Die ontologische Bindung spezieller Größen

Hans Joachim Burscheid und Horst Struve

In seiner Besprechung von Bedürftig / Murawski „Philosophie der Mathematik“ (diese Mitteilungen 90–2011) regt Heinz Griesel an, eine Theorie der Anwendung von Mathematik – insbesondere der Elementarmathematik – auf der Grundlage des Größenbegriffs zu entwickeln. Wir zeigen im Folgenden, dass sich auch dann prinzipielle Probleme nicht werden umgehen lassen.

Herrn Professor Dr. Heinz Griesel
zum 80. Geburtstag gewidmet

Der allseits beeindruckende Vortrag „Eine Analyse der so genannten Schlussrechnung“ von Arnold Kirsch auf der Bundestagung 1968 in Frankfurt, der vermutlich Pate stand für die Monographie „Elementare Zahlen- und Größenbereiche“, führte dazu, dass sich etliche deutsche Mathematikdidaktiker intensiv mit dem Größenbegriff beschäftigten. In erster Linie wäre Heinz Griesel zu nennen. Seine Tätigkeit im Normenausschuss Technische Grundlagen im DIN war für ihn eine zusätzliche Veranlassung, nach einer Fassung des Größenbegriffs zu suchen, der auch die Belange der Physik berücksichtigt. Nachzulesen ist eine solche z. B. in [Griesel 1997 oder 2005]. Ein besonders wesentlicher Akzent des Größenbegriffs ist für Griesel, dass dieser fest in die Wirklichkeit (die WELT) eingebunden ist. In Anlehnung an eine Formulierung von Hans Freudenthal könnte man sagen: Größen haben eine starke ontologische Bindung. Die Frage, die wir uns stellen, lautet: Kann man eine verlässliche Aussage über die ontologische Bindung eines speziellen Größenbegriffs machen?
Bevor wir versuchen, eine Antwort auf diese Frage zu finden, seien zunächst die drei entscheidenden Begriffe angegeben, auf die Griesel sich stützt.

Definition 1. $W \neq \emptyset$ *heißt* Wertemenge $\Leftrightarrow$

$$\bigvee_{/} \Big(/ : W \times W \to \mathbb{R}^* \wedge \bigwedge_{x,y,z \in W} \big(x/y \times y/z = x/z \wedge (x/y = 1 \to x = y) \big) \Big),$$

wobei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. x/y *heißt* Messquotient *der Werte* x *und* y.

Definition 2. g *heißt eine* Größe $\Leftrightarrow$

$$\bigvee_{T \neq \emptyset} \bigvee_{W} (W \text{ Wertemenge } \wedge g : T \to W).^1$$

T *heißt* Träger(menge) *der Größe* g.

Definition 3. g *sei eine Größe mit Träger* T *und Wertemenge* W.
$E \neq \emptyset$ *heißt* Menge charakterisierender Träger *von* $g \Leftrightarrow$

$$\bigvee_{g_E} \bigvee_{\gamma} \Big(g_E : E \to W \wedge \gamma \subseteq E \times T \wedge \bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{t \in T} \big(g(t) = g_E(e) \leftrightarrow e\gamma t \big) \Big).^2$$

Da sich die gestellte Frage auf die Wirklichkeitsbezüge von Größen bezieht, stützen wir unsere Überlegung auf den Begriff der empirischen Theorie, da er es erlaubt, den empirischen vom theoretischen Anteil der Theorie sauber zu trennen. Als Beispiel behandeln wir den Längenbegriff. Dazu denken wir uns eine endliche Menge von Stäben, (geraden) Zeichenblattlinien o. ä. gegeben, denen wir eine Länge zuordnen wollen.
In [Burscheid/Struve 2009, Kap. III] haben wir unter „Zählzahlen als Maßzahlen“ formal dargestellt, was erforderlich ist, um den obigen Objekten Längenwerte zuzuordnen. Wir wollen den Formalismus hier nicht wiederholen. Dass

[1] Wir verzichten auf die Surjektivität der Abbildungen g und g_E, da sie für die gestellte Frage ohne Bedeutung ist.
[2] s. Anm. 1.

wir uns dort auf Maß*zahlen* und nicht auf Längenwerte – also Werte einer *Größe* – beziehen, hat auf den Formalismus keinen Einfluss. Auch die dort verwandten Zählzahlen durch die natürlichen Zahlen zu ersetzen ist ohne Relevanz. Wie man an der genannten Stelle nachlesen kann, bedarf es aber einer (empirischen) Vortheorie, die z. B. sicherstellt, dass kongruenten Stäben derselbe Längenwert zugeordnet wird. Dazu ist es erforderlich, einen theoretischen Begriff in die Theorie einzuführen. Ein weiterer ist erforderlich, um später durch das Aneinanderlegen von Stäben in der üblichen Form die Addition von Längen repräsentieren zu können. Da wir nur endlich viele Stäbe, Zeichenblattlinien o. ä. haben, dürfen wir annehmen, dass es ein Objekt e gibt, dessen *Kommensurabilitätsbereich* K_e – die Menge aller Stäbe, Zeichenblattlinien o. ä., die sich aus e ganzzahlig zusammensetzen lassen – alle vorgegebenen Objekte umfasst. In K_e entspricht dann das Aneinanderlegen der Stäbe der Addition ihrer Längen. Im Sinne einer partiellen Operation ist diese Addition assoziativ und kommutativ.

Ebenfalls a. a. O. haben wir mit der *Empirischen Theorie der inneren rationalen Verhältnisse* gezeigt, wie Brüche zur Beschreibung innerer Verhältnisse – also Verhältnisse zweier gleichartiger Größenwerte – dienen können. Die Theorie wurde innerhalb der *Empirischen Messtheorie mit rationaler Skala* entwickelt – ihre Modelle sind Modelle dieser Theorie. Zur Formulierung der *Empirischen Messtheorie* waren zwei theoretische Begriffe erforderlich. Einer stellt sicher, dass das Maß einer Teil-Ganzes-Beziehung, was der Bestimmung des inneren Verhältnisses der beiden Einzelmaße entspricht, ein eindeutig bestimmter Bruch ist.

Um auf eine formale Darstellung der *Empirischen Messtheorie* verzichten zu können, greifen wir auf eine auf diese Theorie bezogene systematische (d. h. nicht notwendig genetische) Lernsequenz, die *Lernsequenz über Bruchzahlen als Maßzahlen* zurück, um die erforderlichen Einsichten zusammenzustellen. Die *Empirische Messtheorie* – und damit auch die Lernsequenz – kennt zunächst nur Bruchzeichen. Erst die Theorie gibt ihnen die Bedeutung von Maßzahlen.

Damit das auf dem Anzahlbegriff beruhende Maß und das Messen von Ganzen in der *Empirischen Messtheorie* übereinstimmen, setzt man (in der Bezeichnungsweise von Griesel)

$$x/y = \frac{1}{n}\,,$$

wenn sich ein Realisant von x aus n Realisanten von y zusammensetzen lässt.[3] Es folgt

$$z/x = \frac{k}{n} \quad (k < n)$$

wenn man k-viele Realisanten von y benötigt, um einen Realisanten von z zusammenzusetzen. Wegen der gewünschten Übereinstimmung setzt man $\frac{1}{1} = 1$ und erhält

$$\frac{n}{n} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{n}{1} = n\,.$$

Man kann nun Erweitern und Kürzen einführen. Dies wird für den Übergang von den Brüchen zu Bruchzahlen (Klassen gleichwertiger Brüche) benötigt, da die übliche Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \times d = b \times c$$

auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückführt und keinen inhaltlichen Bezug zur empirischen Theorie der Brüche hat. Sind unechte Brüche eingeführt, so erhält man

$$x/y = \frac{k}{n} \Leftrightarrow y/x = \frac{n}{k}\,.$$

In der *Empirischen Messtheorie mit rationaler Skala* wurde auf zwei verschiedene Weisen eine Multiplikation eingeführt. Die zweite – die *Verkettete Teil-Ganzes-Beziehung* – basiert auf der Gleichung

$$x/y \times y/z = x/z\,.$$

Diese Multiplikation ist als ein bezüglich der *Empirischen Messtheorie mit rationaler Skala* nichttheoretischer Begriff (nur) eine partielle Operation, die zudem nicht notwendig kommutativ ist. Will man diesen „Mangel" beseitigen, so muss man die Multiplikation als einen bezüglich der *Empirischen Messtheorie* theoretischen Begriff einführen.

Und $x/y = \frac{1}{1} = 1$ bedeutet schließlich: ein Realisant von y ist ein Realisant von x, also $x = y$ (Gleichheit gemäß Anm. 3 im Sinne von Kongruenz).

Da die hier interessierende *Empirische Theorie der inneren rationalen Verhältnisse* innerhalb der *Empirischen Messtheorie* entwickelt wird, sind zu ihrer Formulierung keine weiteren theoretischen Begriffe erforderlich.

Kehren wir zurück zu dem Grieselschen Begriffssystem. Wie man dem Vorstehenden entnehmen kann, lässt sich die Menge $\mathbb{B}^*$ – die Menge der von 0 verschiedenen Bruchzahlen –

[3] Wir unterdrücken in der Bezeichnungsweise, dass x, y, z für Klassen kongruenter Stäbe, Zeichenblattlinien o. ä. stehen.

deren Repräsentanten (die Brüche) als Messquotienten beim quantitativen Vergleich der Längen der Stäbe, Zeichenblattlinien o. ä. auftreten, als Wertemenge auffassen.

Betrachtet man eine Menge gegebener Kreise als Trägermenge T, die Menge ihrer Mittelpunktsehnen als Menge E charakterisierender Träger und versteht man $e\gamma t$ als „e ist Mittelpunktsehne des Kreises t", so ist die Abbildung g, die jedem Kreis die Länge einer Mittelpunktsehne zuordnet, eine Größe (die Länge der Kreisdurchmesser) gemäß der Grieselschen Definition. Setzt man im vorliegenden Beispiel $T = E$ und versteht die Relation γ als Identität, so ist die Abbildung, die jedem Stab seine Länge zuordnet, ebenfalls eine Größe.

Schränkt man die Messquotienten auf Bruchzahlen ein, was für die Belange des Unterrichts bis Klasse 10 zulässig sein dürfte, so ist die ontologische Bindung des Begriffs *Länge* deutlich ausgeprägt, wenn auch schon eine mehrstufige Konstruktion empirischer Theorien und ein dreimaliger Rückgriff auf theoretische Begriffe erforderlich sind. Ähnlich dürfte es sich bei anderen nicht zusammengesetzten Größen – wir nennen sie *atomar* – wie Gewichte, Flüssigkeitsmaße o. ä. verhalten. Dies wäre im Einzelfall zu prüfen.

Die einfachsten zusammengesetzten Größen der Physik, die sich aus zwei atomaren Größen zusammensetzen, wie z. B. Geschwindigkeit, können unter den gleichen Einschränkungen, wie wir sie für Längen vorgenommen haben, im Rahmen der *Empirischen Theorie der äußeren rationalen Verhältnisse* (ebenfalls a. a. O.) behandelt werden, die sich auch innerhalb der *Empirischen Messtheorie mit rationaler Skala* entwickeln lässt. Allerdings ist ein weiterer theoretischer Begriff erforderlich, da zwei Maße unterschiedlicher Qualitäten miteinander zu verbinden sind.

Zusammenfassend dürfen wir festhalten, dass auch Begriffe, die ausschließlich in der Wirklichkeit verwurzelt scheinen, nicht ohne theoretische Elemente entwickelt und damit auch nicht verstanden werden können. Darin spiegelt sich, was Hans Niels Jahnke mit Bezug auf Bernard Balzano formuliert, dass „er die 'Größenartigkeit' eines Gegenstandsbereichs nicht als zu setzende apriorische Voraussetzung versteht, sondern als zu entwickelnde und zu erklärende Folge eines Theoretisierungsprozesses" [Jahnke 1981, S. 212]. Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn man davon ausgeht, dass Schüler Mathematik im Rahmen empirischer Theorien erlernen.

Literatur

Burscheid, H. J., Struve H., 2009: Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Verlag Franzbecker, Hildesheim – Berlin.

Griesel, H., 1997: Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. Journal für Mathematikdidaktik 18, 259–284.

Griesel, H., 2005: Modelle und Modellieren. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.), Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. div verlag franzbecker.

Jahnke, H. N., 1981: Zahlen und Größen – Historische und didaktische Bemerkungen. Mathematische Semesterberichte 28, 202–229.