Analysis ohne Grenzwert!

Peter Baumann und Thomas Kirski

Im einhundertsten Heft der GDM-Mitteilungen vor etwa einem Jahr haben wir einen Zugang zur Analysis vorgestellt, der völlig ohne den Grenzwert auskommt. Stattdessen benutzten wir hyperreelle Zahlen, welche dank ihres unendlich kleinen Betrags zum Beispiel Steigungen von Funktionsgraphen berechenbar machten, deren Abweichung von der gesuchten Steigung vernachlässigbar klein war.

Wir haben auf Resonanz gehofft und fanden sie prompt im nachfolgenden Heft. Allerdings haben wir uns eingestehen müssen, dass unsere eigentliche Botschaft, die wir senden wollten, nicht angekommen ist. Es ging uns keineswegs nur darum, im Unterricht Tricks zu vermeiden, die von Schülern zu recht als Taschenspielereien verstanden werden, wie zum Beispiel die Addition von Null beim Beweis der Produktregel. Unser Anliegen war ein anderes, grundsätzlicheres. Wir wollten deutlich machen, *dass die Analysis völlig ohne Grenzwert auskommt*.

Wir haben nämlich die bereits ca. fünfzig Jahre alte Erkenntnis Robinsons benutzt, derzufolge der reelle Zahlenkörper um betragsmäßig unendlich kleine und unendlich große Zahlen erweitert werden kann. Indem wir hyperreelle Zahlen benutzt haben, sind wir der Meinung, dem Vorgehen der Begründer der Analysis und ihrer Gedankenwelt recht nahe gekommen zu sein.

Leibniz, Newton und Euler haben seinerzeit mit solchen Zahlen intuitiv richtig gerechnet, ohne sie jedoch logisch einwandfrei und ohne Widersprüche in das Gedankengebäude der Mathematik einfügen zu können. Gleichwohl waren die von ihnen gefundenen Regeln korrekt und sind es bis heute.

Einen logisch einwandfreien Weg zur Lösung der Steigungsproblematik führte schließlich Weierstraß ein, indem er die Kurvensteigung als Ergebnis eines Prozesses beschrieb, und am Ende dieses Prozesses, dem Grenzwert, stand dann die gesuchte Steigung.

Nun wissen alle Mathematiklehrerinnen und -lehrer aus eigener Erfahrung,welche Mühe es bereitet, jungen Menschen im Alter von 16 Jahren den Grenzwert zu vermitteln. Zum Beispiel sah der frühere Berliner Lehrplan dafür ein Vierteljahr allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte“ vor, und in anderen Ländern war es kaum anders. Trotzdem haben viele Schülerinnen und Schüler das Wesen des Grenzwertes nicht verstanden, was sich aber kaum als nachteilig erwies, da man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte, denn die mit Hilfe von Grenzwerten gefundenen Regeln waren vergleichsweise einfach. Und wenn er doch einmal nötig war, zum Beispiel beim Ermitteln der Kettenregel, drückte man sich – vielleicht aus Zeitnot – durchaus auch einmal um den Grenzwert herum und „schummelte“, indem man den Differentialquotienten dy/dx mal einfach mit dz „erweiterte“, obwohl ja eigentlich $dz = 0$ zu verlangen war.

Mit der Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur an den Gymnasien gibt es nun keine Zeit mehr, den Grenzwert zu behandeln. In Mathematik-Grundkursen soll man sich sogar damit begnügen, mittels dreier Testeinsetzungen den Grenzwert zu vermuten. Was solches Vorgehen noch mit Mathematik zu tun haben soll, erschließt sich uns jedoch nicht, denn Mathematik bzw. mathematisches Denken wird auf diese Weise gerade nicht vermittelt. Zudem kratzt es ernsthaften Mathematiklehrkräften arg am beruflichen Selbstverständnis.

Wir finden, Robinsons Erkenntnisse sind der Ausweg aus diesem Dilemma. Und wir haben in unserem Artikel aufgezeigt, welche Vorteile hyperreelle Zahlen gegenüber dem Grenzwert bieten. Insbesondere wollten wir vier Vorteile herausstellen:

- Hyperreelle – insbesondere infinitesimale – Zahlen sind anschaulich; sie kommen daher den intuitiven Vorstellungen vieler Lernender entgegen.
- Hyperreelle Zahlen knüpfen direkt an die historischen Wurzeln der Entstehung der Analysis an.
- Der für viele Lernende schwierige Grenzwertbegriff entfällt.
- Hyperreelle Zahlen stellen ein produktives Werkzeug dar – Regeln können errechnet werden!

Aus didaktischer Sicht sind uns die letzten beiden Vorteile besonders wichtig. Im Gegensatz zur Grenzwertanalysis kann man wirklich die Regeln errechnen. Man braucht sie nicht mehr zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzprozess zu bestätigen. Auch deshalb sollten wir uns alle aufgefordert fühlen:

> Legen wir den Grenzwert beiseite! Er hat seine Schuldigkeit getan, wir brauchen ihn nicht mehr!

Wir möchten Sie bitten, unseren Artikel aus Heft 100 noch einmal unter diesen Gesichtspunkten zu lesen. Wir können uns gut vorstellen, dass daraus eine intensive fachliche Diskussion entsteht. Wir freuen uns jedenfalls darauf.

StD Peter Baumann, Hermann-Ehlers-Oberschule, Berlin. Email: baumann@nichtstandard.de
Dr. Thomas Kirski, Hans-Carossa-Gymnasium, Berlin. Email: kirski@nichtstandard.de