Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten

Nicola M. R. Oswald

Der Artikel beschreibt die Möglichkeit sogenannte *Beweise ohne Worte* in den ergänzenden Zusatzunterricht im Fach Mathematik von minderjährigen Geflüchteten einzubinden. Auf der Grundlage einer qualitativen Untersuchung stellen wir die These auf, dass sich diese gerade zum Einsatz im Unterricht von zumeist ehrenamtlichen Lehrpersonen mit sehr unterschiedlicher Vorbildung eignen. Insbesondere hinsichtlich der Einschätzung des Lernstandes und Mathematikverständnisses der Jugendlichen zeichneten sich Hinweise für einen Erkenntnisgewinn ab.

1 Kurze Beschreibung der Ausgangslage

Mit den tausenden hilfesuchenden Geflüchteten im Jahr 2015 kamen auch ein Vielzahl an sogenannten unbegleiteten minderjährigen Flüchtlingen (oft abgekürzt „UMF") nach Deutschland. Laut einer Studie des Bundesfachverbands unbegleiteter minderjähriger Flüchtlinge [1] gab es zum 4. 1. 2016 in Deutschland in der Summe insgesamt 66 541 „jugendhilferechtliche Zuständigkeiten", diese Zahl bezieht sich auch auf Jugendliche, die bereits vor 2015 in Deutschland waren. Stellen wir diese Zahl gegenüber der gemäß Diakonie Deutschland (vgl. [3]) gestellten 14 439 Asylanträge von UMFs beim Bundesamt für Migration und Flüchtlingen und den lediglich 2 922 Entscheidungen (davon 90 % Anerkennungen) im Jahr 2015, so ist damit zu rechnen, dass viele der jungen Menschen einen großen Teil ihrer Jugend mit einem Status des Abwartens in Deutschland verbringen werden. Dementsprechend muss ein entscheidendes Anliegen der jeweiligen Staatsministerien für Unterricht und Bildung der Bundesländer darin bestehen, für ein integratives Klima sowie eine qualifizierte Ausbildung Sorge zu tragen. Die Jugendlichen erlebten in der Regel nicht nur traumatisierende Situationen und Ereignisse,[1] sondern stammen darüber hinaus aus Ländern mit unterschiedlichen Bildungssystemen und erzieherischen Schwerpunkten. „Die erste und wichtigste Aufgabe [auch] schulischer Einrichtungen ist es daher, den Jugendlichen nach und in einer Zeit der Orientierungslosigkeit Halt und Zuversicht zu bieten." [8, S. 6] Dazu gehört insbesondere auch Selbstvertrauen bezüglich ihrer schulischen Leistungen und damit verbundenen beruflichen Aussichten. Hierbei liegt sicherlich ein Hauptaugenmerk auf den Fächern Deutsch und Mathematik. Aktuell sind in Deutschland hunderte Menschen im ehrenamtlichen Zusatzunterricht für unbegleitete minderjährige Geflüchtete, neben dem regulären Schulunterricht, eingebunden. Ein Anteil besteht aus (teilweise ehemaligen) Lehrerinnen und Lehrern, darüber hinaus ist eine beträchtliche Zahl an Menschen ohne abgeschlossene schulpädagogische Fachausbildung engagiert. Unser Anliegen ist es, den Lehrenden eine weitere Art von Mathematikaufgaben an die Hand zu geben und damit einen alternativen Zugang und Umgang bei der Vermittlung von Mathematik anzubieten. Im Rahmen der folgenden Untersuchung zum Einsatz dieser sogenannten *Beweise ohne Worte* werden wir uns auf drei qualitative Befragungen von ehrenamtlich Engagierten aus Städten in Bayern und dementsprechend auf Richtlinien des bayerischen Kultusministeriums beziehen. Die Ergebnisse sind jedoch naturgemäß Bundesländer und Ländere übergreifend zu verstehen und interpretierbar.

2 Untersuchung

Im Folgenden soll eine erste qualititive Studie mit Einzelfallanalysen zum Einsatz von *Beweisen ohne Worte* im ergänzenden Mathematikunterricht von minderjährigen Flüchtlingen beschrieben werden. Die angeführten Visualisierungen können als motivierende Beispiele für eine alternative Gestaltung des anspruchsvollen Zusatzunterrichts verstanden werden.

2.1 *Vorbereitung und Thesen*

In den Jahren 1993 und 2000 veröffentlichte Roger B. Nelsen zwei Sammlungen von Mathematikaufgaben unter dem Titel *Proofs without Words* (I und II) [5, 6]. Diese *Beweise ohne Worte* waren zuvor über Jahre hinweg in einigen amerikanischen Mathematikjournalen der Mathematical Association of America (MAA) erschienen und erfreuen sich großer internationaler Beliebtheit, so dass im

[1] In dieser kurzen Schrift kann leider nicht auf Traumata durch politische Verfolgung, Kriegserfahrungen, sexuelle Gewalt und andere Lebensbedrohungen eingegangen werden, die dazu führen, dass Menschen aus ihrem Geburtsland flüchten müssen, obwohl dies sicherlich bildungspädagogisch eine große Rolle spielen muss.

Jahr 2016 auch eine deutsche Version seiner Bücher [7] erscheinen wird. Wie ihr Name bereits impliziert, kommen diese Darstellungen mathematischer Sachverhalte (zumindest größtenteils) ohne Worte aus, was keineswegs bedeutet, dass sie nicht äußerst komplexe Zusammenhänge visualisieren können.[2] Dementsprechend möchten wir hauptsächlich die These untersuchen, dass derartige Mathematik in Bildern insbesondere zwei Aspekte abdecken kann, die für den Unterricht von geflüchteten Jugendlichen von Bedeutung sind:

1. Die Jugendlichen kommen aus sehr unterschiedlichen Ausgangssituationen und mit einer breiten Spannweite an Bildungserfahrungen nach Deutschland. Da *Beweise ohne Worte* ohne zusätzliche irritierende Sprachbarrieren auskommen, können sie als ergänzender Lernstandstest bzw. zur Einschätzung des tatsächlichen Mathematikverständnisses dienen.

2. Die Bilder laden zu alternativen Blickwinkeln (jenseits der Standardaufgaben) auf Mathematik ein. Sie können gemeinsam diskutiert werden und es kann damit experimentiert werden. Dementsprechend dienen *Beweise ohne Worte* dazu, die Kommunikation zu fördern und Hürden abzubauen, sowohl unter den Jugendlichen untereinander als auch zwischen der Lehrperson und dem/der Schüler_in.

Diese Thesen untersuchten wir im Rahmen von drei voneinander unabhängigen außerschulischen Ergänzungsstunden zur Mathematik. Vergleichbare ehrenamtliche Nachhilfeangebote gibt es an zahlreichen Orten und Einrichtungen, in denen minderjährige Geflüchtete untergebracht sind. Wir legten insbesondere Wert darauf, dass die Lehrpersonen eine zumindest mehrmonatige Erfahrung aufweisen konnten.

- Gruppe A: Schüler_in1[3] aus Eritrea (17 Jahre), Schüler_in2 aus Gambia (17 Jahre), Lehrperson: W, Mathematiklehrer_in im Ruhestand, Ort der Unterrichtsstunde: Kronach (Kleinstadt), regelmäßige wöchentliche Ergänzungsstunden, seit ca. sechs Monaten
- Gruppe B: Schüler_in3 aus Eritrea (17 Jahre), Schüler_in4 aus Somalia (17 Jahre), Lehrperson: Y, Pädagog_in, Ort der Unterrichtsstunde: Würzburg, regelmäßige wöchentliche Nachhilfe, seit ca. zwei Jahren
- Gruppe C: Schüler_in5 aus Afghanistan (17 Jahre), Schüler_in6 aus Äthiopien (17 Jahre), Lehrperson: T, Student_in Soziale Arbeit, Ort der Unterrichtsstunde: Würzburg, regelmäßige wöchentliche Nachhilfe, seit ca. sechs Monaten

In der obigen Kurzbeschreibung der Gruppen zeigt sich bereits, dass Lehrpersonen für ehrenamtlichen Ergänzungsunterricht oder Hausaufgabenbetreuung von minderjährigen Geflüchteten oftmals sehr unterschiedliche Ausbildungen und Qualifikationen mitbringen.

2.2 *Drei Beweise ohne Worte*

Bei der Auswahl der (im konkreten Fall dieser Beobachtung) drei Beweise wurde insbesondere Wert darauf gelegt, dass diese ohne vertieftes, spezielles Vorwissen verstanden werden können. Darüber hinaus wurden die Darstellungen durchgehend mit dem gleichen Aufgabentext versehen: „Welche mathematischen Beziehungen kann man aus dem Bild herleiten?“, welcher den Schüler_innen von der Lehrperson erklärt wurde. Folglich ist davon auszugehen, dass Verständnisschwierigkeiten nicht aufgrund einer sprachlichen Barriere bestanden. Hinsichtlich der Komplexität war eine leichte Steigerung von Beweis Nummer 1 bis Beweis Nummer 3 beabsichtigt, um eine demotivierende Erfahrung zu Beginn zu vermeiden.[4]

2.3 *Unterrichtsstunde und Beobachtungsbogen*

Zur Evaluation der Unterrichtsstunde verwendeten wir Beobachtungsbögen, welche vor und nach der Unterrichtsstunde von der jeweiligen Lehrperson ausgefüllt wurden. Zuvor erhielten alle Lehrenden eine „Handlungsanweisung“ (vgl. Abb. 4) zum Ablauf der Ergänzungsstunde.

In dieser Anweisung ist die Lehrkraft zunächst aufgefordert, einen ersten Abschnitt des Beobachtungsbogens[5] auszufüllen. Hierbei wird eine allgemeine Einschätzung zum Bildungsstand der Schüler_innen sowie im Speziellen zum Lernstand im Fach Mathematik abgefragt. Insbesondere wird unterschieden zwischen Rechenfertigkeiten, Problemerkennung und Problembehandlung. Dies soll ermöglichen, die reine Ausbildung in mathematischen Fertigkeiten von einem mathematischen Grundverständnis zu unterscheiden. Die Lehrkraft erhält auch die Möglichkeit anzugeben, ob die Mathematikkenntnisse der Schüler_innen in einer Gruppe nahe beieinander liegen oder stark

[2] Siehe etwa den Aufsatz [4], in dem Nelsen gemeinsam mit seinem Kollegen Claudi Alsina für den Einsatz von visualisierten Beweisen in allen Bereichen der höheren sowie der Schulmathematik plädiert.

[3] Hier und im Folgenden werden Namen und Geschlecht der Jugendlichen sowie der Lehrpersonen neutralisiert. Alle Beteiligten wurden darüber informiert, dass die Unterrichtseinheit Teil einer qualitativen Studie sein wird.

[4] Die Beweise sind im Original farbig gestaltet. In der Onlinefassung dieses Beitrags und auf der hinteren inneren Umschlagseite finden Sie eine farbige Version der Bilder.

[5] Der Beobachtungsbogen kann unter http://www2.math.uni-wuppertal.de/~oswald/Beobachtungsbogen.pdf aufgerufen werden.

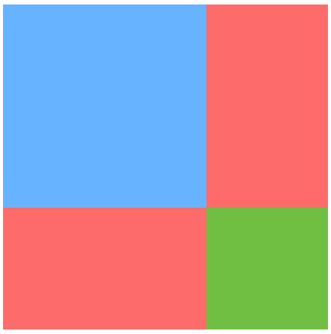

Abbildung 1. Beweis Nr. 1

Beweis „Nummer 1“ behandelt (im Gegensatz zu Nr. 2 und 3) zunächst keinen rein additiven Sachverhalt: Dargestellt ist die erste binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, wobei a und b jeweils die Kantenlängen des kleinen grünen und des großen blauen Quadrats sind. Die beiden rot gefärbten Rechtecke haben Fläche ab, was miteinander addiert zur angegebenen Gleichung führt.

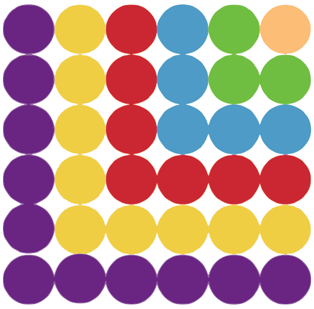

Abbildung 2. Beweis Nr. 2

Das Bild aus Abbildung 2 wurde als Beweis „Nummer 2“ an die Schüler_innen gegeben. Hier ist beschrieben, dass die Summe von ungeraden Zahlen in aufsteigender konsekutiver Reihenfolge eine Quadratzahl bildet, beispielsweise $1+3+5=9$. Es gilt allgemein sogar $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$, für natürliche Zahlen n. Die Zahlen werden durch Punkte, die pro Zahl unterschiedlich eingefärbt sind, dargestellt.

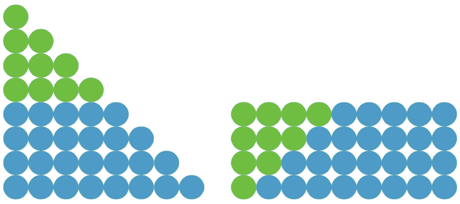

Abbildung 3. Beweis Nr. 3

Beweis „Nummer 3“ verwendet wieder die Idee, natürliche Zahlen als verschieden farbige Punkte darzustellen. Allerdings wird hier eine Menge von Zahlen markiert. Dabei muss erkannt werden, dass im linken und im rechten Bild gleich viele Punkte zu finden sind, einmal im Dreieck und einmal im Rechteck angeordnet. Dies zeigt die Gleichheit der Summe über n-vielen natürlichen Zahlen (Dreieck) und der Formel für die Fläche des Rechtecks mit kurzer Seite (hier also $\frac{8}{2}$) und langer Seite (hier $8+1$), allgemein gilt $1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}(n+1)$.

variieren. Zusätzlich wird im ersten Frageteil auf das Kommunikationsverhalten im Mathematik-Zusatzunterricht eingegangen: Wie wird über Mathematik kommuniziert und kommunizieren die Schüler_innen auch untereinander über Mathematik?

Für die eigentliche Unterrichtsstunde wurde den Lehrkräften ein Aufgabenblatt mit den drei oben beschriebenen Visualisierungen von mathematischen Gleichungen gegeben (siehe hintere innere Umschlagseite des Heftes). Entsprechend der Ablaufbeschreibung (Abb. 4) wurden den Schüler_innen die Aufgaben einzeln vorgelegt und miteinander in Teilen oder vollständig gelöst.

Im Anschluss daran füllten die Lehrkräfte den zweiten umfangreicheren Teil des Beobachtungsbogens aus. Dabei wurde zum einen auf den Ablauf der Unterrichtsstunde eingegangen: Wie lange dauerte die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben? Wie intensiv musste bei den jeweiligen Aufgaben/in den einzelnen Phasen des Ablaufs unterstützt werden? Da es den Lehrpersonen zur Wahl stand, zwei oder drei Aufgaben zu behandeln, wurde zusätzlich nach der Entscheidung und einer Begründung hierfür gefragt. Im dritten Teil des Beobachtungsbogens sollte die Reaktion der Schüler_innen auf die *Beweise ohne Worte* beurteilt werden. Unterschieden wurde hier zwischen der ersten Reaktion (von Neugier bis Ablehnung) und dem Verlauf der Auseinandersetzung mit den jeweiligen Aufgabenstellungen: Änderte sich beispielsweise das Verhalten vom ersten zum zweiten Beweis, so könnte eine anfängliche Reaktion lediglich auf die ungewohnte Art des Mathemati-

Handlungsanweisung für den Unterrichtsversuch
Füllen Sie bitte zunächst Teil 1 des Beobachtungsbogens [vgl. www2.math.uni-wuppertal.de/~oswald/Beobachtungsbogen.pdf] aus und machen Sie sich bitte anschließend vertraut mit den drei Beweisen (und der darin inkludierten Mathematik). Die Lösungsskizzen sind nur für Sie bestimmt. Bitte geben Sie diese nicht an Ihre Schüler innen weiter.

1. *Phase 1:* Ihnen liegen drei *Beweise ohne Worte* vor, welche der Reihenfolge nach mit 1–3 durchnummeriert sind. Legen Sie dem/der Schüler_in (oder der Gruppe von Schüler_innen) bitte zunächst Beweis Nummer 1 vor und fragen Sie ergebnisoffen nach, ob verstanden wird , um welche Mathematik es hier grundsätzlich geht. Lassen Sie den Schüler_innen zunächst etwa fünf Minuten Zeit. Sollte keine Antwort oder Idee kommen (wahrscheinlicher Fall!), so erklären Sie ausführlich (etwa mit Beschriftungen der bildlichen Symbole, Nebenrechnung, Anwendungsbeispiel, . . .), welcher mathematische Sachverhalt hier abgebildet wird.

2. *Phase 2:* Wenn Sie den Eindruck haben, dass die Schüler_innen den Zusammenhang zwischen Bild und Mathematik verstanden haben, fahren Sie mit Beweis Nummer 2 fort. Geben Sie wieder ausreichend Zeit, um sich mit den Bildern vertraut zu machen. Motivieren Sie die Schüler_innen sich eigenständig Notizen zu machen bzw. die Bilder zu beschriften. Geben Sie nach einiger Zeit Tipps und helfen Sie bei der Lösungsfindung. Beenden Sie diese bitte erst, nachdem die richtige Formel einmal korrekt niedergeschrieben wurde.

3. *Phase 3:* Wenn Sie den Eindruck hatten, dass Phase 2 positiv bzw. (Erkenntnis-)gewinnbringend verlaufen ist, wiederholen Sie diese mit dem Beweis Nummer 3.

4. *Phase 4:* Bitte füllen Sie den Beobachtungsbogen sorgfältig aus. Beachten Sie bitte, dass einige Fragen lediglich beantwortet werden können, wenn mehrere Schüler_innen unterrichtet werden. Diese werden mit der Kennzeichnung „Gruppenfrage“ aufgeführt. In diesem Fall, füllen Sie bitte pro Schüler_in einen Beobachtungsbogen aus, wobei die allgemeinen Fragen nur einmal beantwortet werden müssen. Vielen Dank für Ihre Zusammenarbeit!

Abbildung 4. Handlungsanweisung

klernens zurück geführt werden. Zusätzlich wurde gefragt, ob die *Beweise ohne Worte* zu besonderen alternativen Herangehensweisen an ein mathematisches Problem motiviert haben oder ob eine Interaktion unter den Schüler_innen beobachtet werden konnte. Abschließend wurde im vierten Teil des Beobachtungsbogens der Lehrkraft die Möglichkeit gegeben, Ihre Meinung zum Einsatz von *Beweisen ohne Worte* im Ergänzungsunterricht von minderjährigen Flüchtlingen darzulegen. Hierbei wurde auf verschiedene Aspekte eingegangen. Könnten derartige Visualisierungen als Lernstandstests oder als deren teilweise Ergänzung eingesetzt werden? Zusätzlich konnte die Lehrkraft zwischen einer Vielzahl an möglichen Vor- und Nachteilen von *Beweisen ohne Worte* gezielt ankreuzen bzw. eigene Kritikpunkte anfügen. Insbesondere ist in diesem letzten Abschnitt von Interesse, dass die Lehrkräfte nochmals aufgefordert wurden, ihre Einschätzung zum Kenntnisstand und zur mathematischen Begabung ihrer Schüler_innen darzulegen. Diese zweite Einschätzung soll im Folgenden mit der ersten Beantwortung verglichen werden.

3 Auswertung

Zusätzlich zu den Beobachtungsbögen wurde jeweils ein abschließendes Gespräch mit den drei Lehrpersonen geführt. Hierbei legten sie ihre Einschätzung bezüglich Verlauf und Erfolg der Ergänzungsstunde dar. Zunächst sei erwähnt, dass die generelle Rückmeldung der Lehrkräfte sehr positiv war. Durchweg wurden die *Beweise ohne Worte* als willkommene Abwechslung zum gewohnten Aufgabenrechnen angenommen und durchgeführt. Überraschend war, dass in allen Unterrichtseinheiten die gesamten drei Aufgaben bearbeitet wurden. Obwohl die Option explizit angegeben war, wurde keine der Ergänzungsstunden bereits nach der zweiten Aufgabe abgebrochen. Aus den Beschreibungen der Lehrpersonen wurde ersichtlich, dass in den einzelnen Gruppen grundsätzlich eine sehr unterschiedliche Motivation beim Lernen von Mathematik vorherrscht. Während die Jugendlichen der Gruppe A prinzipiell eine Begeisterung in die Ergänzungsstunden mitbringen, beschrieben die Lehrpersonen, dass in den Gruppen B und C Mathematik generell als unbeliebt gilt.

Wenden wir uns den Beobachtungsbögen zu und beginnen mit den Einschätzungen *vor der Unterrichtsstunde* (Fragen 1 (a)–(e)): Die beschriebenen gruppenspezifischen Motivationsunterschiede spiegeln sich nicht unbedingt wider bei einer Analyse der Antworten zu Teil 1 bezüglich Vorbildung und Kenntnisstand. Hier beschreibt etwa W seine Schüler_innen innerhalb der Lerngruppe mit sehr unterschiedlichen Voraussetzungen. Während W etwa der Schüler_in1 eine sehr gute Begabung für Mathematik sowie ein gutes Verständnis bei jedoch „elementaren" Kenntnissen attestiert, sieht W bei der Schüler_in2 eine „kaum erkennbare" Begabung, beschreibt Schüler_in2 sogar als „mathematisch ganz schwach". Dies wird verdeutlicht bei der Frage 1(b): hier wird Schüler_in2 durchweg als „sehr schlecht" eingestuft, während bei Schüler_in1 Problemverkennung (normal), Problembehandlung (schlecht) und Rechentechnik (gut) unterschiedlich und grundsätzlich tiefer eingeschätzt wurden. Hier der Vergleich mit den beiden anderen Gruppen, deren Schüler_innen als grundsätzlich eher unmotiviert und uninteressiert beschrieben wurden: Y gibt an, dass sowohl Schüler_in3 als auch Schüler_in4 auf „wenig schulische Vorbildung im Herkunftsland" zurückgreifen können, Schüler_in4 zusätzlich drei Jahre Schulerfahrung in Deutschland hatte. (T konnte keine Einschätzung zu Frage 1(a) abgeben.) Die vier Schüler_innen 3–6 wurden in allen drei Kategorien zum Kenntnisstand als „normal" eingestuft, der Schüler_in3 als auch der Schüler_in4 wurde in 1(c) darüber hinaus ein vorhandenes „mathematisches Verständnis" attestiert. Bei der Frage 1(e) zur Variation der Mathematikkenntnisse kreuzte W „sehr stark" an, Y und T lediglich „in einigen Fällen". Dieser erste Beobachtungsteil zeigt folglich deutlich, dass die Voraussetzungen sowohl zwischen Wissensstand der Jugendlichen als auch zwischen den Gruppen selbst als sehr unterschiedlich beschrieben werden. Hier spiegeln sich insbesondere die Erfahrungswerte, Voraussetzungen und Ausbildungen der Lehrkräfte wider.

Wenden wir uns dem Teil der Beobachtungsbogens zu, der *nach der Unterrichtsstunde* (Fragen 2 bis 4) ausgefüllt wurde. Hier fällt direkt auf, dass Dauer und benötigte Hilfestellungen bei den einzelnen Schüler_innen stark variierte. Zur Übersichtlichkeit fassen wir diese in Tabelle 1 zusammen.

Insgesamt kann man eine Durchschnittszeit pro bearbeiteter Aufgabe von ca. 15 Minuten und eine häufige Hilfestellung aus den Beobachtungen ablesen. An dieser Stelle sei hervorgehoben, dass die Lehrkräfte angewiesen waren, die Aufgaben erst zu beenden, nachdem die richtige Lösung einmal zu Papier gebracht worden war. Dementsprechend erscheint die Bearbeitungszeit von 15 Minuten durchaus angemessen. Dass häufige Hilfestellungen benötigt wurden, war ebenso zu erwarten: Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, bei eigenständiger Bearbeitung, ist in etwa zwischen Sekundarstufe II und einem ersten Hochschulsemester im Fach Mathematik einzuordnen.

Im Fragenteil 3 wurde nach Mathematikverständnis und Reaktionen der Jugendlichen gefragt. Wir führen dies anhand der Gruppen auf:

- Schüler_in1 reagierte auf Beweis 1 und Beweis 2 „positiv". Die Lehrerperson beschrieb, dass das Verständnis erst geweckt werden musste und dadurch Interesse an den beiden ersten Aufgaben bestand. Schüler_in2 hingegen stand beiden Beweisen „neutral" gegenüber und zeigte lediglich „geringes" Interesse im Verlauf der Auseinandersetzung mit den Beweisen.
- Schüler_in3 reagierte auf beide Beweise „positiv" und veränderte ihr/sein Verhalten nicht, Schüler_in4 hingegen reagierte „positiv" auf die erste Aufgabe, jedoch „neutral" auf die zweite, ohne merkliche Verhaltensänderung während des Verlaufs.
- Die Schüler_innen 5 und 6 verhielten sich interessanterweise sehr unterschiedlich. Während Schüler_in5 „positiv" reagierte und „ehrgeizig aufgrund von Erfolgserlebnissen" wurde, startete Schüler_in6 mit einer „neutral" bis „desinteressierten" Reaktion und verhielt sich „eher gegenteilig". Bei Aufgabe 2 reagierten beide Jugendlichen „neutral". Die Lehrkraft vermerkte, dass ihr „Interesse sank, da keine Zusammenänge selbstständig erkannt wurden".

Alle Jugendlichen kommunizierten verbal und bis auf Schüler_in6 auch schriftlich, Schüler_in5 und 6 zusätzlich mit „Gesten" und Schüler_in6 mit „anderen Hilfsmitteln". Untereinander wurde grundsätzlich wenig bis kaum kommuniziert. Bei Frage 3(f) bezüglich kreativer Ideen und alternativer Herangehensweisen wurde bei Schüler_in1 „in Ansätzen: Erkennen von Summen, Vierecksfiguren" genannt, bei Schüler_in3 zu Aufgabe 3 eine Flächenberechnung des Dreiecks durch Zerlegung in verschiedene Flächen angegeben und bei Schüler_in4 die Beschreibung der sichtbaren Objekte. Die Beobachtungen zum ungefähren jeweiligen Anteil (in Prozentangabe) der Schüler_innen bei der Problemlösung (Frage 3(h)) fassen wir in Tabelle 2 zusammen.

Hier fällt direkt die große Varianz zwischen den Angaben zu den einzelnen Schüler_innen auf. Diese deckte sich weitgehend mit den Einschätzungen aus den abschließenden Ergänzungsgesprächen. Insbesondere Schüler_in1 und Schüler_in5 wurden als tendenziell als begeisterungsfähig und neugierig beschrieben, wohingegen Schüler_innen 2, 3 und 4 generell Schwierigkeiten im

Tabelle 1

Schüler_in	Phase 1	Hilfe	Phase 2	Hilfe	Phase 3	Hilfe
Schüler_in1	20 Min.	einige Male	20 Min.	häufig	15 Min.	einige Male
Schüler_in2	25 Min.	durchgehend	20 Min.	häufig	20 Min.	häufig
Schüler_in3	15 Min.	häufig	10 Min.	häufig	10 Min.	durchgehend
Schüler_in4	15 Min.	häufig	15 Min.	häufig	10 Min.	durchgehend
Schüler_in5	7 Min.	einige Male	10 Min.	häufig	12 Min.	häufig
Schüler_in6	7 Min.	häufig	10 Min.	durchgehend	12 Min.	durchgehend

Tabelle 2

Schüler_in1	Schüler_in2	Schüler_in3	Schüler_in4	Schüler_in5	Schüler_in6
40	10	5	10	50–60	20–30

Fach Mathematik aufwiesen. Nichtsdestotrotz legte die Lehrkraft Y dar, dass die Schüler_innen 3 und 4 einen Transfer zu geometrischen Aufgaben herstellten und bei Aufgaben 2 und 3 Flächeninhalte von Dreiecken und Rechtecken assoziierten.

Im letzten Frageteil 4 wurde nach der Einschätzung zum Einsatz von *Beweisen ohne Worte* im Rahmen von Ergänzungsstunden von minderjährigen Geflüchteten gefragt. Hier wollen wir zunächst auf die Fragen zur Einschätzung der sechs Jugendlichen eingehen. Bei 4(b) sollte die gleiche Tabelle zu Problemerkennung (PE), Problembehandlung (PB) und Rechentechnik (RT) von Frage 1(b) nochmals ausgefüllt werden. Überraschend war insbesondere, dass sich die Einschätzungen in vier Fällen (Schüler_innen 1, 3, 4 und 5) verändert haben. In der veranschaulichenden Tabelle 3 unterscheiden wir pro Schüler_in zwischen „vor" (Frage 1(b)) und „nach" (Frage 4(b)) der Unterrichtsstunde. Wir heben fett hervor, wenn es eine Veränderung zum positiven gegeben hat, negative Veränderungen markieren wir durch kursive Schrift.

In sieben Fällen wurde die Einschätzung der Lehrpersonen nach oben korrigiert, in zwei Fällen hatte sich diese verschlechtert. Insgesamt ist diese unerwartet hohe Anzahl an Veränderungen bemerkenswert und deutet darauf hin, dass die *Beweise ohne Worte* insbesondere bei der Feststellung des Kenntnis- und Verständnisstands ergänzend eingesetzt werden können. In Frage 4(a) wurde konkret nach dieser Einsetzbarkeit als Lernstandstests gefragt. Die Lehrkraft T antwortete hier: „ ja, da so Lerntypen gefördert werden, die eventuell im Klassenunterricht untergehen (visuelles Denken)". W führte an: „ Ja, besonders Abstraktions- und Transfervermögen" werden durch *Beweise ohne Worte* ersichtlich. Wohingegen Y kritisierte „ohne Worte schwierig: Lernende benötigen Fragestellung und Hilfen auf sprachlicher Ebene". Zusammenfassend herrschte folglich die Meinung vor, dass die bildlichen Aufgaben als Hilfe der Einschätzung des Lernstandes verwendet werden können, jedoch in Kombination mit verbalen beziehungsweise schriftlichen Hilfestellungen.

In den Fragen 4(d) und (e) wurde allgemein nach positiven Faktoren und Nachteilen bei dem Einsatz von *Beweise ohne Worte* gefragt. Bei Ersterem war eine Liste an Möglichkeiten gegeben, von denen, mit Ausnahme der letzten, jede mindestens einmal angekreuzt worden ist. Diese sind im Folgenden mit den jeweils befürwortenden Lehrpersonen in Klammern aufgeführt:

- Sprachbarrieren werden ausgeklammert (W, T)
- Schreibrichtung spielt keine Rolle (W)
- länder- und kulturspezifische Operationszeichen und Rechenwege werden weitgehend umgangen (Brücke zwischen kulturellen Unterschieden) (W, Y)
- Reduktion der Angst vor Fehlern (Y)
- Anregung zu kreativen Lösungen (W, T)
- Abwechslung im Ergänzungsunterricht (W, T)
- Interesse an Mathematik wird geweckt (W, T)
- Einblick für die Lehrperson in jeweilige spezifische Rechenarten/Herangehensweisen (W, T, Y)
- keine Fachbegriffe werden benötigt (0)

Darüber hinaus führte Y als positiven Faktor an, dass „unterschiedliche Lösungswege möglich sind". Bemerkenswert ist, dass alle drei Lehrpersonen trotz beträchtlicher Unterschiede zwischen den einzelnen Jugendlichen und Gruppen es insbesondere als positiv empfanden, durch die unkonventionelle Aufgabenstellung einen Einblick in typische Rechenarten und Herangehensweisen zu erhalten. Prinzipiell fällt wiederum auf, dass die Lehrpersonen W und T, deren Schüler_innen 1 und 5 als tendenziell stärker im Fach Mathematik beschrieben worden waren, wesentlich mehr

Tabelle 3

	vor 1	nach 1	vor 3	nach 3	vor 4	nach 4	vor 5	nach 5
PE	normal	**gut**	normal	**gut**	normal	*schlecht*	normal	**gut**
PB	schlecht	**normal**	normal	normal	normal	normal	normal	**gut**
RT	gut	gut	normal	*schlecht*	normal	**gut**	normal	**gut**

positive Faktoren angaben als die Lehrkraft Y. Eine mögliche Erklärung hierfür spiegelt sich auch in den Antworten der Frage 4(e) wider, bei der Y angab, dass die Aufgaben als „sehr schwierig" wahrgenommen wurden und es „mehr Verbindungen zwischen den Aufgaben geben" sollte. Auch die Lehrperson T schrieb, dass es auf Grund des hohen Niveaus nicht einfach war, „die Aufgabenstellung klar zu machen" und W legte dar, dass zunächst „Grundlagen (Flächenformel, Quadrat, Rechteck)" gelegt werden müssten. Insgesamt wurden die drei angegebenen Aufgaben folglich als zu schwierig empfunden. Bei einer zukünftigen Anwendung müsste folglich Hauptaugenmerk darauf liegen, die Aufgaben wohlüberlegt an den jeweiligen Kenntnissstand der Schüler_innen anzupassen. Insbesondere die Lehrperson Y betonte jedoch, dass sie/er prinzipiell die Idee der Mathematik durch Bilder als hilfreich und motivierend betrachtet.

4 Fazit

Sicherlich lässt sich auf der Grundlage der beschriebenen Beobachtungen keinesfalls ein umfassendes Urteil ableiten, sondern bestenfalls Hinweise und Anregungen für den Einsatz von *Beweisen ohne Worte* im ergänzenden Mathematikunterricht von minderjährigen Flüchtlingen geben. Diese verorten wir in der Tradition operativer Beweise, welche etwa in [9, S. 226] charakterisiert wurden. Hier wird betont, dass „vielmehr [...] die Dynamik hinter der Entdeckung von Mustern im Forschungs- und Lernprozess" [9, S. 227] zählt. Vergleichbare Bilder zu mathematischen Sachverhalten treten in unterschiedlichsten Zusammenhängen sowie Schwierigkeitsgraden auf, die dem Kenntnisstand der jeweiligen Gruppe beziehungsweise den Jugendlichen angepasst werden können. Als Quellen hierfür können etwa die Sammelbände [5, 6], beziehungsweise [7], für das Niveau der Sekundarstufe II (und höher) sowie [2] und [9, 10] für Sekundarstufe I und Primarstufe dienen.

Als unerwartetes und damit besonders interessantes Ergebnis werten wir jedoch, dass neben Effekten auf die Schüler_innen auch Auswirkungen auf die Lehrpersonen zu erkennen waren. In mindestens vier von sechs Fällen differenzierte und veränderte sich der Blick auf die Fähigkeiten der jeweiligen Schüler_innen. Damit einher ging die Einschätzung, dass sich das eigene Verständnis für spezifische Herangehensweisen und Rechenarten vertieft hatte. Dies deuten wir als Hinweis auf eine zumindest teilweise Bestätigung der in Abschnitt 2.1 beschriebenen These: *Beweise ohne Worte* können sicherlich als Hilfsmittel dienen, um die Einschätzung des Lernstandes abzurunden, insbesondere auch, weil sie weitgehend unabhänging sind von der Vorbildung der jeweiligen Lehrperson.

Literatur

[1] Bundesfachverband unbegleiteter minderjähriger Flüchtlinge, Studie des Bundesfachverbands unbegleiteter minderjähriger Flüchtlinge, http://www.b-umf.de/images/umf-jugendhilfe-uebersicht.pdf (2016).

[2] Conway, J. H., Guy, R. K., Zahlenzauber. Von natürlichen und imaginären Zahlen. *Basel: Birkhäuser* (1997).

[3] Diakonie Deutschland, Thema kompakt: Unbegleitete minderjährige Flüchtlinge, http://tinyurl.com/olc8o8w (2016).

[4] Nelsen, R. B., Alsina, C, An Invitation to Proofs without Words, *European J. Pure. Apple. Math.*, 3 (2010), S. 118–127.

[5] Nelsen, R. B., *Proofs without Words – Exercises in Visual Thinking*, Mathematical American Association (1993).

[6] Nelsen, R. B., *Proofs without Words – More exercises in Visual Thinking*, Mathematical American Association (2000).

[7] Nelsen, R. B., *Beweise ohne Worte*, herausgegeben von N. Oswald, Springer, 2016.

[8] Staatsinstitut Bildungsforschung, Handreichung Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München, Berufsschulpflichtige Asylbewerber und Flüchtlinge (2014).

[9] Wittmann, E. Chr., Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik, *mathematica didactica*, **37** (2014), 213–230.

[10] Wittmann, E. Chr., Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art", *mathematica didactica*, **38** (2015), 239–255.

Nicola Oswald, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstraße 20, 42119 Wuppertal. oswald@uni-wuppertal.de