde: Wiederholt stimmten so viele Aufgabenteile bei beiden Niveaus wörtlich überein, dass diese zum Bestehen bereits ausreichten [3]. Das Kompetenzraster stand dem offensichtlich nicht entgegen.

Die diskutierte Aufgabe zeigt letztlich, dass in der Praxis das Kompetenzraster es nicht vermag, eine Vergleichbarkeit der Prüfungsanforderungen und Bewertungsmaßstäbe sicherzustellen. Das war aber ein erklärtes Ziel des IQB bei der Entwicklung eines bundesweiten Aufgaben-Pools, und gerade in Bezug auf diese Zielsetzung erscheint den Autoren ein Scheitern absehbar.

Literatur

[1] M. Brunner: *Schlechte Diagramme.* Mitteilungen der GDM **103**, 22–26 (2017).

[2] H. Hischer: *Abitur im Wandel der Zeiten: 1962 und 1982 – ein subjektiver Rückblick.* Mitteilungen der GDM **98**, 28–35 (2015)

[3] T. Jahnke, H.P. Klein, W. Kühnel, T. Sonar, W. Spindler: *Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik. Entwicklung von 2005 bis 2013.* Mitteilungen der DMV **22**(2), 115–121 (2014).

[4] G. Kaiser, A. Busse: *Diskussion II.* ibid. **22**(2), 121–122 (2014).

[5] W. Löding, W. Blum. Leserbrief zu [3]. ibid. **22**(3), 134–135 (2014)

[6] IQB Bildungsstandards – Aufgabensammlung Mathematik. https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik

[7] IQB Bildungsstandards – Aufgabensammlung, Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik/aufgaben_erhoeht

[8] KMK: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Wolters Kluwer, München (2004). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

[9] KMK: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (2012). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

[10] https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-i/gymnasium-g8/mathematik-g8/kernlehrplan-mathematik/index.html

[11] http://www.igt.uni-stuttgart.de/LstDiffgeo/Kuehnel/NeueDose.pdf

[12] W. Kühnel, S. Walcher: *Die Lücke in Mathematik zwischen Schule und Hochschule – Anspruch und Wirklichkeit von Bildungsreformen.* Mitteilungen der DMV **25**(3)

[13] D. Meschede: *Gerthsen Physik.* Springer, Heidelberg (2010).

[14] S. Walcher: *Der Zustand „zeitgemäßer" Schulmathematik – Exemplarisch dargestellt anhand einer Abitur-Musteraufgabe des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB).* Journal für Didaktik der Naturwissenschaften und der Mathematik (P/S) **1**, 10–13 (2017).

[15] H. Winter: *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?* ZDM **3**, 106–116 (1975).

Wolfgang Kühnel, Universität Stuttgart
wolfgang.kuehnel@igt.uni-stuttgart.de

Dieter Remus, Universität Paderborn
remus@math.uni-paderborn.de

Sebastian Walcher, RWTH Aachen
walcher@matha.rwth-aachen.de