Thomas Bedürftig und Roman Murawski: Die Grundlagen des faszinierenden Phänomens Mathematik

Rezensiert von Heinz Griesel

Zu den Autoren

Der Verlag De Gruyter hat ein neues Buch zum Thema *Philosophie der Mathematik* herausgebracht. Autoren sind unser mathematikdidaktischer Kollege, Prof. Dr. Thomas Bedürftig, Universität Hannover, und der polnische Logiker Prof. Dr. Roman Murawski, Universität Poznan (Posen).
Treffsicher eingesetzte Zitate belegen das umfassende Wissen der Autoren zur Philosophie und zu den Grundlagen der Mathematik.

Zur Zielsetzung des Buches

Das Buch ist als Einführung in die verschiedenen Probleme der Philosophie der Mathematik gedacht. Die Autoren wollen, wie sie im Vorwort schreiben, Schüler, Studenten, Lehrer, Dozenten der Mathematik, aber auch Philosophen sowie interessierte Laien ansprechen.
In dem in Standardgröße abgedruckten Text wollen sie nur elementarmathematische Kenntnisse voraussetzen. Muss zum Verständnis größeres Wissen beachtet werden oder geht es um spezielle Ausführungen mathematikphilosophischer Art, dann ist der Text klein gesetzt.
Die Sprache ist klar und eindeutig, ohne Schnörkel und gut verständlich, auch bei schwierigen Sachverhalten. Stets ist das Wesentliche eines Standpunktes oder einer geschichtlichen Entwicklung im Blick. Manche Aussagen werden durch instruktive Beispiele belegt.

Das Buch als Desiderat im deutschen Sprachraum

Ein solches Buch war ein Desiderat im deutschen Sprachbereich. Zwar gibt es auch Literatur, die in den letzten 20 Jahren erschienen ist. Erwähnt sei: Ch. Thiel, *Philosophie und Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1995. Dieses Buch ist jedoch von einer besonderen philosophischen Grundposition beeinflusst.
Auch gibt es: W. Büttemeyer (Hg.), *Texte – Philosophie der Mathematik*, Verlag Karl Alber München 2003, sowie in der Schriftenreihe *Der Mathematikunterricht* ein Heft *Philosophie und Mathematik*, Jg. 53, Heft 5, Oktober 2007.
Eine fundierte Gesamtdarstellung als Einführung fehlte. Diese liegt nunmehr dankenswerterweise vor.

Ein elementarmathematischer Einstieg in die Philosophie der Mathematik

Das erste Kapitel trägt die Überschrift: *Auf dem Weg zu den reellen Zahlen.*
Es behandelt einfach und gut verständlich die Themen: Irrationalität, Inkommensurabilität, Rechnen mit $\sqrt{2}$?, Intervallschachtelungen, Vollständigkeit, Konstruktion von reellen Zahlen, Umgang mit dem Unendlichen, unendliche nicht periodische Dezimalbrüche.
Hier werden auf dem Weg zu den reellen Zahlen mathematische und philosophische Probleme herausgestellt, die später im Buch dann wieder aufgegriffen werden. Dieses Kapitel stellt einen elementarmathematischen Einstieg in die Philosophie der Mathematik dar.

Das zweite Kapitel als geschichtlicher Hauptteil

Das zweite Kapitel trägt die Überschrift: *Aus der Geschichte der Philosophie und Mathematik.*
Es umfasst etwa ein Drittel des Buches und kann mit seinen 23 Abschnitten als gewichtig bezeichnet werden.
Gut verständlich werden zunächst folgende Themen behandelt: Pythagoras und die Pythagoreer, Platon, Aristoteles, Euklid, Proklos, Nikolaus von Kues, Descartes, Pascal, Leibniz, Kant, Mill und empiristische Konzeptionen,

Bolzano, Gauß, Cantor, Dedekind, Poincaré.
Der Logizismus, nach dessen Auffassung die Mathematik auf die Logik zurückführbar sei, wird ausführlich dargestellt. Im Unterschied zu den meisten Darstellungen des Logizismus werden die zur Vermeidung von Widersprüchen entwickelten Typentheorien in den Grundzügen erklärt und vor allem überzeugend aufgezeigt, welche Unzulänglichkeiten sie aufweisen, so dass sie für die Grundlegung der gesamten Mathematik nicht infrage kommen.
Ebenso ausführlich werden die beiden anderen Grundpositionen, die bis 1930 heftig diskutiert wurden, dargestellt, nämlich der Formalismus und der Intuitionismus.
Die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze und ihre Konsequenzen für den Formalismus werden herausgearbeitet. Sie haben den Formalismus erschüttert, aber nicht völlig widerlegt, ein relativierter Formalismus (engl. *reverse mathematics*, S. 112) blieb bestehen.
Sehr ausführlich werden der Intuitionismus und der z. T. mit ihm zusammenhängende Konstruktivismus besprochen. Die Nähe des Intuitionismus zum Konzeptualismus des Universalienstreits wird herausgearbeitet. Das aktual Unendliche wird im Intuitionismus abgelehnt. Bei den natürlichen Zahlen wird wegen der Nähe zum Zählen die Zeitstruktur mit einbezogen: Natürliche Zahlen als „inhaltslose Abstraktion des Zeitempfindens“ (S. 97)

Philosophie der Mathematik von 1931 bis zum Ende der 1950er Jahre.

Sehr begrüßenswert ist, dass die Autoren nicht – wie manche andere – bei Logizismus, Formalismus und Intuitionismus enden, sondern dass in drei umfangreichen Abschnitten die Philosophie der Mathematik danach bis in unsere Zeit behandelt wird.
Dabei fällt auf, dass neben den klassischen Fragen nach der Seinsweise der mathematischen Gegenstände zunehmend wissenschaftstheoretische Fragen der Mathematik in den Vordergrund treten. Das ist nicht verwunderlich, da die Wissenschaftstheorie als philosophische Disziplin in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen hat.
Sehr präzise werden die einflussreichen Überlegungen von Quine dargestellt, insbesondere die *New Foundation* (NF) (for Mathematical Logic) aus dem Jahre 1937 und die *Mathematical Logic* (ML) aus dem Jahre 1940. eine Erweiterung von NF, beides inzwischen Fachausdrücke der Grundlagenforschung (S. 113).
Obgleich es in der Mathematik keine Experimente gibt, sollten nach Quine für eine mathematische Theorie dieselben Kriterien wie für eine physikalische Theorie gelten „Mathematik ist ein Element in der Gesamtheit aller Theorien, die versuchen die Welt zu erklären“ (S. 113).
Daraus gewinnt Quine das wesentliche Argument, das heute für eine realistische Interpretation der mathematischen Gegenstände vorgebracht wird, das sog.
Putman–Quine-Unentbehrlichkeitsprinzip:
„Weil Mathematik unentbehrlich in physikalischen Theorien ist, existieren mathematische Objekte wie Mengen, Zahlen, Funktionen, – ebenso wie Elektronen existieren, die physikalisch unentbehrlich sind“.
Quine unterscheidet nicht verschiedene Arten von Existenz.
Auch die Mathematik ist partiell in der Lage, die Welt zu erklären.
Ebenso klar werden die philosophischen Auffassungen von Kurt Gödel dargestellt (S. 114 ff).
Gödel war davon überzeugt, dass „die mathematischen Gegenstände real außerhalb von Raum und Zeit und unabhängig vom erkennenden Subjekt existieren“. Er lehnte rein linguistische und syntaktische Interpretationen der Mathematik ab, ebenso eine Wahrheit mathematischer Sätze aufgrund von Konventionen.
Intuition ist seiner Meinung nach die Quelle des mathematischen Wissens.
Auch die philosophischen Auffassungen Wittgensteins zur Mathematik werden dargestellt, freilich auch darauf hingewiesen, dass dies wegen mehrdeutiger und sich infrage stellender Aussagen sehr schwierig ist. Es gibt daher Interpreten, die Wittgenstein als Konventionalisten, andere die ihn als Behavioristen oder gar als strikten Formalisten deuten.
Schließlich wird auch auf die Bedeutung Tarskis hingewiesen, insbesondere auf seine Begründung der Semantik.

Der evolutionäre Standpunkt

In einem eigenen Abschnitt wird der *Evolutionäre Standpunkt – eine neue philosophische Grundposition* besprochen (S.118 ff).
Der Rezensent ist überrascht über die im Ton negative Sicht dieser philosophischen Richtung und hält folgende Variante dieses Standpunktes für zukunftsfähig:
Begriffe, auch mathematische Begriff, werden als zeitlose aber an den menschlichen Körper gebundene (engl. *embodied*) gedankliche Konstrukte des einzelnen Menschen aufgefasst. Ihre Überindividualisierung und Identifizierung erfolgt durch Kommunikation, insbesondere durch Sprache. Die Seinsweise dieser Konstrukte ist die des fiktiven Ansichbestandes.

Die Fähigkeit zur Bildung solcher Konstrukte, die sog. Fiktionsfähigkeit, hat sich im Laufe der Evolution beim Menschen herausgebildet. Der evolutionäre Vorteil bestand u. a. darin, dass auch Konstrukte gebildet werden konnten und wurden, welche in die Wirklichkeit eingebettet sind und somit Teil haben an der Realität. Dadurch bestand die Möglichkeit zur begrifflichen Beherrschung der Wirklichkeit, was sich als evolutionärer Vorteil erwies.
Die begriffliche Wirklichkeit ist eine gedankliche Konstruktion, u. z. des einzelnen Menschen. Zur begrifflichen Wirklichkeit gehören diejenigen gedanklichen Konstrukte, welche auch „Teilhabe" an der Wirklichkeit haben, welche also in die Wirklichkeit „eingebettet" sind.
Bei der Metapher Teilhabe ist das Umgekehrte wie bei Platon gemeint. Nicht die Wirklichkeit hat Teil an den Ideen. Den ideenähnlichen gedanklichen Konstrukten kommt umgekehrt Teilhabe an der Wirklichkeit zu, sie sind *verankert* in der Wirklichkeit. Auch bei den Ausdrücken *einbetten* und *verankern* handelt es sich um eine Metapher. Das ist keine Schwäche dieser Position.
Diese Auffassung kann man im Universalienstreit als realistische Variante eines Konzeptualismus auffassen. Sie geht auch konform mit der modernen Hirnforschung, der gegenwärtigen Kognitionspsychologie und den Lerntheorien, nach denen begriffliches Lernen eigenständig vom Lernenden vollzogen werden muss. Begriffe als gedankliche Konstrukte können nicht aufgezwungen werden, sondern sind individuell vom Lernenden selbst aufzubauen. Der Lehrende kann nur Anreger sein und Hilfestellung leisten. Anschließende Kommunikation, insbesondere sprachliche, kann feststellen, ob auch alle Schüler dasselbe gedankliche Konstrukt gebildet haben. Eventuelle Korrekturmaßnahmen können eingeleitet werden.
Die Anregungen, solche Begriffe zu bilden, gehen dabei durchaus von der Wirklichkeit aus. Der Begriff der Strecke zum Beispiel kann in einem Prozess der idealisierenden Abstraktion aus Kanten an Gegenständen gebildet werden, der Begriff der Fläche an Äckern, Feldern. Diese mathematischen Begriffe sind so von ihrer Entstehung her schon eingebettet in die Wirklichkeit.

Philosophie der Mathematik nach 1960

Seit Anfang der 1960er Jahre gibt es eine Weiterentwicklung der Philosophie der Mathematik.
Natürlich gibt es auch in dieser Zeit Vertreter der monistischen Auffassungen des Logizismus, des formalistischen Hilbertschen Programms und intuitionistische Konstruktivisten. Doch gibt es zunehmend anti-foundationale Auffassungen. Die reale Mathematik und die aktuelle Forschungspraxis treten in den Vordergrund. Wissenschaftstheoretische Überlegungen zur Mathematik gewinnen an Bedeutung. Es entstanden quasi empirische Konzeptionen z. B. unter dem Einfluss der Philosophie von K. Popper, von Imre Lakatos, der auch die Mathematik unter den Wissenschaftsbegriff Poppers fasst. Lakatos Meinungen werden ausführlich besprochen.
Als weiteres Beispiel wird die Theorie von R. L. Wilder ausführlich dargestellt, der die Mathematik insbesondere als kulturelles Phänomen sieht.
Erwähnung finden auch die Auffassungen von R. Hersh und H. Putnam, sowie S. Shapiro und H. Field.
In diese Zeit fällt auch der Einsatz des Computers in der mathematischen Wissenschaft. Die Verfasser unterscheiden S. 134 sechs unterschiedliche Verwendungsweisen.
Der Vier-Farben-Satz war der erste Satz, der wesentlich unter Verwendung eines Computers bewiesen wurde. Die Frage, ob das ein zulässiger Beweis ist, wird diskutiert.

Nicht berücksichtigte neuere Entwicklungen

Die Entwicklung der Philosophie der Mathematik seit dem 2. Weltkrieg ist in der Tat sehr vielgestaltig. Da ist es schwierig, Vollständigkeit zu erreichen.
Der Rezensent hätte sich z. B. gewünscht, wenn auf den interessanten Ansatz eingegangen worden wäre, die Erfindung mathematischer Begriffe durch den Menschen evolutionär aus dem Metapherbegriff zu erklären (Georg Lakoff, Rafael E. Nunez, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Beeing*; New York Basic Books 2000), zumal die mathematischen Beispiele, die in diesem Buch als Beleg für die Thesen der Autoren herangezogen werden, fast ausschließlich aus der Elementarmathematik stammen und also auch für die Didaktik der Mathematik beachtenswert sind.
Dieses Buch ist, wie der englische Ausdruck „embodied" im Titel erkennen lässt ganz im Geiste einer Philosophie geschrieben, die eine platonische Welt von Ideen oder eine eigenständige geistige Welt 3 im Sinne von Popper ablehnt und die Begriffe nur in verkörperter Form, also eingebunden in den mensch-

lichen Körper versteht. Lakoff hat dazu auch das grundlegende Buch geschrieben: Lakoff-Johnson, *Philosophy in the Flesh*, New York, Basic Books 1999.
Eine weitere wissenschaftstheoretische Richtung, die nicht berücksichtigt ist, besteht in dem Bemühen, auch soziologische Aspekte zur Beschreibung und Analyse des Phänomens Mathematik heranzuziehen. Hierzu gehört insbesondere das Buch Bettina Heintz, *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Springer Verlag, Wien 2000. Auch das Buch I. Maaß, *Mathematik als soziales System Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht*, Deutscher Studienverlag, Weinheim 1988, gehört zu dieser Richtung.
Die Diskussion um die Grundlagen der Mathematik war in den letzten 30 Jahren weltweit sehr lebhaft. Führende Logiker und Wissenschaftstheoretiker an renommierten Universitäten vor allem in den USA haben sich daran beteiligt. Erwähnt seien: M. Balaguer (UC Los Angeles), P. Benacerraff (Princeton), G. Boolos (MIT), I. P. Burgess (Princeton), Ch. S. Chihara (Berkeley), M. Dummet (Oxford), B. Hale (Sheffield), Ph. Kitcher (New York), P. Maddy (UC Irvine), M. Schirn (München), M. Steiner (Jerusalem), W. W. Tait (Chicago), C. Wright (St. Andrews).
Sie werden im Buch nicht erwähnt. Das kann man den Verfassern nicht zum Vorwurf machen. Es hätte ja nicht genügt, nur die Namen zu erwähnen. Es hätte neben der Grundposition bzw. Mischposition die besondere Leistung des jeweiligen Wissenschaftlers herausgearbeitet werden müssen. Das hätte den Rahmen dieser einführenden Darstellung gesprengt. Wer sich vertieft mit der neueren Entwicklung beschäftigen will, dem sei als erster Anhaltspunkt das Buch M. Schirn (Hg.), *The Philosophy of Mathematics Today*, New York 2005 (2. Aufl.), empfohlen.

Die systematische Behandlung der Grundsatzprobleme

Im dritten Kapitel erfolgt eine systematische Behandlung der drei großen Problembereiche der Philosophie der Mathematik, die schon im ersten Kapitel herausgestellt wurden, nämlich der Problembereich Zahlbegriff, der Problembereich Unendlich, der Problembereich Kontinuum und unendlich klein.
Die verschiedenen Auffassungen, die in der Geschichte der Philosophie und der Mathematik dazu vertreten worden sind, werden systematisch gesichtet und einander gegenübergestellt. Das vertieft die Darlegungen des zweiten Kapitels. So kann man z. B. über die Unendlichkeit bei Kant, die intuitionistische Unendlichkeit und die logistischen Hypothesen des Unendlichen sowie die formalistische Haltung und heutige Tendenzen lesen.
Heute hat sich das aktual Unendliche gegenüber dem potentiell Unendlichen, das 2000 Jahre das Denken bestimmte, durchgesetzt.
Sehr ausführlich wird über das Kontinuumproblem und seine Verästelungen berichtet. An mehreren Stellen des Buches kommt zum Ausdruck, dass die gegenwärtige Auffassung des Kontinuums als Menge von atomistischen Elementen eine Revolution gegenüber der klassischen Kontinuumsauffassung und seiner Grundvorstellung sei.
Ausführlich wird auch über den geschichtlichen Weg der Elimination der unendlich kleinen Größen und ihre Ersetzung durch den Grenzwertbegriff berichtet. Widersprochen werden muss der Anmerkung S. 171, das Unendlich Kleine sei aus dem Denken verschwunden. Es ist aus den korrekten Beweisen, aber nicht aus dem Denken insbesondere bei den Anwendern von Mathematik verschwunden. Seit den 1960er Jahren ist es sogar rehabilitiert worden. Die Verfasser meinen S. 187, dies sei noch gar nicht richtig wahrgenommen worden.

Mengen und Mengenlehren

Das vierte Kapitel des Buches trägt den Titel *Mengen und Mengenlehren*. Das Wesentliche klar betonend werden besprochen: Paradoxien des Unendlichen, Mengen und das Universalienproblem, die Mengenlehren nach Zermelo-Fränkel und nach v. Neumann, Bernays, Gödel sowie Modifikationen z. B. von W. Ackermann und von Quine (N.F. und M.L.). Weitere Themen sind die Problemkreise Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese.
In diesem Kapitel wird sehr viel Kluges über Mengen und das Kontinuum gesagt, wie z. B. „Es war Jahrhunderte hindurch undenkbar, das Kontinuum als Menge von Individuen zu denken." „Wir können vom Mengenbegriff die Lösung des ontologischen Problems erwarten." „Wir können beim Begriff der Menge nicht auf eine alte philosophische Tradition der Diskussion dieses Begriffs wie beim Zahlbegriff zurückgreifen." „Da alle mathematischen Begriffe auf Mengen zurückgeführt werden können, wird alles in der Mathematik statisch zeitlos."
In diesem Kapitel hätte sich auch ein Hinweis auf A. Oberschelp *Allgemeine Mengenlehre*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994, angeboten. Bei Oberschelp können beliebige Klas-

sen widerspruchsfrei ohne Voraussetzung der üblichen Mengenaxiome gebildet werden. Zusätzliche Axiome ergeben die Zermelo–Fränkel-Mengenlehre, die in klassenlogischer Darstellung sehr handlich und näher an der mathematischen Sprache ist als die üblichen prädikatenlogischen Darstellungen.
Bei Oberschelp findet sich im einleitenden Kapitel auch ein Überblick über die Entwicklung der verschiedenen Mengenlehren und deren Anlässe und Hintergründe einschließlich Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese. Dieser Bericht kann für Leser empfohlen werden, welche eine Vertiefung gegenüber dem Buch von Bedürftig und Murawski wünschen.

Axiomatik und Logik

Kapitel 5 behandelt das Thema Axiomatik und Logik. Logik hat u. a. die Aufgabe, die spezifische Art des mathematischen sich Ausdrückens zu analysieren. Sie unterscheidet dazu Syntax und Semantik der mathematischen Ausdrücke. Beides wird in den Grundzügen dargestellt. Auch der Kalkülbegriff wird reflektiert. Auch ein kurzer Abriss der Geschichte der Logik von der Syllogistik des Aristoteles, über die Anfänge der Aussagenlogik bei Philon von Megara und in der Stoa, die Scholastik, Reimundus Lullus, Leibniz, Boole, Bolzano, Frege, Peano, Whitehead, Russel, Tarski.
Danach folgt ein Abriss zur Geschichte der Axiomatik von Euklid bis Hilbert. Insbesondere wird auf die Kontroverse zwischen Hilbert und Frege eingegangen. Auch wird eine Präzisierung des Theoriebegriffs angegeben.
In diesem Kapitel kommen auch die Nichtstandardmodelle der Arithmetik der natürlichen Zahlen in der Logik erster Stufe zur Sprache. Die Ursache hierfür erfährt man in dem Satz von Löwenheim und Skolem. In der Logik der zweiten Stufe kann man eine kategorische Charakterisierung der natürlichen Zahlen angeben, d.h. dass es bis auf Isomorphie nur ein Modell gibt.
Auch die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze werden auf den Seiten 263 und 269 kurz besprochen.

Zum Verschwinden der Größen als Fundament der Mathematik (S.175 ff).

Die Verfasser stellen überzeugend dar, dass die Mathematik „seit der Ersetzung der Zahlen der Pythagoreer durch die Größen bei *Eudoxus* und *Euklid* bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts hinein eine Wissenschaft der Größen“ gewesen sei. „Größen bildeten das Fundament“. „Der griechische Ersatz für reelle Zahlen waren die Verhältnisse von Größen.“
Zwar wurde dieser Verhältnisbegriff nirgends eindeutig definiert. Doch konnte die Gleichheit selbst irrationaler Verhältnisse präzisiert werden. Das war eine große Leistung. Doch wurde im Laufe der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik die Einführung rationaler und irrationaler Zahlen immer dringender. Ihre Zurückführung auf die natürlichen Zahlen ohne Verwendung von Größen und Größenverhältnissen gelang dann erstmalig Cantor und Dedekind. Das war eine der großen Leistungen der Mathematik um 1900. Diese Entwicklung missfiel G. Frege. Er wollte die Zahlen mit dem Messen verbinden. Ihm schwebte daher eine Präzision des Größenbegriffs vor. Zu diesem Zweck führte er den Begriff des Größengebietes ein, der wie neuere Rekonstruktionen der Theorie von Frege zeigen, mit dem Begriff des Größenbereichs wie ihn Arnold Kirsch 1970 definiert hat, übereinstimmt. (vgl. H. Griesel, *Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege*, ZDM Mathematics Education (2007) 39: 31–38.)
Verschwunden ist in der Mathematik der Größenbegriff als Grundlagenbegriff für die Einführung der Zahlen und anderer mathematischer Begriffe. Er ist aber unentbehrlich, wenn man die Anwendbarkeit der Mathematik im Blick hat. Man denke nur an die vielen Größen, die in der Physik vorkommen: Länge, Flächeninhalt, Volumen, Anzahl, Masse, Zeitdauer, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Kraft, Energie, Leistung, Feldstärke, elektrische Ladung usw. Alle diese Begriffe gehören zur mathematischen Physik und sind auch mathematische Begriffe. Sie sind jeweils durch ein Messverfahren definiert, in welchem der multiplikative Vergleich von Größenwerten erklärt wird. Die Ergebnisse eines solchen multiplikativen Vergleichs sind die Zahlen.
Charakteristisch für den Begriff der Größe ist also, dass es sich um einen Begriff handelt, der mehrere Werte annehmen kann und dessen Werte untereinander multiplikativ verglichen werden können, wobei Zahlen als Vergleichsergebnisse auftreten. Das multiplikative Vergleichen wird auch Messen genannt.
Dies alles lässt sich leicht formal präzisieren. Darauf wird hier verzichtet.
Wenn man also die Zahlen anwendungsorientiert einführen will, wie das Frege wollte und wie es heute in der Schulmathematik auf der ganzen Welt üblich ist, und wenn man diesen genetischen Prozess präzisiert darstellen will, dann kann man auf den Größenbegriff nicht verzichten.

Größen kommen außerdem in der Angewandten Statistik als zentraler Begriff vor. Es ist dort sehr wichtig, Größen als sog. Verhältnisskalen von anderen Skalen wie Nominalskalen, Ordinalskalen und Intervallskalen abzugrenzen, da die anzuwendenden statistischen Verfahren von der Skalenart abhängen.
Ganz verschwunden sind die Größen also *nicht* aus der Mathematik.

Zur Anwendbarkeit der Mathematik

Eins wird aus der Lektüre des Buches klar: Das Phänomen der Anwendbarkeit der Mathematik wird in der gegenwärtigen Philosophie der Mathematik nicht hinreichend gründlich behandelt. Dies wird auch durch die Tatsache belegt, dass die Verfasser diesem Thema keinen eigenen Abschnitt widmen, sondern nur situativ an verschiedenen Stellen darauf eingehen.
Immerhin werden auf den Seiten 133/134 vier Hypothesen benannt, die in der Philosophie der Mathematik zu finden sind:

1. Es gibt eine tiefe ontologische Verwandtschaft zwischen mathematischen und physischen Begriffen. Der Unterschied besteht nur im Grad der Allgemeinheit.
2. Die Gegenstände der Mathematik sind Formen physischer Erscheinungen (N. D. Goodman, *Mathematics as a Natural Science*, Journal of Symboli Logic 55 (1990), 182–193).
3. Mathematische Begriffe sind das Resultat von Ablösungen aus der Realität und deren Tradierungen (Lorenz, Damerow, Wilder).
4. Das Phänomen der Anwendbarkeit der Mathematik ist und bleibt mysteriös und hat keine rationale Erklärung (E. P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics 13 (1960), 1–14).

Alle vier Hypothesen werden nicht breit ausgeführt, sondern im Grunde nur beiläufig erwähnt. Resignierend stellen die Verfasser fest: „Man muss eingestehen, dass es eine eindeutige Erklärung für diese rätselhafte Anwendbarkeit der Mathematik nicht gibt" (S. 133).
Anmerkungen zur Anwendung der Mathematik findet man noch an weiteren Stellen des Buches. So wird z. B. auf S. 63 die gegenwärtige Position des Materialismus (häufig gegenwärtig lieber Naturalismus genannt) dargestellt: Mathematik ist aus den praktischen Bedürfnissen der Menschen entstanden. Sie ist nicht angeboren, sondern entwickelt sich im Prozess der Erschließung der Natur durch den Menschen. Sie ist aus der objektiven Wirklichkeit abgeleitet und entsteht in einem Prozess der Idealisierung und der Abstraktion aus der materiellen Wirklichkeit, die uns umgibt. Daraus erklärt sich, warum die mathematischen Aussagen zur Beschreibung der sinnlich wahrnehmbaren Welt herangezogen werden können.
Es fällt auf, dass sich diese Charakterisierung ganz in der Nähe der Begrifflichkeit der gegenwärtig herrschenden Lerntheorien befindet. Auch ist sie mit einer evolutionären Erkenntnistheorie verträglich.
In einer dringend gewünschten Entwicklung der Philosophie und Wissenschaftstheorie der Anwendbarkeit von Mathematik dürfte auch dem Begriff der Größe eine zentrale Rolle zukommen. Mit dessen Hilfe lässt sich dann auch der Begriff des Modells präzisieren (vgl. H. Griesel, *Modelle und Modellieren, eine didaktisch orientierte Sachanalyse, zugleich ein Beitrag zu den Grundlagen einer mathematischen Beschreibung der Welt*, in: Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation, Festschrift für *Werner Blum*, Hg. H.-W. Henn und G. Kaiser, Franzbecker Verlag Hildesheim, Berlin 2005)
Es wäre sicherlich für eine vertiefte Diskussion der Philosophie der Anwendbarkeit von Mathematik förderlich gewesen, wenn die an der Universität Bielefeld angenommene Dissertation von Th. Wilholt, *Zahl und Wirklichkeit, Eine philosophische Untersuchung über die Anwendbarkeit der Mathematik*, mentis Verlag, Paderborn 2004, einbezogen worden wäre.
Wilholt vertritt einen „behutsamen Realismus", was die mathematischen Gegenstände anbetrifft (S. 281 ff). Die Mathematik sei eine zweigeteilte Wissenschaft, einerseits eine realistische Mathematik und andererseits ein Studium formaler Systeme, wie bei der abstrakten Algebra.
Es gebe zwei Arten von Anwendung der Mathematik: Primäre, bei denen die Träger von (extensiven) Größen in der Wirklichkeit verankert sind und sekundäre bei der Anwendung formaler Systeme.
Auf die Frage, warum die Mathematik anwendbar ist, gibt der Verfasser S. 287 die Antwort: „Es wird keine universelle Antwort geben".
Er stellt weiter fest, die Philosophie der angewandten Mathematik sei ein faszinierender Forschungsbereich an der Schnittstelle zwischen der Philosophie der Mathematik und der Wissenschaftstheorie der Naturwissenschaften, die hoffentlich noch erhellende Einsichten in die Rolle der Mathematik in den empirischen Wissenschaften bringen werde.

Elementarmathematik der Schule als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit

Eine solche Theorie dürfte für die Didaktik der Mathematik von großer Bedeutung sein, denn

die Elementarmathematik, wie sie vom ersten Schuljahr an gelehrt wird, soll anwendungsorientiert aufgebaut werden. Elementarmathematik der Schule ist eine empirische Theorie der Lebenswirklichkeit und muss entprechend in der Schule aufgebaut werden.
Es ist zu erwarten, dass die Didaktik der Mathematik aus einer Theorie ihrer Anwendung grundsätzliche Erkenntnisse zum Aufbau eines Curriculums mit der Bereitstellung von Anregungssituationen von didaktischen Maßnahmen und der Präzisierung von Kompetenzen für eine solche empirische Theorie der Lebenswirklichkeit erhält.
Es sei auch daran erinnert, dass unsere Kölner Kollegen Burscheid und Struve seit Jahren versuchen, aus einer strukturalistischen Analyse der Elementarmathematik Nutzen für die Didaktik der Mathematik zu ziehen.(vgl. H. J. Burscheid, H. Struve, *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen, Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2010). Ein großes Handicap hierbei ist die aufwendige Begrifflichkeit, die dem philosophischen Strukturalismus anhaftet. Eine Theorie der Anwendung von Mathematik, insbesondere der Elementarmathematik auf der Grundlage des Größenbegriffs ist vermutlich durchsichtiger und klarer.
Wer meint, das sei utopisch, der sei auf die Analyse der sog. Schlussrechnung von Arnold Kirsch hingewiesen, die inzwischen in allen Lehrplänen der Bundesländer und in den Curricula der Schulbücher ihre deutlichen Spuren hinterlassen hat. In seinen Analysen spielt der Größenbegriff eine zentrale Rolle.

Zur Bedeutung der Philosophie der Mathematik für Mathematikdidaktiker und Mathematiklehrer

Damit sind wir bei der Frage nach der Bedeutung der Philosophie der Mathematik für die Mathematikdidaktik angelangt.
Für jeden Mathematikdidaktiker und Lehrer muss erwartet werden, dass er einen hinreichenden Überblick über das Phänomen Mathematik besitzt. Dazu gehört insbesondere auch die Philosophie der Mathematik mit ihrer Reflexion über Gegenstände, Methoden, Systeme, Praxis, Entwicklung und Anwendung von Mathematik sowie deren Einbindung in Kultur und Zivilisation.
Auch Philosophie der Mathematik gehört zur mathematischen Allgemeinbildung eines Mathematikers. Darüber hinaus hat die Philosophie der Mathematik auch Rückwirkungen auf den Mathematikunterricht und seine Curricula. Nichts ist so nachhaltig bildungswirksam wie ein Unterricht, der konsequent Phasen der Reflexion mit einschließt. Die Mittel dazu liefert u. a. die Philosophie der Mathematik. Daher sollten diesbezügliche Kenntnisse zum Berufswissen des Mathematiklehrers und des Mathematikdidaktikers gehören.
Schließlich sollte jedem Mathematiklehrer während seines Studiums eine gründliche Kenntnis der Elementarmathematik als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit vermittelt werden, weil er diese später unterrichten muss. Zentrale Hilfen und Anregungen dazu kann die Philosophie der Mathematik liefern.

Schlussbemerkung

Es handelt sich um ein hervorragendes Buch, das auch als Nachschlagewerk sehr gut brauchbar ist.
Der Rezensent kann bekennen, dass er viel an Fakten, aber auch an Zusammenhängen gelernt hat.
Das Buch sei daher allen Mathematikern, vor allem den Mathematikdidaktikern und Mathematiklehrern zur Lektüre empfohlen.
Es gehört unbedingt in die Universitätsbibliothek und in die Bibliothek der fachinhaltlichen bzw. fachdidaktischen Seminare.
Hingewiesen sei auch auf das umfangreiche Literaturverzeichnis, das Personen- und das Begriffsverzeichnis sowie auf einen Anhang mit Kurzbiografien von Philosophen und Logikern. Dies unterstreicht die Empfehlung als Nachschlagewerk.

Thomas Bedürftig und Roman Murawski, *Philosophie der Mathematik*, Verlag De Gruyter Berlin 2010, 322 Seiten, 79,95 Euro.