Die Regeln der Differentialrechnung und ihre direkte Herleitung

Gerd von Harten

Im Gedenken an Dr. Bernd Bekemeier, †12. 7. 2015

In der Sekundarstufe II kann der Begriff der Differenzierbarkeit auf verschiedene Arten eingeführt werden (vgl. Rüthing, 1980). Ein neuerer Vorschlag ist es hyperreelle Zahlen aus der Non-Standard Analysis zu behandeln und auf den Grenzwertbegriff zu verzichten (vgl. Baumman und Kirski, 2016). Als Vorteil wird dabei insbesondere angeführt: „Neu und vorteilhaft ist dabei, und das geht sogar über die Schulmathematik hinaus, dass man bei der Infinitesimalrechnung die Regeln tatsächlich errechnet. Bei der Grenzwert-Analysis ist es dagegen häufig notwendig, diese Regeln zunächst zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzübergang zu bestätigen." (Baumman und Kirski, 2016, S.6).

Schon in Rüthing (1980) wurde diese Problematik für den Beweis der Produktregel für die Ableitung behandelt und eine mögliche Lösung vorgestellt. Der angesprochene Beweis erfolgt üblicherweise durch die sogenannte Nullergänzung (s. u.). Dies kann umgangen werden, in dem zunächst die Ableitung für f^2 mit $2 \cdot f' \cdot f$ hergeleitet und dies dann auf die Funktion $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ angewendet wird.

Wir wollen in diesem Beitrag zunächst zeigen, dass man die Produktregel für zwei Funktionen f, g leicht und ohne Nullergänzung beweisen kann, wenn zunächst der Fall betrachtet wird, dass beide Funktionen an der Stelle gleich 0 sind.

Dann wollen wir zeigen, dass mit einer einfachen Umformung der Definition der Differenzierbarkeit, die Produktregel und auch die Kettenregel ohne Benutzung von Ergänzungen oder der Vermutung des Ergebnisses abgeleitet werden können.

Ein einfacher Beweis der Produktregel

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b), h \in (x_0 - a, b - x_0)$. Dann heißt f differenzierbar in x_0, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Die Definition lässt sich natürlich auf offene Mengen in $\mathbb{R}$ ausdehnen, sowie auf rechts- oder linksseitige Grenzwerte in Randpunkten.

Die Produktregel für zwei differenzierbare Funktionen f, g wird üblicherweise mit Hilfe der folgenden Umformung bewiesen:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}{h} \cdots \\ &\qquad \frac{-f(x_0)\cdot g(x_0+h) + g(x_0+h)\cdot f(x_0)}{} \cdots \\ &\qquad \frac{-f(x_0)\cdot g(x_0)}{} \Big) \end{aligned}$$

Durch Ausklammern von $g(x_0+h)$ und $f(x_0)$ erfolgt der Beweis. Dabei wird benutzt, dass eine in x_0 differenzierbare Funktion auch stetig in x_0 ist. Dies werden wir auch ohne Erwähnung gebrauchen.

Der Term $-f(x_0)\cdot g(x_0+h) + g(x_0+h)\cdot f(x_0)$ wird als Nullergänzung bezeichnet. Man kann diese Ergänzung damit begründen, dass man durch Umformung, die Ableitungen der Funktionen erhalten will. Nichtsdestotrotz erweckt der Term den Eindruck, dass er eingeführt wird, weil das Ergebnis schon bekannt ist.

Wir betrachten jetzt zunächst einen einfachen Spezialfall.

Satz 1: Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und $(f \cdot g)'(x_0) = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 0}{h} \cdot g(x_0+h) \\ &= f'(x_0)\cdot g(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Nun kann die Produktregel für beliebige Funktionen hergeleitet werden.

Satz 2: Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Beweis: Wir betrachten

$$f^*(x) = f(x) - f(x_0) \text{ und } g^*(x) = g(x) - g(x_0).$$

Dann ist

$$f^*(x_0) = g^*(x_0) = 0$$

und deshalb

$$(f^* \cdot g^*)'(x_0) = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} f^*(x) \cdot g^*(x) = {} & f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) \\ & - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} & (f^* \cdot g^*)'(x_0) \\ & = (f \cdot g)'(x_0) - f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 & = (f^* \cdot g^*)'(x_0) \\ & = (f \cdot g)'(x_0) - f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Die Ableitung als lineare Näherung

Die Ableitung einer Funktion kann z. B. als Steigung der Tangente etc. aufgefasst werden, sie ist aber auch eine lineare Näherung der Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0. Dieser Aspekt wird durch folgende Satz deutlich.

Satz 3: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann gilt für alle $h \in (x_0 - a, b - x_0)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o(h)$$

mit $o : (x_0 - a, b - x_0) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Beweis: $o(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ und wegen der Differenzierbarkeit von f ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Für diesen Satz gilt auch die Umkehrung.

Satz 3 (Umkehrung): Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Gibt es eine Funktion $o : (x_0 - a; b - x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ und ein c, so dass für alle $h \in (x_0 - a; b - x_0)$ gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot c + o(h),$$

so ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = c$.

Beweis: Es folgt durch Umformung:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c + \frac{o(h)}{h}.$$

Wird auf beiden Seiten der Grenzwert gebildet, folgt die Behauptung.

Beweis der Produkt- und Kettenregel mit der Näherungsform

Mit Hilfe von Satz 3 lässt sich die Produktregel einfach beweisen. Sind f, g zwei differenzierbare Funktionen so gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o_1(h)$$

und

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h)$$

und damit:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) \\ & = f(x_0) \cdot g(x_0) \\ & \quad + h \cdot (f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)) \\ & \qquad + (f(x_0) \cdot o_2(h) + g(x_0) \cdot o_1(h)). \end{aligned}$$

Die Produktregel ergibt sich durch Umformung oder direkt durch die Umkehrung des Satzes 3. Zum Beweis der Quotientenregel kann zunächst die Ableitung der multiplikativ inversen Funktion bestimmt werden.

Satz 4: Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $g(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: Die Behauptung folgt leicht aus der folgenden Gleichung und der Stetigkeit von g.

$$\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{-g(x_0) + g(x_0 + h)}{g(x_0 + h) \cdot g(x_0)}$$

Die allgemeine Quotientenregel kann dann aus der Produktregel und Satz 4 abgeleitet werden. Ein anderer Weg ist über die Kettenregel möglich. Auch hier kann ein einfacher Beweis über Satz 3 erfolgen.

Satz 5: Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, so ist $f(g(x))$ differenzierbar in x_0 und es gilt: $(f(g(x_0)))' = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$.

Beweis: Nach Satz 3 gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o_1(h) \quad (1)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h) \quad (2)$$

Dann folgt:

$$f\big(g(x_0+h)\big) = f\big(g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h)\big)$$

Setzen wir $h^* = h \cdot g'(x_0) + o_2(h)$ in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} & f\big(g(x_0+h)\big) \\ &\quad = f\big(g(x_0) + h^*\big) \\ &\quad = f\big(g(x_0)\big) + h^* \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_1(h^*) \\ &\quad = f\big(g(x_0)\big) + h \cdot g'(x_0) \cdot f'\big(g(x_0)\big) \\ &\qquad + o_2(h) \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_1\big(h \cdot g'(x_0) + o_2(h)\big) \end{aligned}$$

Mit $o_3(h) = o_2(h) \cdot f'(g(x_0)) + o_1(h \cdot g'(x_0) + o_2(h))$ folgt dann

$$\begin{aligned} & f\big(g(x_0+h)\big) \\ &\quad = f\big(g(x_0)\big) + h \cdot g'(x_0) \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_3(h). \end{aligned}$$

Da $\lim_{h\to 0} \frac{o_3(h)}{h} = 0$ folgt die Behauptung durch Umformung zur Definition der Differenzierbarkeit von $f(g(x))$ oder aus der Umkehrung von Satz 3.

Aus der Kettenregel lässt sich leicht die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion herleiten.

Schlussbemerkungen

Die Produktregel ist ein „neuralgischer Punkt“ im Analysisunterricht (vgl. Rüthing, 1980). Die angegebenen Beweise stellen wie auch der Beweis in Rüthing (1980) eine Möglichkeit dar, diesen Punkt weniger „neuralgisch“ zu machen. Die Einführung hyperreeller Zahlen im Analysisunterricht kann ein Wert für sich sein, für die Umgehung dieses neuralgischen Punktes braucht man sie nicht.

Die Auffassung der Ableitung als lokale lineare Näherung stellt auch eine sinnvolle Ergänzung anderer Interpretationen dar und hat auch Potential in weiteren Anwendungen.

Literatur

Baumman, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der GDM*, (100), 6–16.

Rüthing, D. (1980). Zum Differenzierbarkeitsbegriff und zur Produktregel der Differentialrechnung. *Praxis der Mathematik*, *22*(12), 364–372.

Gerd von Harten, Pelikanweg 22, 46487 Wesel, Email: gerd.vonharten@unitybox.de