Mathe vernetzt
Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1

Rezensiert von Stefan Götz

Die Forderung nach Vernetzungen im Mathematikunterricht ist eine uralte, die im Kontrast und auch unter dem Eindruck einer stark kalkülbetonten Ausrichtung des Unterrichts entstanden ist. Grundsätzlich kann man zwischen inner- und außermathematischen Vernetzungen unterscheiden, wie sie auch beide in den berühmten drei Winter'schen Grunderfahrungen zum Ausdruck kommen. In dieser Schriftenreihe soll es insbesondere um innermathematische Vernetzungen gehen. Zwei zentrale Kompetenzen werden dazu im Vorwort „Vernetzt Vernetzen lernen" von Astrid Brinkmann genannt: das „Modellieren" und das „Problemlösen". Dabei ist es wesentlich, einerseits möglichst viele Gebiete der Schulmathematik miteinander zu vernetzen, andererseits aber auch eine ganzheitliche Sicht von Mathematik zu bekommen bzw. eine Einsicht in sie zu erlangen. Der Weg dorthin ist ein langer und ereignisreicher: vom Finden der Fragestellung über das Erheben von Daten (im weitesten Sinne), das Aufstellen eines Modells, das Berechnen bis zum Darstellen von Ergebnissen, Lösungen und deren Interpretation.

Die Methode des Vernetzens kann auch als eine Leitidee für den Unterricht gesehen werden. Ist das intendiert, dann bedarf es dort der Thematisierung von Vernetzung an sich. Mind Mapping, Concept Mapping oder Lernlandkarten bieten sich dafür an, entsprechende Beiträge finden sich in diesem Band, der knapp 140 Seiten umfasst.

Das Vorwort verspricht den Lehrern und Lehrerinnen, aber auch den Schülern und Schülerinnen, dass „Bemühungen um vernetzenden Mathematikunterricht entlastend und motivierend wirken". Anregungen dazu zu liefern, ist das Ziel der in Rede stehenden Schriftenreihe. Die Beiträge verspricht das Vorwort sind so aufbereitet, „dass Lehrende sie möglichst unmittelbar und gewinnbringend in ihrem Unterricht einsetzen können".

Das kommentierte Inhaltsverzeichnis enthält die Titel der Beiträge, die Abstracts und je eine charakteristische Abbildung als eye-catcher. Wir finden dort auch drei Kapitel: I. Unterrichtsmethoden, II. Mögliche inhaltliche Vernetzungen, III. Vernetztes Denken fördern.

Der erste Beitrag „Vernetzungen und vernetztes Denken im Mathematikunterricht" von Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß, Günther Ossimitz und Hans-Stefan Siller bringt eine systematische Übersicht über verschiedene Lesarten des Begriffes „Vernetzung". Für die im ersten Satz der Rezension formulierte Forderung werden hier viele Belege aus unterschiedlichsten Quellen angeführt. Am Beispiel des Lehrsatzes von Pythagoras wird eine erstes eindrucksvolles Beispiel eines Netzwerkes gezeigt, welches nur den Auftakt für zahlreiche weitere, noch komplexere darstellt. Ein Netzwerk lässt sich mathematisch durch einen Graphen beschreiben, die Knoten stellen die einzelnen Systemkomponenten dar, die Kanten ihre Beziehungen. „Vernetzung" meint sowohl den Prozess des Vernetzens als auch das Ergebnis. Es werden inhaltliche Qualitäten von Mathematik-Vernetzungen im nächsten Abschnitt kategorisiert. Innermathematische Vernetzungen können zur Fachsystematik beitragen oder bei Problemlöseprozessen schlagend werden. Neben den üblichen Einteilungen wie z. B. „ist ein Teilbereich von", hierarchische Ordnungen oder dem deduktiven Gerüst der Mathematik folgend werden hier Leitideen genannt, die Curricula wie „ein roter Faden" durchziehen; sie bündeln eng verwandte mathematische Konzepte.

Anwendungsbezogene Vernetzung kann sich auf den Wechsel des zugrundeliegenden Modells bei der Bearbeitung einer Aufgabe beziehen: populäre Beispiele sind die „Algebraisierung" oder die „Geometrisierung". Wir sprechen dann von „Modellvernetzung" oder „Repräsentationsvernetzung". „Theoremvernetzung" und „Regelvernetzung" sind weitere Kategorien unter dieser Überschrift, oder auch die „Ablaufvernetzung" beim Arbeiten mit einem Algorithmus. Schließlich die „Strukturvernetzung", sie nützt eine der ganz großen Stärken und charakteristischen Merkmale der Mathematik, die Abstraktionsfähigkeit, um Objekte mit gleichen Eigenschaften zusammenzufassen, obwohl sie (auf den ersten Blick) ganz unterschiedlich aussehen können (z. B. lineare Abbildungen).

Des Weiteren werden Vernetzungen zwischen mathematischen und nichtmathematischen

Knoten ausgewiesen, wie sie bei realitätsbezogenen Anwendungen vorkommen. Auch hier spricht man von „Modellvernetzung". Historische und/oder kulturelle Vernetzungen gehören da dazu, ebenso memotechnische („Eselsbrücken" wie „sico cosi, coco sisi, aber mi" – wofür steht das wohl?), lernpsychologische, affektive („nicht schon wieder Extremwertaufgaben – dabei habe ich mich noch nie ausgekannt") und Ähnlichkeitsvernetzungen, die konstruktivistischen Lerntheorien Rechnung tragen.
Vernetzung als fundamentale Idee wird abschließend postuliert.
Systems Thinking – vernetztes Denken ist einerseits in Verbindung mit der System-Dynamics-Methode zu sehen (siehe auch der letzte Beitrag in diesem Band), und steht andererseits auch für eine Form ganzheitlichen Denkens.
Eine Lehrbuchanalyse zeigt, dass in jüngerer Zeit sehr wohl auch Ideen vernetzten Denkens in den Schulbüchern berücksichtigt worden sind. Als Beleg dafür sei beispielsweise an die „vermischten Aufgaben" am Ende eines Kapitels erinnert, die unterschiedliche Aspekte des zuvor Gelernten in einer Aufgabe vereinigen („vernetzen").
Dieser erste Beitrag ist eine sehr wertvolle Orientierungshilfe für den/die von der Thematik unbeleckte/n Leser/in, für den/die mit der Materie Vertraute/n ist er von der Qualität „was immer schon einmal in dieser Dichte niedergeschrieben hätte werden sollen". Einzig die Charakterisierung als fundamentale Idee bzw. Leitidee überzeugt nicht. Rote Fäden bündeln nicht (sie liegen anders), ich schlage vor, Vernetzung als Metafundamentale Idee, die die verschiedenen Ausformungen (siehe soeben) zusammenfasst, zu sehen.

Das erste Kapitel beginnt mit einem Beitrag von Astrid Brinkmann: „Visualisieren und Lernen von vernetztem mathematischen Wissen mittels Mind Maps und Concept Maps". Eine Mind Map setzt einen Begriff mit seinen individuellen Assoziationen in Verbindung und stellt diese graphisch dar. Concept Mapping ist eine ähnliche Technik, die allerdings noch zusätzlich eine hierarchische Struktur wiedergibt, grob gesprochen vom Allgemeinen zum Speziellen. Am Schluss stehen dann konkrete Beispiele. Ein weiterer Unterschied ist die Möglichkeit, in Concept Maps (beschriftete) Querverbindungen zwischen einzelnen Hauptästen einzuzeichnen (z. B. Lösungen entsprechen Schnittpunkten bei einem System von zwei Geradengleichungen). Bei mathematischen Themen können auf diese Weise Modellvernetzungen dargestellt werden (z. B. die Entsprechungen zwischen algebraischen und geometrischen Repräsentationen).
Es werden im nächsten Abschnitt zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten von Maps im Unterricht angeführt und erläutert: die Visualisierung geordneter Strukturen kann zum Aufbau von Wissensnetzen beitragen, insbesondere schwächere SchülerInnen profitieren davon.
Dem Unterrichtsprozess folgend ist klar, dass im Anschluss die Maps auch beim Lernen und zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können. Maps visualisieren kognitive Strukturen von Lernenden (und Lehrenden, wenn von ihnen vorgegeben). Wissenszuwachs kann so kommuniziert werden und Lernfortschritte können sichtbar gemacht werden. Dabei werden alleine durch die Position bestimmter z. B. mathematischer Tätigkeiten in einer Map wertvolle Rückmeldungen über die (innermathematische) Bedeutung derselben (zentral oder eher ein Randthema?) für die SchülerInnen gegeben. Auch wird die Möglichkeit, außermathematische Verknüpfungen zu thematisieren, auf diese Weise eröffnet. Es wird der Vorschlag gemacht, unvollständige Concept Maps zum Lernen mathematischer Vernetzungen einzusetzen. Schließlich wird die Verwendung von Maps beim Problemlösen beschrieben, und zwar sowohl nach der Lösung einer Aufgabe, dann erfolgt die Erstellung, als auch zur Orientierung beim Herantasten an komplexere Aufgaben.
Natürlich sind sowohl die Mind als auch die Concept Maps keine Wundermittel, eingrenzende Sachverhalte wie z. B. eventuelle Unübersichtlichkeit bzw. die fehlende Garantie, dass eingezeichnete Relationen nicht bloß auswendig gelernt worden sind, werden von der Autorin sehr wohl genannt.
Zum Abschluss werden Empfehlungen für die Einführung der beiden in Rede stehenden Konzepte gemacht, wobei Mind Mapping i. Allg. vor dem Concept Mapping eingeführt werden sollte. Die Präferenzen der Lernenden zeigen kein eindeutiges Bild: sie hängen von der jeweiligen Situation ab, aber auch davon, ob die Maps selbst angefertigt werden sollen oder mit bereits fertigen gearbeitet werden soll.
Der mit (teilweise von SchülerInnen angefertigten) Maps illustrierte Artikel zeigt sehr eindrucksvoll und überzeugend die Möglichkeiten und Grenzen dieser beiden Konzepte. Die benannten Indikationen für ihren Einsatz sind nachvollziehbar, sowohl die im Beitrag angestellten theoretischen Überlegungen als auch die angeführten empirischen Befunde zeichnen ein klares Bild vom Wert dieser Darstellungsweisen.

„Lernlandkarten als Arbeitsmittel zur Selbststeuerung beim Lernen im Mathematikunterricht in individuellen und kooperativen Arbeitsformen“ ist sowohl Titel als auch Inhaltsangabe des nächstes Beitrages. Sie werden vom Autor Michael Wildt als Sonderform einer concept map definiert zur Orientierung einer lernenden Person über ihren individuellen Lernprozess. Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Selbststeuerung beim Lernen, die durch eine förderliche Leistungsbeurteilung von den Lehrenden ermuntert und gestützt wird. Der Vergleich mit einer herkömmlichen Landkarte bringt u. a. den Begriff Terra incognita mit sich. Das gesicherte Wissen ist die Expeditionsbasis, und die Erforschung des „unbekannten Landes“ spielt sich zwischen den Polen Eigenes entwickeln und Fremdes adaptieren ab. Dieses Spannungsfeld machen Lernlandkarten sichtbar.
Notwendige Voraussetzung für die Akzeptanz von Lernlandkarten auf Seiten der SchülerInnen ist ein offener Unterricht, der mehrere Lernwege aufzeigt und zulässt. Die SchülerInnen müssen in vielen Fällen erst ermuntert werden, ihren Lernprozess (ein gutes Stück) selbst zu steuern. Diese Haltung stellt sich nicht von selbst ein, vor allem dann nicht, wenn lehrerInnengesteuerte Lernformen den Unterricht dominieren.
Eine Analyse deutschsprachiger Literatur dazu bringt nur wenige Beispiele ans Tageslicht, die angeführten Praxisbeispiele stammen alle aus der Erfahrung des Autors, der einem Schulnetzwerk angehört, das dieses Konzept erprobt hat. In Klasse 5 einer Gesamtschule zeigten sich dramatische Unterschiede der SchülerInnen in den geometrischen und arithmetischen Basiskompetenzen. Ein Selbsteinschätzungsbogen mit drei Stufen „das kann ich gut – mittelmäßig – noch nicht“ bereitet das Instrument der Lernlandkarte vor. Die SchülerInnen haben auf dieser Teilkompetenzen nach inhaltlichen Gesichtspunkten gruppiert (oder jedenfalls positioniert) und durch Färbung grün – gelb – rot entsprechend der obigen Selbstseinschätzungsstufen klassifiziert. Veränderungen auf diesen individuellen Lernlandkarten dokumentieren den Lernprozess, der so auch für LehrerInnen und Eltern einsichtig wird.
Am Ende einer Klasse 7 sollte eine Zuteilung der SchülerInnen auf zwei Lernniveaus passieren, die wiederum eine Indikation für die Erstellung von Lernlandkarten darstellt. Vor allem der Prozess der Erstellung dieser individuellen Karten hat den Mathematikunterricht ungemein angereichert: welche Kompetenzen gehören zusammen? Die fertigen Karten waren dann die Grundlage für eine Selbsteinschätzung der SchülerInnen, die sich in hohem Maße mit der des Lehrers gedeckt hat.
In Klasse 9 haben sich Lernlandkarten als Grundlage für die Erstellung eines Arbeitsplanes einer sehr heterogenen Lerngruppe in einer nicht fachgebundenen Übungsstunde bewährt.
Im Anhang finden sich Materialien zu Kompetenzitems für die Klassen 5, 7, 9 und 11 und eine Anleitung zur Erstellung einer Lernlandkarte für SchülerInnen.
Die Schilderungen der vom Autor selbst gemachten Erfahrungen mit dem Umgang von SchülerInnen mit Lernlandkarten belegen eindeutig die theoretischen Intentionen, die im ersten Teil des Beitrages formuliert werden. Der Vergleich mit herkömmlichen Landkarten trägt dabei weit und macht dieses Instrument unmittelbar auch dem Neuling zugänglich. Die Gegenüberstellung Landkarte – Navigationssystem zeigt deutlich den Selbststeuerungsanspruch der Lernlandkarten.
Insgesamt stellt dieser Text eine gelungene Einladung für Lehrende dar, sich auf diese abenteuerliche Expedition in das Land des (Nicht-)Wissens einzulassen. Ihr zu folgen, kann heißen, dem bedrohenden Charakter von Leistungseinschätzungen die Spitze zu nehmen.
So gesehen ist dieser Beitrag ein wichtiger Hinweis auf eine nach wie vor offene Wunde im Schulsystem.

Eine Unterrichtsmethode zum Vernetzen im Mathematikunterricht hat Swetlana Nordheimer in ihrem Beitrag vorgestellt: „Kapitelübergreifende Rückschau“. Sie steht am Ende eines Schuljahres, und die schülerInnenzentrierte Aufgabenvariation spielt dabei eine zentrale Rolle. Sie besteht aus vier Phasen: in der Vorbereitung wird eine Einstiegsaufgabe von den SchülerInnen gelöst, die den gemeinsamen Kontext des Folgenden ankündigt. Initialaufgaben werden dann vorgestellt, die in Gruppen bearbeitet werden. Schließlich werden in neuen Gruppen, in denen „ExpertInnen“ jeder Initialaufgabe zusammenkommen, eigene kapitelübergreifende Aufgaben entwickelt, die dann auch präsentiert werden.
Sechs verschiedene Initialaufgaben zum Thema „Tangram“ wurden in einer achten Klasse eines Gymnasiums gestellt. Die Ergebnisse einzelner SchülerInnen (die ExpertInnenrunden konnten aus Zeitmangel nicht zusammenkommen, die letzte Phase wurde in Form einer Hausübung realisiert) machen den Hauptteil dieses Beitrages aus. Sie unterscheiden sich in der Anzahl der vernetzten Kapiteln, ob Teilaufgaben vorhanden sind oder nicht, manche bieten einen Realitätsbezug bzw. bemühen sie sich darum (inverse Modellierung), in einem zitierten Bei-

spiel wurde sogar der Kontext gewechselt etc. Deutlich wird jedenfalls das Entwicklungsstadium des aktiven mathematischen Wortschatzes der einzelnen SchülerInnen.
Es ist schon erstaunlich, was die SchülerInnen aus den sehr phantasievoll kreierten Initialaufgaben (diesen kommt nach Meinung des Rezensenten eine Schlüsselrolle zu) an eigenen Problemstellungen entwickeln. Die Vorgabe, kapitelübergreifende Fragen zu formulieren, führt direkt zum Ziel dieser Unterrichtsmethode. So unterschiedlich die Ergebnisse der Entwicklungsarbeit der SchülerInnen auch sind, sie zeugen alle von einer Durchdringung der Thematik und der damit verbundenen schulmathematischen Kapitel, die in einem traditionellen Unterricht wohl kaum erreicht werden würde. Der theoretische Bezug ist überschaubar (dadurch unterscheidet sich dieser Beitrag ein wenig von den beiden vorher besprochenen), demgemäß lädt dieser Beitrag den Leser/die Leserin zu einem baldigen Nachmachen ein.

Den Auftakt zu Kapitel II gibt ein Aufsatz von Christoph Ableitinger mit dem Titel „Problemlösen am Billardtisch“. Ein einfaches Modell (rechteckiger Tisch, Taschen nur in den vier Ecken, die punktförmige Kugel startet immer in der linken unteren Ecke unter einem Winkel von 45° und bewegt sich geradlinig bzw. nach dem Reflexionsgesetz bis sie in eine Tasche fällt) erlaubt die umfassende Beantwortung der Frage: „In welche Tasche fällt die Kugel bei gegebenen Maßen des Tisches?“ Zwischenergebnisse auf dem Weg dorthin werden als „Meilensteine“ formuliert und bewiesen. Probieren, Fallunterscheidungen verbunden mit Kategorisierungen, Wechsel der Darstellungsebenen, Vernetzung von unterschiedlichen schulmathematischen Gebieten erweisen sich dafür als probate Mittel. Als Auslöser fungieren Aufgaben an die SchülerInnen.
Der Beitrag von Herrn Ableitinger ist eine geglückte Miniatur mathematischen Arbeitens, ein unverzerrtes Abbild quasi. Die Darstellung ist durchgehend schülerInnengerecht, und wenngleich man an manchen Stellen die Begeisterung des Autors für die Sache merkt, bleibt die eigentliche Intention, nämlich konkrete Unterrichtsvorschläge zum Vernetzen zu entwickeln, immer dominant. Die in der Einleitung gemachte Fallunterscheidung verschiedener Vernetzungen verdient besondere Erwähnung: Vernetzung mathematischer Inhalte, adäquate Auswahl und Verknüpfung mathematischer Beweismethoden, Mathematik als ein in sich vernetztes System und Vernetzung mathematischer Handlungsweisen. All diese Gesichtspunkte kommen dann im Artikel auch wirklich vor!
Im Vordergrund steht dabei sicher ein Problemlöseprozess (inklusive Reflexion der verwendeten Strategien nach der Schule von Pólya), der sehr schön, weil ausführlich, nachvollziehbar und vollständig, gezeigt wird. Der Vernetzungsaspekt ist hier von der Sache her gesehen zweitrangig, das Explizitmachen oben erwähnter Vernetzungsaspekte an Ort und Stelle genügt aber der didaktischen Intention des in Rede stehenden Buches vollkommen.

„Problemlösungen und Vernetzungen bei Zerlegungen von $\{1,2,\ldots,n\}$ in summengleiche Teilmengen“ lautet der Titel des Beitrages von Hans Humenberger und Berthold Schuppar. Ausgehend von dem Einstiegsproblem, eine solche Menge in zwei summengleiche Teilmengen zu zerlegen, wird sukzessive – wie in der Mathematik üblich – verallgemeinert. Graphische Darstellungen unterstützen den Problemlöseprozess, der sonst in der üblichen mathematischen Vorgangsweise (Fallunterscheidungen, notwendige und hinreichende Bedingungen formulieren und beweisen) dargestellt wird. Konkrete Zahlenbeispiele illustrieren an ausgewählten Stellen die aufgestellten Behauptungen, formulierten Sätze bzw. gegebenen Begründungen.
Die Hoffnung der Autoren, dass bei der Behandlung dieses Problems „Schüler/innen in verschiedenen Alterstufen auf ganz unterschiedliche Ideen kommen und *Mathematik als Prozess* realisieren und wahrnehmen“ (Hervorhebung im Original), ist nach Ansicht und (naturgemäß geringen) Erfahrung des Rezensenten kühn. Sollten LehrerInnen auf die Idee kommen, dieses Thema tatsächlich in ihrem Unterricht behandeln zu wollen, dann stellt der Artikel sicher das dazu notwendige Hintergrundwissen vor. Konkrete Hinweise und Hilfestellungen zur methodischen Umsetzung dieses Vorhabens fehlen allerdings oder werden bestenfalls angedeutet. Hierzu könnten ja in einem zweiten Band Vorschläge publiziert werden. Erst dann würde das Potential, welches in diesem Thema (vielleicht) steckt, offenbar werden und das im Vorwort der Herausgeberin gemachte Versprechen des möglichen unmittelbaren Einsatzes im Unterricht auch in diesem Fall eingelöst.
Der Aspekt „Vernetzung“ wird in diesem Beitrag so verstanden, dass bisher Gelerntes in verallgemeinerten Problemstellungen (selbstständig von den SchülerInnen) angewendet wird.

Eine Vernetzung ganz anderer Art hat *Reinhard Oldenburg* mit seinem Beitrag „Beschreibung als Modellbildung" im Sinn. Am Beispiel von Geraden und Ebenen wird gezeigt, dass je nach Situation, Problemstellung, Aufgabe unterschiedliche Darstellungsweisen (differenziert wird z. B. nach der Anzahl der ihnen jeweils innewohnenden Freiheitsgraden) dieser geometrischen Objekte gut bzw. weniger gut passen. „Gut passen" meint hier beispielsweise schnell zur Lösung zu kommen oder rasch zu einer gewissen Einsicht zu gelangen. Aber eigentlich steht der umgekehrte Weg im Vordergrund dieses Aufsatzes: verschiedene geometrische oder algebraische Situationen oder Fragestellungen führen zu unterschiedlichen Formen der Darstellung von Geraden bzw. Ebenen.
Der Autor spricht in diesem Zusammenhang von „innermathematischer Modellierung". Die Validierung derselben geschieht (neben pragmatischen Gesichtspunkten – soeben) dadurch, dass man sich klar macht, was diese neue Form tatsächlich beschreibt: das kann genau das intendierte sein oder eine größere Klasse definieren, oder die so erfassten Objekte können in eine größere, schon bekannte Klasse eingebettet werden. Insgesamt soll mit diesem Beitrag die Freiheit beim Modellieren sichtbar gemacht werden, egal ob es sich um eine außer- oder innermathematische handelt. Die Vernetzung passiert hier in Form der unterschiedlichen algebraischen Beschreibung von geometrischen Objekten.
Auf nur vier Seiten zeigt der Autor sehr deutlich, worum es ihm geht. Seine Beispiele stehen natürlich pars pro toto: die Wahl der Darstellung eines bestimmten mathematischen Objekts sollte in jedem Ausbildungsgang, von der Grundschule bis zur Universität, immer wieder thematisiert werden. Den Lernenden muss es sonst wie Willkür (die Kehrseite der oben erwähnten Freiheit) vorkommen (und das tut es auch!), wenn z. B. eine Gerade einmal in Parameterform und einmal in Normalenform auftaucht. Hier wird also nach Meinung des Rezensenten ein sehr wichtiger, viel zu wenig in der didaktischen Diskussion beachteter Punkt angesprochen. Die knappe Art der Darstellung animiert den Leser/die Leserin zum selber Gedanken Machen über diese Thematik. Die Entscheidung, an welcher Stelle eines Lehrganges dieselbe explizit wird, ist immer eine individuelle, insofern ist dieser Beitrag auch formal seiner Intention angemessen konzipiert. Das gefällt, sehr sogar!
Eine außermathematische Situation nimmt Matthias Brandl zum Anlass, innermathematische Werkzeuge wie die Regel von de l'Hospital oder das Pascal'sche Dreieck in einen schulmathematischen Kontext zu bringen. „Der Lotto-Jackpot in der (Kurven-)Diskussion – eine vernetzende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht der Oberstufe" heißt sein Beitrag, der der Frage nachgeht, ob es wahrscheinlicher wird, dass es bei der „6 aus 49"-Lotterie mehrere GewinnerInnen gibt, wenn mehr Menschen daran teilnehmen. Die Antwort ist natürlich „ja", doch damit gibt sich der Autor nicht zufrieden. Es interessiert ihn vielmehr die genaue Form der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit, dass es zwei oder mehr Jackpot-GewinnerInnen gibt, von der Anzahl *n* der Teilnehmenden. Mit Hilfe der Binomialverteilung ist diese schnell gefunden und wird nach allen Regeln der Kunst ausgewertet: Grenzwert, Monotonie, Wendepunkt und eine Verallgemeinerung der Problemstellung: statt mindestens zwei GewinnerInnen werden jetzt genau *k* vorausgesetzt.
U. a. wird dabei $\lim_{n\to\infty} n\cdot(1-a)^n$ für $0 < a < 1$ mit der Regel von de l'Hospital berechnet, indem mehr oder weniger „künstlich" ein Quotient aus dem ursprünglichen Term gebastelt wird. Dieser Zugang scheint dem Rezensenten doch sehr hoch gegriffen. Er schlägt stattdessen vor, den Ausdruck $\frac{1}{n\cdot q^n}$ mit $0 < q < 1$ zu betrachten. Mit $\frac{1}{q} = 1 + h$ und $h > 0$ ist das Grenzwertverhalten von $\frac{1}{n} \cdot (1 + h)^n$ für $n \to \infty$ mittels Entwicklung bis zum zweiten Summanden nach dem Binomischen Lehrsatz leicht einzusehen: der Term wächst über alle Maßen, sein Kehrwert muss daher gegen null konvergieren.
Die Berechnung des Wendepunktes motiviert der Autor in der Weise, dass rechts von ihm die Wahrscheinlichkeit weniger stark steigt, seinen Gewinn teilen zu müssen. (Die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit steigt monoton von Null auf Eins mit wachsendem *n*.) Im Jackpot-Fall liegt der Wendepunkt bei ungefähr 280 Millionen TeilnehmerInnen, eine Zahl, die realiter nie erreicht wird. Der Autor schließt daraus: „Somit befindet man sich also stets im ungünstigen, vergleichsweise stark ansteigenden Teil der Kurve." Diese Conclusio ist doch ein wenig gewagt, denn wie schon eingangs festgestellt, wächst die Wahrscheinlichkeit, teilen zu müssen, mit steigendem *n*. In diesem Lichte wäre doch der flachere Anstieg der Kurve bei großem *n* ein schwacher Trost, oder?
Die Rechnungen sind sehr ausführlich dargestellt, manchmal zu ausführlich, die Ableitung von $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, darf wohl als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso die Eigenschaft

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

für Binomialkoeffizienten. Die Idee der Vernetzung von Analysis mit Stochastik an diesem Themenkreis ist gut nachvollziehbar, die Ausführung allerdings nicht (immer): warum werden die langen Rechnungen (Ableitungen) nicht mit einem CAS ausgeführt und nur das Ergebnis angegeben? Andererseits: die Vertauschung von Limes und Potenzfunktion ist wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion erlaubt, das wird bei der Berechnung von $\lim_{x \to infty} \frac{x^n}{e^x}$ (n fest) nicht erwähnt, aber verwendet. So ergibt sich ein ein wenig verzerrtes Bild der Mathematik, welches allerdings wie exemplarisch gezeigt leicht wieder zurecht gerückt werden könnte.
„‚Hunger in Afrika' – Wir vernetzen Mathematik, Geografie und Wirtschaftskunde mit Systemdynamik" ist der erste Beitrag des dritten Kapitels, der von Jürgen Maaß und Hans-Stefan Siller stammt. Sie zeigen, wie ein Strategiespiel am Computer (http://www.juergenhaller.com/2004/unterr/ewg/hunger/hunger.html, 4. 6. 2011) selbstständig von SchülerInnen analysiert werden kann. Der methodisch-didaktische Weg, den sie dazu wählen, ist entdeckendes Lernen. In der ersten Phase werden die SchülerInnen mit dem Spiel vertraut gemacht, und auf das Ziel der Unterrichtseinheit aufmerksam gemacht: die Durchführung ihres Spiel samt Ergebnissen soll diskutiert werden, um zu einer Gewinnstrategie (d. h. Überleben!) zu gelangen. Es muss also dokumentiert werden. Fragen helfen bei der Orientierung, in einem interativen Prozess werden Hypothesen dazu aufgestellt, und diese mittels Simulation (i. e. eine Runde spielen) getestet und gegebenenfalls revidiert. In der zweiten Phase wird eine arbeitsteilige Fragenbeantwortung organisiert, in der dritten werden erste Zwischenergebnisse diskutiert und reflektiert, um dann basierend darauf einen neuen Anlauf zu unternehmen. Um einen Einblick in das Spiel zu bekommen, seien einige Entscheidungsfälle angeführt: Wann sollen Kinder in die Schule geschickt werden (sie fallen dann als Arbeitskraft aus)? Wie viel Werkzeug soll angekauft werden (sie machen den Arbeitsprozess effizienter, kosten aber natürlich Geld)? Wie viele Rinder sollen gehalten werden (ab fünf kann mit Nachwuchs gerechnet werden, ab neun besteht die Gefahr, dass sie verdursten – abhängig von der Zahl der Wasserlöcher, die wiederum …)? Ein Zufallsgenerator gibt das Wetter an: normal, Dürre, Starkregen, …
In der vierten Phase wird eine Gesamtstrategie entwickelt und getestet, in der fünften die (mathematische) Vorgangsweise reflektiert. Schließlich wird in der sechsten Phase der Bezug der Simulation zur realen Situation (Verflechtung mit dem Geografieunterricht) thematisiert, bevor in der letzten Phase eine Neugestaltung der Simulation (Adaptierung des Designs der Arbeitsoberfläche, Änderung der Parameter, z. B. jenes, der die Häufigkeit des Starkregens regelt – Brücke zum Informatikunterricht) vorgeschlagen wird.
Der Artikel deutet viele Möglichkeiten an, wie mit der Black Box des Spieles umzugehen ist, wie eine Analyse und Entwicklung einer Gewinnstrategie aussehen könnte. Probieren (besser: Simulieren) ist kein allzu häufiger Bestandteil des Regelunterrichts, insofern stellt der Beitrag eine wertvolle und bereichernde Anregung dar. Wichtig ist dabei sicher, dass LehrerInnen bei dieser Form des Unterrichts davon absehen lernen, dass sie die „volle" Kontrolle über das Geschehen (zumindest in gewisser Weise) haben. Die Autoren machen Mut, sich auf diese innovative Herangehensweise einzulassen. Der unbedingt gegebene Realitätsbezug dieses Beitrages, der strenge Kausalitäten relativiert und durch mit Unsicherheit behaftete Entscheidungen ersetzt, ist der Lohn dafür.

Der letzte Artikel in diesem Band heißt „Vernetztes Denken, Stock-Flow-Diagramme und die Modellierung von Zeit", den Günther Ossimitz geschrieben hat. Ausgehend von einer (fast wahren) Geschichte über Spagetti, ihren Absatz und Lagerstand (ein System) zeigt er zwei verschiedene Stock-Flow-Diagramme, die Bestandsgrößen und Flüsse in unterschiedlicher Realitätsnähe miteinander in Beziehung setzen. Sie machen Vernetzungen zwischen mehreren Einflussfaktoren und zeitliche Abläufe deutlich und können unter Umständen Hinweise für systemgerechtes Handeln liefern. Weitere Beispiele (Welt-Erdölförderung, Bevölkerungsentwicklung) zeigen die Leistungsfähigkeit dieser Darstellungsweise, Abhängigkeiten zu illustrieren und Folgerungen daraus (etwa: welche Möglichkeiten gibt es, in die Entwicklung des Bevölkerungsstandes einzugreifen?) abzuleiten. Interessanterweise spielt die Modellierung der Zeit, diskret oder kontinuierlich, eine entscheidende Rolle bei der Unterscheidung von Bestands- und Flussgrößen. Kontinuierliche Verläufe machen ihre Interpretation schwierig (z. B. Alpenhotel-Aufgabe: Wann waren die meisten Gäste im Hotel? – gezeigt werden die Ankünfte und Abreisen während eines bestimmten Zeitraumes), wie zahlreiche empirische Untersuchungen dazu zeigen. Die Unterscheidung „Bestände – zeitpunktbezogen und Flüsse – zeitintervallbezogen" greift nur bei diskreter Zeitmodellierung.
Drei Unterrichtsvorschläge (Fluss-Hochwasser – Rückhaltebecken: Modellierung des Abflussverhaltens; Bevölkerungsentwicklung: reale Daten

konkretisieren das zuvor bereits vorgestellte Modell; diskretes logistisches Wachstum: das Phänomen der Periodenverdopplung mündet in chaotisches Verhalten) beschließen diesen Beitrag.

In sehr klarer und eindringlicher Weise schildert der Autor die Einsichten, die durch Stock-Flow-Diagramme bei der Beschreibung systemischer Abhängigkeiten gewonnen werden können. Sorgfältig und behutsam baut er mit Hilfe vieler Abbildungen die Möglichkeiten dieser doch noch nicht (im Mathematikunterricht) so populären Darstellungsart auf und zeigt überzeugend ihre Leistungsfähigkeit. Die realitätsnahen Beispiele motivieren zusätzlich, diese Form des Abhängigkeiten sichtbar Machens in den Unterricht einfließen zu lassen. Sollte das der Autor intendiert haben, dann ist ihm das auch gelungen!

Auf den letzten Seiten werden die HerausgeberInnen und AutorInnen mit Bild und Erwähnung ihrer Wirkungsstätten und Arbeitsgebiete kurz vorgestellt, schließlich findet sich eine E-Mail-Liste der AutorInnen.

Man kann der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ zu diesem Auftakt gratulieren, dieser erste Band zeigt gleich die Spannweite, die dieses Thema mit sich bringt, in eindrucksvoller Weise. Die Einteilung der Beiträge in die drei Kapitel ist gut nachvollziehbar und unterstützt den Leser/die Leserin in seiner/ihrer Orientierung. Selbst diese doch sehr ausführliche Rezension kann nur einen Bruchteil der Anknüpfungspunkte wiedergeben, die die Lektüre des eigentlichen Werkes aufzeigt. Sie regt zum Nachahmen an und motiviert gleichzeitig zum Abändern, selbst weiter Entwickeln, Reflektieren über den vorgegebenen Prozess und die eigenen Fortsetzungen.

Ein zweiter Band könnte noch stärker auf Methoden des Unterrichtens vernetzter Topoi eingehen, hier ist sicher noch mehr Aufmunterung nicht fehl am Platz, um diese wichtige Kompetenz mathematischen Handelns fest im Ozean mathematischen Unterrichtens zu verankern. Lehrende und Lernende werden davon profitieren, davon zeugt aber auch schon der erste Band ganz deutlich. Ein vielversprechender Beginn also mit kleinen Kinderkrankheiten, aber das liegt ja in der Natur der Sache.

Im Sinne der Weigand’schen Kategorisierung von RezensentInnen (GDM-Mitteilungen 90, Januar 2011, S. 42 f.) sieht sich der Rezensent zwar nicht als Wunschkandidat, aber wenigstens als Mischung aus Euphoriker, Skeptiker, Pedant und Showman. Ich bitte daher die Länge meines Texts zu verzeihen, aber all diese Aspekte brauchen einfach ihren Platz.

Mathe vernetzt. Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1. Eine Publikation der Arbeitsgruppe „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ der GDM. Herausgegeben von Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß und Hans-Stefan Siller. Aulis Verlag, München 2011. ISBN 978-3-7614-2836-8.