Ein Standardwerk zur Theorie des Rechnenlernens
Michael Gaidoschik: Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht

Rezensiert von Wolfram Meyerhöfer

Wer sich in der gelegentlich schillernden, gelegentlich kompetenten, gelegentlich abstrusen Welt der „Rechenschwäche" umsieht, der kennt Michael Gaidoschik als klugen, reflektierten Praktiker, der versucht zu verstehen, welche stofflichen Hürden beim Mathematiklernen zu bearbeiten sind, und der Wege für diese Bearbeitung sucht und aufzeigt. Michael Gaidoschik hat nun das Buch zu seiner Promotionsschrift vorgelegt, und ich war gespannt, auf welche Weise ein bereits erfahrener Autor den Weg in die Qualifikationsprosa nehmen würde.

Das Werk verfügt – für eine gekürzte Dissertation – über monströse Ausmaße (544 S.). Sie kommen aber vorrangig dadurch zustande, dass hier ein Standardwerk zum Rechnenlernen, konkret zur Theorie der Ablösung vom zählenden Rechnen, vorgelegt wird, welches im Theorieteil eher Habilitationscharakter hat. Die deutsch- und die englischsprachige Debatte zum Zählen und zur Ablösung vom zählenden Rechnen werden mit einem (unausgesprochenen) Vollständigkeitsanspruch tiefgründig erschlossen. Der Autor nimmt eine überaus verständige, differenzierte Abwägung der vorgetragenen Argumente und der empirischen Erschließungen vor. Im Rahmen dieser kritischen Würdigung erschließt er Konsistenzen und Inkonsistenzen in der Durchführung und Interpretation der vorliegenden empirischen Untersuchungen, so dass sich viele scheinbare Widersprüche erklären. Auch in der Darstellung und Deutung der eigenen empirischen Untersuchungen ist die Argumentation auffällig sauber. An jedem einzelnen Argument wird herausgearbeitet, welchen Allgemeinheitsanspruch es hat – am Ende des empirischen Teils wünscht man sich geradezu eine verkürzende Freihändigkeit herbei.

Theorien zum Zählen und zur Ablösung vom zählenden Rechnen

Gaidoschiks Thema ist die zentrale Aufgabe des arithmetischen Anfangsunterrichts: Die Begleitung der Schüler vom zählenden Rechnen zum nichtzählenden Rechnen, also zum Rechnen mit Hilfe von Rechenstrategien. Ihn interessiert der Unterschied zwischen jenen Schülern, „bei welchen das zählende Rechnen bloß vorübergehend ist und jenen, die diese Lösungsstrategie dauerhaft zu ihrer Hauptstrategie machen, also *verfestigen*." (S. 16) Er fragt sich

> welche Lernprozesse manche Kinder im Laufe der Zeit dazu befähigen, zählende Strategien durch nichtzählende (Faktenabruf und Ableitungen) zu ersetzen und aus welchen Gründen andere Kinder ebendies nicht oder nicht in ausreichendem Maße oder nicht innerhalb der gewünschten Zeit tun. (S. 17)

Auf dem Weg zur Begründung seiner Fragestellung schlägt Gaidoschik zunächst eine Schneise in den Dschungel der Begriffe (Abschnitt 2.1). Das Feld wird rund um additive Grundaufgaben, Faktenabruf, Auswendigwissen, Automatisierung, Ableitung(sstrategien), operative, heuristische, Fakten nutzende oder zählende Strategien abgesteckt.

Dann nimmt er uns mit auf eine Abenteuerreise durch die Forschung zum Zahlerwerb. In den Abschnitten 2.2 bis 2.9 (S. 25–95) werden vor allem die empirischen Studien aus dem englischsprachigen Raum vorgestellt. Gaidoschik beschränkt sich nicht auf eine Wiedergabe von Resultaten, zumal die Resultate der Empirien widersprüchlich sind. Wie mit dem Skalpell zerlegt er die Versuchsdesigns, die empirischen Resultate und die Deutung der empirischen Resultate durch die Autoren. Dabei zeigt sich, dass die meisten Studien bei näherer Analyse erhebliche Probleme bergen und viele scheinbare Widersprüche in den empirischen Resultaten der verschiedenen Studien sich bei sauberer Deutung des empirisch wirklich Geleisteten klären. Dies erscheint mir als umso problematischer, als im angelsächsisch-utilitaristisch-pragmatistischen Ansatz viele empirische Untersuchungen in praktische Anweisungen und curriculare Materialien gemündet sind. Manche Deutungen erscheinen dabei geradezu als Volten. So stellten Geary u. a. (1996) fest, dass chinesische Schüler am Ende von Klasse 1 von den gegebenen Aufgaben im Zahlenraum bis achtzehn zu 91 % das Ergebnis aus dem Gedächtnis abrufen (Ende Klasse 2 zu etwa 100 %), zu weiteren 6 % leiten sie das

Ergebnis ab. US-Schüler lösen zum Ende von Klasse eins 28 % der Aufgaben durch Faktenabruf, Ende des dritten Schuljahres 56 %, zu diesem Zeitpunkt wurden noch 40 % der Aufgaben zählend gelöst.

Die Erklärungen von Geary u. a. beziehen sich nun zum einen auf die Besonderheiten der ostasiatischen Sprachen: Die chinesischen Zahlwörter erlauben kürzere Artikulationszeiten als die englischen und die deutschen. Dadurch können mehr Zahlen im Arbeitsspeicher verfügbar gehalten werden, was das Zählen ohne Zählmaterial erleichtert. Außerdem entspricht die Zahlwortbildung ab zehn auf sehr transparente Weise der Zahlnotation im dezimalen Stellenwertsystem. Die zweite Erklärung von Geary u. a. bezieht sich auf die Quantität des Mathematikunterrichts: Chinesische Kinder hatten jeweils etwa 25 % mehr Mathematikunterricht als US-amerikanische. Keinen Gedanken widmen Geary u. a. mathematikkulturellen Unterschieden, ebenso werden die Qualität oder auch nur die Ziele des schulischen und vorschulischen Mathematikunterrichts im jeweiligen Land nicht in den Blick genommen. Insbesondere findet keine Auseinandersetzung mit der dortigen Zählorientierung statt. (S. 52–58)

Ähnlich verhält es sich bei Carpenter und Moser (1984), die 88 Kinder vom Beginn der ersten bis zur Mitte der dritten Schulstufe Aufgaben rechnen ließen, aber immerhin auch den Unterricht berücksichtigten. Im Unterricht wurden die Kinder zumindest in den ersten eineinhalb Jahren „nachdrücklich ermutigt“, Aufgaben mit Hilfe von Zählmaterial zu lösen. Die Kinder tun das auch über einen langen Zeitraum. Ziel des Unterrichts ist aber für Mitte des zweiten Schuljahres das Lösen der Aufgaben über Faktenabruf oder Ableitung. Carpenter und Moser sprechen von „fact mastery“, wenn ein Kind zu einem Erhebungszeitraum mindestens zwei Drittel der Aufgaben durch Faktenabruf oder Ableitung löst. Im Zahlraum bis 18 erreichen lediglich 24 % der Kinder diese Meisterschaft bereits Mitte zweiten Schuljahres (45 % im Zahlraum bis 10), ein Jahr später 70 % (89 % im Zahlraum bis 10). Carpenter und Moser schließen, es bestünde „some evidence“, dass ein solcher zählorientierter Unterricht „can be effective“. Gaidoschik arbeitet heraus, dass es nicht einleuchtet, ausschließlich einen zählorientierten Unterricht zu betrachten und vor dem Hintergrund der empirischen Resultate zu schlussfolgern, dass diese Zählorientierung erfolgreich sei bei der Überwindung des Zählens – zumal unerforscht bleibt, wie im Zuge des zählorientierten Unterrichts die Ablösung vom Zählen gestaltet wird und bei den Schülern stattfindet. (S. 43–49)

Rezipiert Gaidoschik in den Abschnitten 2.2 bis 2.9 vorrangig empirische Studien aus dem englischsprachigen Raum, so treten im Weiteren auch deutsche Studien und Ansätze hinzu, die immer mehr in den Vordergrund treten. Implizit zeigen sich hier unterschiedliche Wissenschaftstraditionen: Die deutschen Studien sind vorrangig Querschnittsstudien, die das Lösen oder die Lösungswege von Schülern zu bestimmten Zeitpunkten in den Blick nehmen. Die angelsächsischen Studien arbeiten eher längsschnittlich und versuchen, zu konkreten didaktischen Designs bzw. Anweisungen zu gelangen. Das wirkt zunächst einleuchtender, komplexer und lösungsorientierter. Die Analysen von Gaidoschik deuten aber an, dass diese Studien der Komplexität, die sie eröffnen, eher nicht gerecht werden, dass die geschlussfolgerten Designs bzw. Anweisungen nicht durchgehend einleuchten und dass die längsschnittlichen Ansätze nicht zu befriedigenderen Resultaten führen. Als Leser nimmt man vor diesem Hintergrund die etwas schlichter gestrickten deutschen Studien nahezu erleichtert zur Kenntnis. Die deutschen Didaktik-Ansätze, die oftmals eher mit einem (weniger systematisch-empirisch belegten) Erfahrungswissen und aus inhaltlich-logischen Überlegungen heraus begründet werden, fallen vor dem Hintergrund der recht technokratischen angelsächsischen Ansätze durch eine gewisse Erdung und gleichzeitig durch einen umfassenderen Anspruch auf.

Im Abschnitt 2.10 (S. 95–140) leistet Gaidoschik eine Gesamtschau der arithmetischen Entwicklung.

> Die leitende Frage bei dieser Gesamtschau lautet: Über welche Voraussetzungen muss ein Kind verfügen, um die einzelnen, in qualitativen Interviews erfassbaren Rechenstrategien jeweils verstehen und/oder anwenden zu können? Erst nach Beantwortung dieser Frage lässt sich in weiterer Folge (vgl. Kap. 3) sinnvoll überlegen, wie Kinder bei der Aneignung *erwünschter* Strategien gefördert werden können – und zuvor schon, welche Strategien wir im Unterricht mit Kindern berechtigter Weise in welchem Alter anstreben sollten. (S. 96)

Dieser umfassende Anspruch wird im weiteren eingelöst. Gaidoschik strukturiert die theoretische Aufarbeitung entlang der folgenden Themen:

- „Pattern numbers“ (Zahlen als figurale Muster) und „counted numbers“ (Anzahlen, aber nur konkret gedacht) als konzeptuelle Voraussetzung des ersten Rechnens,
- (abstraktes) Verständnis von Zahlen als Anzahlen,

- Additives Operationsverständnis,
- Alleszählen, Ökonomisierung durch Weiterzählen, Weiterzählen vom größeren Summanden und Kommutativität
- Strategien auf Basis gespeicherter „Fingerzahlmuster“,
- „Number-after-rule“,
- Teile-Ganzes-Konzept,
- Additionsstrategien auf Grundlage von Kovarianz,
- Subtraktion als Umkehrung der Addition,
- Strategien auf Grundlage von kovarianten Zusammenhängen zwischen zwei Subtraktionen,
- Strategien auf Grundlage kompensatorischer Zusammenhänge,
- Strategien für Aufgaben mit Zehnerüber- bzw. -unterschreitung.

Gaidoschik versucht sich innerhalb der Gesamtschau der arithmetischen Entwicklung nicht in der Konstruktion eines grafisch leicht greifbaren Modells der Entwicklung des Rechnens, wie es etwa Fritz & Ricken (2008) oder Krajewski (2008) in der psychologischen Tradition vorlegen. Er zeigt in seiner Gesamtschau implizit, dass solche grafisch leicht greifbaren Modelle als grobe Orientierung nützlich sein mögen, aber die Komplexität der je individuell unterschiedlich laufenden Prozesse kaum so umfassend abbilden, dass sie den Anforderungen in einer Schulklasse oder in einer Einzelförderung gerecht werden. Er zeigt zudem in seiner kritischen Würdigung der Beiträge der Kognitionspsychologie (2.12, S. 146–159), dass der Teufel des Verstehens von Schülerrechenwegen und -denkweisen dort lauert,

- wo fast gleiche Sprechakte und Handlungen mit durchaus verschiedenen Verstehenstiefen verbunden sein können,
- wo das Kind das gleiche Problem zu unterschiedlichen Zeitpunkten verschieden bearbeitet und
- wo in Konstrukten wie „Mengenvorwissen“ oder „Zahlenvorwissen“ so verschiedene Aufgaben versammelt werden, dass kaum benannt werden kann, was die mit solchen Konstrukten errechneten Korrelationen erzählen und welche Folgerungen sich daraus für Lern- oder Lehrprozesse ergeben.

Es gibt also ein Problem der Passung von singulärer Handlung und Konzeptualisierung des kindlichen Denkens, es gibt ein Problem der Stabilität von Erkenntnis und von Routine beim Kinde und es gibt ein Problem bei der Reduzierung der Komplexität in Konstrukte hinein.

Dass diese Probleme empirisch und theoriesprachlich beschrieben werden können, sieht man bei Gaidoschik – dass es aufwändig ist, sieht man aber auch. Zum Trost sei gesagt, dass mir im *Lern*prozess alle aufgezeigten Probleme durch reichhaltige Lernumgebungen bearbeitbar erscheinen.

In Kapitel 3 (S. 167–206) stellt Gaidoschik die Frage, ob es ein lohnendes Unterrichtsziel ist, eine frühe Automatisierung der additiven Grundaufgaben anzustreben. Man mag hier zu einem einfachen „Ja“ neigen, aber Gaidoschik lässt sich auch hier nicht von einer präzisen Analyse abbringen. Er zeigt zunächst, dass die Automatisierung der Grundaufgaben für das schriftliche Rechnen zwar eine günstige Voraussetzung ist, aber keine notwendige Bedingung (was man auch daran sieht, dass manche Schüler mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) wieder richtige Resultate herstellen, wenn sie die schriftlichen Verfahren erlernen: Sie können nun nämlich wieder zählend zu korrekten Ergebnissen kommen). Er zeigt dann, dass beim halbschriftlichen Rechnen für die Abarbeitung der Teilschritte zählendes Rechnen noch möglich ist, dass es hier aber *konzeptuell* ein Hindernis ist. Für das Kopfrechnen mit zwei- und mehrstelligen Zahlen wird Zählen als weitgehendes Hindernis herausgearbeitet und es wird gezeigt, dass der Taschenrechner nichtzählendes Rechnen zum Überschlagen der Ergebnisse geradezu zwingend erfordert.

Nun bleibt aber die Frage, auf welchem Wege die Automatisierung der additiven Grundaufgaben erfolgen soll. Nach einer Miniatur zur Inkonsistenz der NCTM-Antworten auf diese Frage (S. 185–190) positioniert sich Gaidoschik in der deutschen Debatte (S. 190–206). Dazu analysiert er Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling (1996), Wittmann & Müller und Gerster. Padberg (2005), Krauthausen & Scherer (2007) und Hasemann (2003) sieht er inhaltlich mit dieser Diskussion ebenfalls abgedeckt.

Gaidoschik arbeitet folgende Gemeinsamkeiten der drei Positionen heraus (zusammengefasst S. 201):

- hoher Stellenwert der Überwindung zählender Lösungsstrategien,
- Absage an bloßes Auswendiglernen ohne Verständnisgrundlage,
- Beimessen einer hohen Bedeutung für Ableitungsstrategien.

In der konkreten Ausgestaltung der Bedeutung der Ableitungsstrategien ziseliert Gaidoschik nun die Unterschiede der Ansätze heraus. Dies ist anspruchsvoll, weil er dazu die didaktischen Rhetoriken mit den konkreten Designs in Beziehung setzen muss und berücksichtigen muss, was *nicht* geschrieben steht. Er arbeitet für die Ansätze von Radatz u. a. und Wittmann/Müller heraus, dass ihre jeweiligen Ansätze in ihren Konkretionen eine gewisse Tendenz zeigen, entgegen dem eigenen

Wollen ein bloßes Auswendiglernen der Grundaufgaben doch nahezulegen. Dieser Weg wäre aber für den Schüler deshalb fatal, weil ihm damit jene Strategien fehlen, die ihm Rechnen in größeren Zahlräumen ermöglichen, und weil ihm jenes relationale Zahlverständnis fehlt, welches erst ihm das Verständnis des Stellenwertsystems ermöglicht.

Gaidoschik selbst lehnt sich mit überzeugenden Argumenten an die Position von Gerster (und damit Baroody und van der Walle) an, die er so zusammenfasst:

> Bei GERSTER wird also erstens das Ziel des frühen Arithmetikunterrichts von „Auswendigwissen“ auf „Beherrschen“ („fact mastery“) verschoben: Das rasche und sichere Ableiten wird in die Zieldefinition mit aufgenommen. Zweitens (...) erfolgt eine *klare Festlegung bezüglich der Mittel*, die zur Erreichung dieses Ziels eingesetzt werden sollen: Es sind dies jene Ableitungsstrategien, auf die später (sofern kein direkter Abruf erfolgt) als Abrufhilfen zurückgegriffen werden kann. Diese Strategien sollen im Rahmen einer „systematischen Erarbeitung des gesamten kleinen Einsundeins im Unterricht“ gezielt behandelt werden. (S. 200)

Damit ist der Weg für die empirische Untersuchung vorgezeichnet: Gaidoschik will die Ablösung vom zählenden Rechnen erreichen, indem er Rechenstrategien lehrt, die wiederum peu á peu zum Auswendigkönnen des kleinen $1+1$ (und im Grunde auch $1-1$) führen. Das Auswendigkönnen, also der „Abruf“, muss dabei zum Ende von Klasse 1 noch nicht für alle Aufgaben vorhanden sein, aber der Schüler sollte auf dem Weg sein, indem er Aufgaben über Ableitungen mit Hilfe von gewussten Aufgaben löst. Die empirische Untersuchung wird diesen Ansatz befragen, indem der Weg der Schüler vom Zählen über das Ableiten zum Abruf nachvollzogen wird.

In Kapitel 4 (207–232) stellt Gaidoschik – an diesen Grundsatz anschließend – die Frage, welche Empfehlungen die Fachdidaktik für den Arithmetikunterricht im ersten Schuljahr ausspricht. Er versammelt hier folgende Konsensús:

- Vom Zählen zu einer strukturierten Zahlauffassung (relationaler Zahlbegriff, Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen, Zahlen im Teile-Ganzes-Konzept, Beziehungsgeflecht der Zahlen untereinander),
- gezieltes Erarbeiten nicht-zählender Rechenstrategien,
- Vorrang der Strategie-Reflexion gegenüber dem „Lösen von Rechenaufgaben“,
- ganzheitliche Behandlung von Zahlräumen,
- keine Festlegung auf das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang im Zahlraum bis 20,
- Vorrang operativer Übungsformen.

Diese Zusammenstellung ist im Sinne eines Standardwerkes hilfreich, innerhalb des Forschungsprozesses dient sie Gaidoschik später als Folie der Beurteilung des Mathematikunterrichts, dem seine Probanden unterliegen.

Empirieteil: Vom Zählen über Ableitungsstrategien zum Faktenabruf

Im Grunde ist der Theorieteil des Buches ein eigenständiges Werk, das ich als Standardwerk zum Rechnenlernen bezeichnen würde, welches eigenständig steht, aber auch als theoretische Vertiefung (oder Vorbereitung) der Praxiswerke von Gaidoschik gelesen werden kann. Es handelt sich aber eben auch um eine Qualifikationsschrift mit einem empirischen Teil.

Gaidoschik hat in einer Längsschnittstudie mit 139 Erstklässlern aus 20 verschiedenen (nieder)österreichischen Volksschulen (22 Klassen) jeweils zu Beginn, Mitte und Ende des Schuljahres qualitative Interviews durchgeführt, um ihr Vorgehen beim Rechnen und ihr rechenstrategisches Denken (sowie am Schulbeginn zahlbezogene Kenntnisse) zu untersuchen. Die im Unterricht dieser Kinder verwendeten Mathematik-Schulbücher wie auch Schul- und Hausübungshefte sowie Übungsblatt-Mappen wurden einer qualitativen Inhaltsanalyse unterzogen, Lehrerinnen und Eltern wurden mit Fragebögen befragt. Es wurde dabei mit folgenden *inhaltlichen* Hypothesen (Kapitel 5) gearbeitet:

1. „Es wird angenommen, dass das zahlbezogene Wissen, über das ein Kind zu Beginn seines ersten Schuljahres verfügt, einen statistisch bedeutsamen Einfluss darauf hat, in welchem Ausmaß dieses Kind im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres beim additiven Rechnen im Zahlenraum bis zehn Fakten nutzende Strategien anwendet.
2. Es wird angenommen, dass die Geschlechtszugehörigkeit eines Kindes und der Bildungsgrad seiner Eltern einen statistisch bedeutsamen Einfluss darauf haben, in welchem Ausmaß dieses Kind im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres beim additiven Rechnen im Zahlenraum bis zehn Fakten nutzende Strategien anwendet.
3. Es wird angenommen, dass die Rechenfähigkeit eines Kindes am Ende des ersten Schuljahres (gemessen an der Anzahl von nicht-trivialen Grundaufgaben, die dieses Kind durch Fakten nutzende Strategien löst) mit seiner Rechenfähigkeit zu Beginn des ersten Schuljahres, noch stärker aber mit seiner Rechenfähigkeit zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres korreliert.

4. Es wird angenommen, dass das wiederholte Ableiten einer additiven Grundaufgabe deren Automatisierung befördert und dass deshalb Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie lösen, diese Grundaufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant häufiger automatisiert haben als Kinder, die dieselbe Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch ein Zählstrategie lösen.“ (S. 233)

Diese inhaltlichen Hypothesen werden in „Statistische Prüfhypothesen“ überführt, später in Kapitel 9 wird auch eine Prüfstatistik über die Daten gezogen, die mir eher der Bedienung von Betreuervorstellungen als einer noch notwendigen Absicherung der Erkenntnisse zu dienen scheint.

Die empirischen Aussagen werden in den Kapiteln 6 bis 8 erarbeitet. Kapitel 6 begründet das Untersuchungsdesign.

Das Kapitel 7 hält zwar Erschreckendes bereit, ist aber für die Untersuchung eher ein Nebenschauplatz: Gaidoschik will hier „Schulische Rahmenbedingungen der Strategieentwicklung“ erfassen. Er will also herausfinden, was für einen Mathematikunterricht die von ihm untersuchten Schüler genossen haben, insbesondere ob dieser geeignet war, die Ablösung vom Zählen zu stützen. Da er niederösterreichische Schüler untersucht, erhalten wir auch nur einen Eindruck vom (nieder)österreichischen Mathematikunterricht. Für diesen lässt sich zusammenfassend sagen: Die österreichischen Schulbücher unterstützen die Erarbeitung nichtzählender Rechenstrategien tendenziell nicht, sie zeigen sogar eine Tendenz, diese zu torpedieren. Die befragten Lehrer orientieren sich sehr stark an dieser Grundstruktur. Sie sind sich kaum ihrer Aufgabe bewusst, die Schüler bei der Erarbeitung nichtzählender Strategien zu begleiten. Sie bejahen das andauernde Zählen oder halten die Ablösung für einen Selbstläufer oder wissen nicht recht, wie eine Unterstützung aussehen kann. Hier bietet sich eine vergleichende Untersuchung zur deutschen und schweizer Situation an, die sich zumindest auf der Lehrbuchebene anders ausnehmen dürfte. Die Methodik von Gaidoschik bietet hier eher einen Ausgangspunkt, der zu Adaptionen einlädt. Er diskutiert seine Methodik selbst kritisch und skizziert auf den Seiten 468 bis 474 Forschungsdesigns, die expliziter den Einfluss von Unterricht auf die Ablösung vom zählenden Rechnen erschließen.

Das Kapitel 8 ist das empirische Hauptkapitel (S. 321–474). Gaidoschik ertrinkt ein wenig in den produzierten Daten: Von 139 Erstklässlern hat er Daten zu zahlbezogenem Vorwissen (6 Aufgabenblöcke), am Schulbeginn rechnen die Schüler zusätzlich 10 Aufgaben. In der Mitte des Schuljahres rechnen sie 18 Aufgaben, am Schuljahresende 25. Mitte und Ende des Schuljahres werden zusätzlich Aufgaben gestellt, um die Einsicht in operative Zusammenhänge zu untersuchen. Da Gaidoschik einen qualitativen Erkenntnisanspruch hat, werden nicht nur Daten präsentiert, sondern sie werden in die theoretischen Überlegungen des ersten Buchteiles eingeordnet und verstehbar gemacht, indem Beobachtungen aus den Interviews und den Fragebögen einbezogen werden. Die so entstehende Fülle ist ebenso beeindruckend wie erschlagend. Als Leser ist man an mancher Stelle geneigt zu sagen: Ist ja gut, ich glaub dir ja! Abkürzbar ist dieser Erkenntnisprozess aber im Forschungsprozess kaum. Der Rezensent hat gelegentlich einen Falsifikationsversuch unternommen, sich also gefragt, ob die Daten auch anders deutbar wären, blieb dabei aber recht erfolglos.

Lediglich die Bildung einer Schüler-Typologie zur Entwicklung von Strategiepräferenzen ist ein wenig holprig. Hier werden permanent zwei Typologiebegriffe miteinander vermengt: An manchen Stellen wird auf den Weberschen Begriff des Idealtypus mit seinen Extrapolationen Rückgriff genommen, im Hauptstrang der Typenbildung wird aber eine Typenbildung vorgenommen, die mit dem Weberschen Idealtypus nicht zusammenläuft, sondern Kategorien erzeugen will.[1] Der Begriff der Typenbildung in der von Gaidoschik benutzten Weise meint lediglich, dass die Kategorien erst aus dem empirischen Material gebildet werden und nicht bereits vor der empirischen Erhebung.

Ich bin aber nicht so sicher, ob Gaidoschik nicht überzeugender gewesen wäre, wenn er hier auf den Lehrbuchweg verzichtet hätte: Er ist ein erfahrungsgesättigter Praktiker, und diese seine Erfahrung scheint mir bei seiner Typenbildung mitzuspielen, und ohne diese Erfahrung würde seine Typenbildung z. T. nicht einleuchten:

[1] Mit Weber hätte man z. B. anhand eines oder einiger weniger Fälle die Eigenschaften eines (empirisch nicht unbedingt vorfindlichen) idealen Strategienutzers und eines idealen Dauerzählers herausgearbeitet. Dann hätte man untersucht, ob man ihre Eigenschaften gegeneinander kontrastieren kann. Wenn nicht, dann hätte man die jeweiligen Kontrastierungen theoretisch hergeleitet und nach Fällen gesucht, die diesen kontrastierenden Eigenschaften möglichst nahe kommen. Bei diesen Fällen hätte man weitere Eigenschaften gesucht, wieder Kontrastierungen gesucht usw. und so hätte man sich bis zur empirischen Sättigung durch die Fälle gefressen. Die so entstehenden Idealtypen sind keine Kategorien, sondern dienen als Kontrastfolie zur Einordnung von Fällen, ohne dass man diese kategorisieren will. Gaidoschik hat aber quantitative Fragestellungen, die zwingend nach einer Kategorisierung verlangen.

Als erstes beschreibt er den Typus „Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten“. Diese Kinder lösen Aufgaben im Zahlenraum bis 10 am Ende der ersten Klasse fast ausschließlich durch Nutzung von Zahlenfakten. Im weiteren zeigt sich, dass Kinder, die in der Mitte von Klasse 1 Ableitungsstrategien nutzen (statt zu zählen), in sehr starkem Maße am Ende von Klasse 1 Fakten abrufen. Hier liegt eine Kernaussage der Untersuchung: Es verdichtet sich (unter Hinzuziehung weiterer Argumente), dass es die Nutzung von Ableitungsstrategien ist, die eine Ablösung vom zählenden Rechnen begünstigt. Auch für die anderen Typen wird dieser Gedanke überzeugend ausargumentiert.

Nun behauptet Gaidoschik einen zweiten Typus „Hohe Merkleistung ohne Ableitung“. Diese Kinder kennt man aus „Rechenschwäche“-Instituten: Sie lernen das kleine 1+1 auswendig, können aber keine Ableitungsstrategien anwenden und scheitern deshalb später – oft überraschend für Eltern und Lehrer, die nur das Produzieren korrekter Resultate im Auge haben, was in Klasse 1 natürlich noch gut klappt. Da dieses reine Auswendiglernen eine enorme Gedächtnisleistung erfordert, sind diese Kinder sehr selten. Gaidoschik scheint nur für drei Kinder eine Zuordnung zu diesem Typus „einigermaßen gerechtfertigt“. Das sieht schon sehr danach aus, als ob dieser Typus nicht aus dem Datenmaterial herausgefiltert wurde, sondern aus der Erfahrungssättigung von Gaidoschik.

Ähnlich sieht es bei den drei Typen aus, die Gaidoschik bei jenen Kindern findet, welche nicht „reine Zähler“ oder „reine Ableiter“ sind: Es gibt Kinder, die verschiedene Strategien nutzen (hoher Anteil Zählen, aber auch Faktenabruf und nichtzählende Fingerstrategien), aber keine Ableitungen leisten. Es gibt Kinder, die Ableitungen leisten können (und oftmals sogar operative Zusammenhänge kennen, sie aber nicht nutzen, weil es ihnen niemand nahelegt), aber beim zählenden Rechnen verbleiben. Von letzteren unterscheidet er nun Kinder, die ebenfalls beim zählenden Rechnen verbleiben und ebenfalls Ableitungen leisten können, aber am Ende der ersten Klasse kaum Aufgaben abrufen können. Hiervon findet er nur vier Kinder. Diese vier Kinder sind nicht uninteressant, denn sie verhelfen uns zu einem Eindruck von der Rolle des Übens beim Rechnenlernen:

Es zeigt sich, dass jene Kinder, die Ableitungsstrategien nutzen, am wenigsten zuhause üben. Am meisten üben jene Kinder, die vorwiegend zählen ohne abzuleiten, sozusagen der Typus „Zähler“. Das sind jene Leidenskinder, mit denen stundenlang geübt wird, ohne dass sie etwas davon haben: Üben ohne Strategiebezug bringt kaum etwas (außer wenn man ein extrem gutes Gedächtnis hat). Bei jenen Kindern, die gemischte Strategien haben und z.T. auch ableiten, die also nicht nur zählen, ist es nun aber so, dass Üben etwas zu bringen scheint: Jene Kinder, die mehr üben, können am Ende von Klasse 1 mehr Aufgaben auswendig als jene, die weniger üben. Man kann sagen: In einem strategieorientierten Unterricht lernen Kinder Zahlenfakten mit relativ wenig Übungsnotwendigkeit. Ein Unterricht, der keine Ableitungsstrategien ins Zentrum rückt, der erzeugt jene Verlierer, die völlig beim Zählen verbleiben und die auch mit vielem Üben kaum Zahlenfakten abrufen können. Wenn die Kinder sich in diesem Unterricht oder trotz dieses Unterrichts aber andere als zählende Strategien aneignen können, dann ist Üben etwas, das ihnen dabei hilft, Zahlenfakten abrufen zu können.

Ich habe diese Erkenntnis hier deutlich zugespitzter formuliert als Gaidoschik es tut – seine Deutungen bleiben durchweg sehr präzise an dem, was sich direkt aus den Daten schließen lässt. Für diese – von ihm nur sehr vorsichtig angedeutete – Erkenntnis ist es aber notwendig, den letztgenannten Typus mit nur vier darin versammelten Schülern zu konstruieren. Auch hier habe ich aber den Eindruck, dass Gaidoschik diese beiden Typen nicht unmittelbar in den Daten entdeckt, sondern bereits vorher kannte. Es steht die Frage, ob es nicht vielleicht sinnvoll gewesen wäre, sich den aufwendigen Arbeitsschritt der Typenbildung zu sparen: Als erfahrungsgesättigter Praktiker hatte Gaidoschik – so mein Eindruck – die verschiedenen Kategorien von Schülern bereits vor Augen, und zwar viel weiterblickend als es die Untersuchung selbst leisten kann, weil er weiß, in welche Probleme die Schüler in den nachfolgenden Jahren hineinlaufen. Vielleicht sollten wir mehr Mut haben, *tiefgründige* Erfahrungsempirie im Forschungsprozess wieder stärker zuzulassen. In jedem Fall ist es Gaidoschik gelungen, eine erkenntnishaltige und praktisch hilfreiche Typologie zu erstellen, um die Vielfalt des empirisch Vorfindlichen zu sortieren.

Die Resultate von Gaidoschiks Untersuchungen lassen sich am besten im Kapitel 10 „Diskussion und Ausblick“ nachvollziehen. Hier verlässt der Autor die Lehrbuch-Empirie und entledigt sich der Fesseln der Signifikanzen, um „die Ergebnisse aus persönlicher Sicht zu kommentieren“, wie er Bortz und Döring (2005) zitiert. Es handelt sich aber nicht um eine „persönliche Sicht“, sondern um eine Zusammenführung von qualitativen und quantitativen Daten mit Theorie- und Erfahrungswissen unter Nutzung der Methode des freien Denkens.

Mit der Untersuchung zum Zusammenhang von Zahlvorwissen am Beginn von Klasse 1 und Zahlfaktenwissen am Ende von Klasse 1 sollte

> überprüft werden, ob das frühe Zahlwissen nicht nur – wie in jüngster Zeit mehrfach ausgewiesen (...) – ein maßgeblicher Prädiktor der über standardisierte Tests *quantifizierten globalen* „Rechenleistung“ ist, sondern ob sich auch statistisch signifikante Zusammenhänge der *Qualität* des Rechnens mit dem frühen Zahlwissen nachweisen lassen. Das ist der Fall, wobei der Einfluss der Quasi-Simultanerfassung durch die vorliegende Untersuchung statistisch besser abgesichert ist als jener des Vorwärtszählens.
> Die pädagogisch-fachdiaktische Relevanz dieses Befundes liegt zum Einen darin, dass die vorliegende Studie dadurch besser zu verstehen erlaubt, in welcher Weise das frühe Zahlwissen als „Prädiktor der Rechenleistung“ wirksam wird. (S. 490)

Es zeigte sich,

> dass jene Kinder, die zu Schulbeginn über ein *höheres Zahlwissen* verfügen, auch eher in der Lage sind, das *zählende Rechnen* schon im Laufe des ersten Schuljahres mehr und mehr zugunsten Fakten nutzender Strategien *hinter sich zu lassen* (was aus den vorliegenden entwicklungspsychologischen Studien *in dieser Spezifität* nicht hervorgeht).

Gaidoschik interpretiert das bessere Abschneiden von Kindern mit hohem Zahlwissen in standardisierten Mathematiktests „als Folge dieser auf Basis eines höheren Zahlwissens früher und umfassender erfolgenden Überwindung von Zählstrategien“ (S. 490). Er vermutet dabei z. B.,

> dass jene Kinder, die zu Schulbeginn eine bessere Performanz im Vorwärtszählen zeigen, sich *in der Regel* bereits im Kindergartenalter intensiver mit Zahlen beschäftigt haben (...). *In der Regel* werden sie dabei aber, ob mit oder ohne gezielte Unterstützung, auch über das Beherrschen der Zahlwortreihe hinaus wichtige numerische Entdeckungen gemacht haben, die ihnen in weiterer Folge den Einstieg in die Schulmathematik vermutlich erleichtert haben. In Kapitel 8.2.3.4 wurde darauf hingewiesen, dass die Kinder mit guter Performanz beim Vorwärts- und Rückwärtszählen zu Schulbeginn *in der Regel* auch bereits mehr Zahlenfakten gespeichert hatten als Kinder, die zu Schulbeginn die Zahlwortreihe noch nicht so gut beherrschten. Mehr Zahlenfakten heißt aber auch: Mehr Möglichkeiten für Anknüpfungspunkte beim weiteren Rechnen im Zahlenraum bis zehn. Umgekehrt haben die Kinder, die bereits zu Schulbeginn Ableitungsstrategien anwandten, *in der Regel* auch bereits überdurchschnittlich viele Aufgaben durch Faktenabruf gelöst.

Weiter argumentiert er:

> Die Performanz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn korreliert vermutlich deshalb mit der Häufigkeit von Faktennutzung, weil in der Regel jene Kinder, die zu Schulbeginn ein erhöhtes prozedurales Wissen (Zahlwortreihe) zeigen, auch über ein erhöhtes konzeptuelles Wissen (zumindest Ansätze von Einsichten in Zahlstrukturen und operative Zusammenhänge) verfügen. Letzteres (und nicht eigentlich die höhere Performanz im Vorwärtszählen) verbessert vermutlich in weiterer Folge die Chancen dieser Kinder, mehr und mehr Aufgaben nichtzählend zu lösen.
> Nur ein Teil der Erklärung ist dies deshalb, weil sich prozedurales und konzeptuelles Wissen nicht so fein säuberlich trennen lassen und sich überdies in einem „iterativen Prozess“ von Wechselwirkungen weiter entwickeln. (S. 492 f.)

Diese Deutungen differenzieren die bislang aus der Psychologie gelieferten Deutungen der Korrelationen deutlich aus. Ähnliches leistet Gaidoschik bezüglich der Rolle der Quasi-Simultanerfassung zu Beginn des ersten Schuljahres:

> Dass diese mit der Häufigkeit, mit der ein Kind im weiteren Verlauf des ersten Schuljahres Aufgaben durch Faktennutzung löst, signifikant positiv korreliert, ist vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.10 und Kapitel 4.1 gelieferten fachdidaktischen Analysen wenig überraschend: In der Quasi-Simultanerfassung etwa der Acht als Vier und Vier manifestiert sich ja bereits ein (wenn auch vielleicht noch kontextgebundenes) Wissen davon, dass Acht ein Ganzes ist, das aus den Teilen Vier und Vier zusammengesetzt wird. Die qualitative Auswertung hat dann ja auch gezeigt, dass Kinder, die acht Punkte zu Beginn des ersten Schuljahres als Doppel-Vier erkennen, in der Regel auch 4+4 schon zu diesem Zeitpunkt durch Faktenabruf lösen (...). Und auch wenn das Ableiten einzelner Subtraktionen auf Basis von „think addition“ offenbar nicht ohne weiteres schon als Ausweis eines soliden Teile-Ganze-Verständnisses auf der Ebene der „mathematics of numbers“ gewertet werden darf (...), so ist doch umgekehrt klar, dass Kinder *mit* einem (sich vielleicht erst noch entwickelnden, aber in der Quasi-Simultanerfassung doch bereits angebahnten) Teile-Ganzes-Verständnis gute Voraussetzungen haben, um aus zunächst nur einzelnen auswendig gemerkten Zahlenfakten weitere Aufgaben abzuleiten. (S. 491)

Die erschließenden und instruktiven Darlegungen zum Zusammenhang des Geschlechts und des elterlichen Schulabschlusses (10.2 und 10.3) seien hier lediglich erwähnt. Zum Abschluss sei noch einmal zusammengefasst, inwiefern das Lösen von Aufgaben mit Ableitungsstrategien über die reine Korrelation hinaus auch *kausal* gedeutet werden kann als förderlich für das Automatisieren von Aufgaben (10.4).

Der empirische Vergleich der verschiedenen Entwicklungsverläufe der Kinder zeigt,

> dass ein Wechsel vom Ableiten einer Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres zum Auswendigwissen dieser Aufgabe am Ende des Schuljahres signifikant öfter erfolgt ist als ein Wechsel von einer Zählstrategie zum Auswendigwissen (. . .). Hier ist aber ein Weiteres zu berücksichtigen: In den 83 Fällen, in denen eine der zehn für diesen Vergleich herangezogenen nicht-trivialen Aufgaben Mitte des Schuljahres abgeleitet wurde, wurde dieselbe Aufgabe nicht nur mit signifikanter Häufung (58-mal) am Ende des Schuljahres auswendig gewusst, sondern im Übrigen auch 17-mal am Ende des Schuljahres erneut abgeleitet. Nur in 7 von 83 Fällen kam es zu einem „Rückschritt“ zur Strategie des Weiterzählens, in keinem einzigen Fall wechselte das Kind am Ende des Schuljahres zum Fingerteil- oder Alleszählen. Kinder, die eine Aufgabe Mitte des Schuljahres abgeleitet haben, haben diese Aufgabe also zwar nicht in allen Fällen am Ende des Jahres *auswendig* gewusst, aber nur sehr selten (in etwa 8 Prozent der Fälle) zählend gelöst, und wenn, dann mit der am weitesten fortgeschritten Zählstrategie des Weiterzählens.
> In den 179 Fällen, in denen eine dieser Aufgaben Mitte des Schuljahres durch Weiterzählen gelöst wurde, blieb es hingegen 84-mal (in 47 Prozent dieser Fälle) auch am Ende des Schuljahres beim Weiterzählen, und immerhin 15-mal (in 8 Prozent dieser Fälle) kam es sogar zum „Rückfall“ ins Fingerteil- oder Alleszählen. Wenn wir als Ziel des ersten Schuljahres also nicht so sehr das Automatisieren als vielmehr das nicht-zählende Lösen von Grundaufgaben ins Auge fassen (wofür einiges spricht; vgl. Kap. 3.3), dann fällt bezogen auf dieses Ziel der Vorteil von Kindern, die Mitte des Schuljahres ableiten, gegenüber den Kindern, die Mitte des Schuljahres weiterzählen, noch deutlicher aus. (S. 511 f.)

Im weiteren diskutiert Gaidoschik auch die bekannten Gegenargumente, insbesondere von Autoren, die annehmen, dass gezielte Fokussierung auf Zählen eine Ablösung vom Zählen herbeiführt.

Die Mathematikdidaktik hat sich in den letzten Jahrzehnten von einer sehr stofflich orientierten zu einer empirisch orientierten Wissenschaft entwickelt. Die empirisch orientierte Mathematikdidaktik hat vielfältige Aspekte von Mathematikunterricht untersucht, aber selten die Frage gestellt: *Wird hier Verstehen ermöglicht?* Die Mathematikdidaktik steht an einer Stelle, an der sie mit ihrem empirischen Wissen um die Prozesse im Klassenzimmer und im Individuum wieder stärker auf das Stoffliche – und auf das Verstehen des Stofflichen – schauen muss. Die Arbeit von Gaidoschik liefert hier einen Prototypen einer solchen „empirischen Stoffdidaktik“.

In der Terminologie des Konstrukts der nbsH (vgl. Meyerhöfer 2011) ist damit ein theoretischer Ansatz für die erste stoffliche Hürde (sH), die Ablösung vom zählenden Rechnen und der Erwerb von kardinalem, ordinalem und relationalem Zahlbegriff, formuliert.

Michael Gaidoschik: *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht.* Peter Lang Verlag, Frankfurt/M. 2010, 544 S., ISBN 978-3-63159519-0, €79,95

Literatur

Bortz, Jürgen & Döring, Nicola (2005): Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. Heidelberg: Springer, 3., überarbeitete Auflage.

Geary, David C., Bow-Thomas, Christine C., Fan, Liu & Siegler, Robert S. (1996): Development of Arithmetical Competences in Chinese and American Children: Influence of Age, Language, and Schooling. In: Child Development, Vol. 67, S. 2022–2044.

Carpenter, Thomas P. & Moser, James M. (1984): The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One Through Three. In: Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 15, No. 3, S. 179–202.

Fritz, Annemarie & Ricken, Gabi (2008): Rechenschwäche. München: Ernst Reinhardt.

Hasemann, Klaus (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Krajewski, Kristin (2008): Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In: Petermann, Franz & Schneider, Wolfgang (Hrsg.): Angewandte Entwicklungspsychologie. Göttingen: Hogrefe, S. 275–304.

Meyerhöfer, Wolfram (2011): Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden. In: Pädagogische Rundschau, 65. Jg. 2011, Heft 4, S. 401–426.

Padberg, Friedhelm (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum, 2005, dritte erweiterte, völlig überarbeitete Auflage.

Radatz, Hendrik, Schipper, Wilhelm, Dröge, Rotraud, & Ebeling, Astrid (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht, 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Wolfram Meyerhöfer, Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: meyehof@math.upb.de