

Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Rauischholzhausen, 14.—15. 10. 2016

Anke Lindmeier

Wie jedes Jahr bot das Schloss Rauischholzhausen, die Tagungsstätte der Justus-Liebig-Universität Gießen, einen angenehm-arbeitsamen Rahmen für die jährliche Herbsttagung des Arbeitskreises „Psychologie und Mathematikdidaktik“. Die knapp 30 Teilnehmenden fanden sich unvermittelt inmitten der Diskussion von vier Forschungsarbeiten wieder, die eine thematisch und methodisch ungewöhnliche Bandbreite aufwiesen. Cathleen Heil stellte eine Studie zur Raumvorstellung bei Grundschulkindern vor, in der eine vorgeschlagene Konstrukterweiterung um räumliche Fähigkeiten in Bezug auf den Realraum untersucht wird. Neben den besonderen Bedingungen, die sich aus dem erforderlichen Einzelerhebungen im Realraum ergeben, erfordert das aufwändige Studiendesign fortgeschrittene Analysemethoden. Direkt ans andere Ende des Mathematikunterrichts führten Christoph Pigges Arbeiten mit der Frage danach, welche Fähigkeiten Dozierenden in den Anfangsvorlesungen Mathematik der MINT-Studiengänge tatsächlich bei ihren Studierenden voraussetzen. In Ergänzung zu existierenden Arbeiten wird in der vorgestellten Studie erstmalig mit Hilfe des Konsensverfahrens einer Delphi-Studie beschrieben, wie sich die Schnittstelle Schule – Studium aus Abnehmer-Perspektive darstellt. Katharina Böcherer-Linders Arbeiten zum Einfluss verschiedener Visualisierungen auf die Performanz bei Aufgaben im Bereich „Satz von Bayes“ steht prototypisch für ein Forschungsgebiet, in dem sich psychologische und mathematikdidaktische Forschungsarbeiten traditionell unabhängig voneinander entwickelten. Der Vortrag zeigte auf, wie die beiden Bezugsdisziplinen wechselseitig von den unterschiedlichen Sichtweisen profitieren können und somit ein besseres Verständnis für Phänomene beim Lösen schwieriger mathematischer Sachverhalte erreicht werden kann. Abschließend präsentierte Daniel Sommerhoff eine Untersuchung zur Beschreibung individueller Bedingungsfaktoren für den Erfolg beim Beweisen in der Studieneingangsphase. Dabei weisen die Ergebnisse darauf hin, dass spezifisch beweisbezogene Wissensbereiche als wichtige Prädiktoren auftreten und generische Faktoren in ihrer Bedeutung deutlich übertreffen.

Die Vorträge im herausfordernden Langformat ermöglichten differenzierte Einblicke in die Projekte. Durch die professionellen Vorträge konn-

te die Diskussion in den sich anschließenden konstruktiv-kritischen Plenumsphasen eine über herkömmliche Tagungsdiskussionen weit hinausgehende Tiefe erreichen. Gemäß der Ausrichtung des AKs waren dabei die theoretischen und methodischen Bezüge zur Psychologie genauso Gegenstand wie Fragen nach dem genuin fachspezifischen Erkenntnisgewinn. Sie finden Gegenstand der Vorträge und Kernpunkte der Diskussionen im Folgenden.

Im Namen aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer darf ich den Vortragenden herzlich für ihre Bereitschaft danken, ihre Arbeiten ausführlich vor und zur Diskussion zu stellen!

Cathleen Heil, Leuphana Universität Lüneburg: Raumvorstellung von ViertklässlerInnen in schriftlichen und realen Settings

Psychometrische Tests zur Raumvorstellung erfassen mentale Fähigkeiten, die räumliche Anforderungen in Form von schriftlichem Aufgabenmaterial im Mathematikunterricht abbilden (vgl. Büchter, 2011). Fähigkeiten zur räumlichen Orientierung im Realraum erfordern die Integration einer Vielzahl von räumlichen Informationen, wurden aber bisher nicht erfasst (Allen, 1999). Eine Erweiterung des Konstruktes *Raumvorstellung* auf den Kontext des Realraumes scheint angemessen, wirft aber die Frage auf, inwieweit sich für beide Settings ähnliche mentale Anforderungen formulieren lassen und in welchem Zusammenhang beide Fähigkeitskonstrukte stehen (Hegarty, 2006). In der vorgestellten Studie soll dies geklärt werden. Dafür wurden ein Test in einem schriftlichen und einem realen Setting entwickelt und mit $N = 260$ Viertklässlern durchgeführt. Im Vortrag wurden beide Testinstrumente vorgestellt, sowie erste Ergebnisse der Studie präsentiert. Insbesondere wurden Möglichkeiten weiterführender Analysen zur Diskussion gestellt.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Die anschließende Diskussion bezog sich zunächst auf die theoretischen Konstrukte, zugehörige Fähigkeitsaspekte und deren Operationalisierung. So wurde problematisiert, dass man bei schriftlichen Aufgaben zur Raumvorstellung nicht sicher ausschließen kann, dass diese mit analytischen Fähigkeiten gelöst werden. Eine fehlende Korrelation zwischen entsprechenden Leistungen und de-

nen beim Erlernen Mentaler Karten innerhalb des Gesamtkonstruktes Raumvorstellung könnte aber darauf hindeuten, dass hier eine analytische Komponente kaum bis gar nicht zum Tragen kommt. Um dies genau zu klären, lohnt sich möglicherweise eine vertiefende Untersuchung der zugrunde liegenden kognitiven Prozesse. In einem zweiten Teil der Diskussion wurden die verwendeten Strukturgleichungsmodelle diskutiert. Dabei standen methodische Aspekte (z. B. die sehr guten Fitindizes), aber auch inhaltliche Aspekte (z.B. die möglichen Interpretationen der Trennbarkeit bzw. Nicht-Trennbarkeit der Konstrukte Raumvorstellung im Mathematikunterricht und Raumvorstellung im Realraum) im Zentrum.

Abschließend wurde auch der praktische Nutzen der Studie diskutiert. Die Erkenntnisse der Studie könnten zu einer stärkeren Reflexion führen, welchen Stellenwert Raumvorstellungsfähigkeiten im Realraum innerhalb des Mathematikunterrichts einnehmen und wie diese konkret gefördert werden könnten. Zusammenfassend stellte sich in der Diskussion heraus, dass die Idee des Dissertationsprojektes gut ist und einen sinnvollen Beitrag zur Ausdifferenzierung des Verständnisses von Raumvorstellung in der Mathematikdidaktik leisten kann.

Christoph Pigge, IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik Kiel: Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge – Erste Ergebnisse einer Delphi-Studie mit Hochschullehrenden

Aus Sicht der Hochschulen gibt es trotz hoher Abbruchquoten bisher keine Einigkeit, welche Kompetenzdefizite vor Studienbeginn auszugleichen bzw. welche mathematischen Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge notwendig sind. Vorliegende Arbeiten fokussieren entweder auf personenbezogene Eigenschaften (Heldmann et. al., 1984), mathematische Inhalte (Sutherland & Dewhurst, 1999) oder neben Inhalten auch auf mathematische Prozesse sowie Sichtweisen und Vorstellungen von der Mathematik (SEFI, 2013).

Zur Beschreibung der aus Hochschulsicht für einen erfolgreichen Einstieg in MINT-Studiengänge nötigen mathematischen Lernvoraussetzungen wurde im Projekt MaLeMINT eine Delphi-Studie durchgeführt. In diese sollten möglichst alle Hochschullehrenden einbezogen werden, die in den letzten fünf Jahren im ersten Semester von MINT-Studiengängen eine mathematische Einstiegsvorlesung gehalten haben. In einer Online-Recherche in Vorlesungsverzeichnissen, Modulhandbüchern und Stundenplänen aller deutschen Hochschulen konnten auf diese Weise $N = 2233$ Hochschullehrende ermittelt werden.

Um möglichst umfassend und differenziert notwendige mathematische Lernvoraussetzungen zu erheben, wurde in Anlehnung an Häder (2014) zunächst eine explorative Befragungsrunde mit $N_0 = 36$ Hochschullehrenden durchgeführt. Die ermittelten mathematischen Lernvoraussetzungen wurden dann der gesamten Stichprobe vorgelegt und von $N_1 = 952$ Hochschullehrenden hinsichtlich der Notwendigkeit bzw. Wichtigkeit bewertet sowie ggf. präzisiert oder ergänzt. Nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse wurden diese in einer Folgerunde den Teilnehmenden erneut zur Bewertung, Präzisierung und Ergänzung vorgelegt (Rücklauf von $N_2 = 664$ Hochschullehrenden).

Im Vortrag wurden sowohl das Gesamtkonzept der Studie als auch vorläufige Ergebnisse der ersten beiden Befragungsrunden vorgestellt. Es konnte festgestellt werden, dass Hochschullehrende sowohl mathematische Inhalte und Arbeitstätigkeiten als auch adäquate Vorstellungen von der Mathematik sowie positive Einstellungen und Arbeitsweisen im Hinblick auf Mathematik als notwendig erachten. Dabei deutet sich an, dass die Einschätzung der Notwendigkeit von einem großen Konsens der Hochschullehrenden getragen wird. Bei ca. 70 % aller untersuchten Aspekte zeigte sich bereits nach den ersten beiden Befragungsrunden ein Konsens. Neben der Darstellung der ersten Ergebnisse wurde ein Ausblick auf die weiteren Runden und geplanten Auswertungen gegeben.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Die anschließende Diskussion fokussierte zunächst auf die Genese und Formulierung der Befragungselemente, die im konsensbildenden Verfahren der Delphi-Studie zentralen Einfluss haben und daher im Rahmen der Berichterlegung der Studie besonders zu berücksichtigen sind. In diesem Zusammenhang wurde zusätzlich diskutiert, inwiefern eine feinere Abstufung der Skalen für die Bewertung der Notwendigkeit sinnvoll und unter Aspekten der Praktikabilität möglich ist. In der Diskussion wurden weitere Fragestellungen, z.B. zur Untersuchung von Gruppenunterschieden zwischen den Hochschullehrenden, generiert, die im Hinblick auf die Publikation der Ergebnisse von besonderem Interesse sein könnte. Ein weiterer Schwerpunkt der Diskussion lag auf der möglichen Einordnung der Ergebnisse, beispielsweise welche Konsequenzen die unerwartet hohe Erwartungshaltung in Bezug auf Fähigkeiten zum Einsatz elektronischer Hilfsmittel für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe haben kann.

Insgesamt wurde der empirische Forschungsansatz zur Beschreibung notwendiger Lernvor-

aussetzungen aus Hochschulsicht als sehr positiv aufgefasst. So konnten erstmalig die Vorstellungen von aktiv im Studieneinstiegsbereich dozierenden Hochschullehrenden in großer Anzahl zur Beschreibung von notwendigen mathematischen Lernvoraussetzungen einbezogen werden. Letztlich eröffnete die Diskussion neue Perspektiven insbesondere für die anstehende Auswertung und Publikation der Ergebnisse.

Katharina Böcherer-Linder, Pädagogische Hochschule Freiburg: Der Satz von Bayes. Kognitionspsychologische Grundlagen und empirische Untersuchungen zum Einfluss von Visualisierung

Der Vortrag stellte zunächst zwei konkurrierende kognitionspsychologische Theorien vor, die unterschiedliche Aussagen darüber machen, wie sich Verständnis und Performanz bei der Berechnung des Satzes von Bayes steigern lassen und welche Rolle Visualisierungen dabei spielen. Hieraus wurde die Frage abgeleitet, ob das Baumdiagramm oder das Einheitsquadrat als Visualisierung der statistischen Information besser geeignet ist, um Verständnis und Performanz bei der Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten zu unterstützen. Die beiden genannten Visualisierungen wurden auf Grundlage der kognitionspsychologischen Theorien analysiert und Hypothesen abgeleitet. Im Vortrag wurden die Ergebnisse von zwei empirischen Studien mit Studierenden ($N = 148$ und $N = 143$) vorgestellt, die zeigen, dass das Einheitsquadrat besser geeignet ist, um Verständnis und Performanz beim Satz von Bayes zu unterstützen.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Zu Beginn wurde diskutiert, inwieweit die vorgestellten kognitionspsychologischen Theorien mathematikdidaktische Sichtweisen erweitern können. Dabei schien zunächst der Ansatz „nested sets account“ (Barbey & Sloman, 2007) im Gegensatz zum konkurrierenden „ecological rationality account“ (Gigerenzer & Hoffrage, 1995) besser auf mathematikdidaktische Sichtweisen zu passen. Allerdings zeigte sich im weiteren Verlauf der Diskussion, dass beide Ansätze, die in unterschiedlichen kognitionspsychologischen Modellen verankert sind, für die Mathematikdidaktik von großem Nutzen sein können im Hinblick auf die Generierung weiterer Forschungsfragen und Hypothesen, die über die in dem Vortrag vorgestellten Studien hinausweisen. Außerdem wurde bemerkt, dass die im Vortrag vorgestellten Ergebnisse nicht nur für die Mathematikdidaktik, sondern auch für die Psychologie, in der die beiden Ansätze zur Erklärung der Schwierigkeiten beim Satz von Bayes kontrovers diskutiert wurden (z.B. Johnson & Tubau, 2015), interessant sind, da sie einen empiri-

schen Nachweis erbringen, der den „nested sets account“ stützt.

Abschließend lässt sich sagen, dass der Vortrag mir die Gelegenheit dazu gab, den gesamten theoretischen Rahmen meiner Arbeit ausführlich darzustellen, was sich für mich als außerordentlich hilfreich erwiesen hat.

Daniel Sommerhoff, Ludwig-Maximilians-Universität München: Umgang mit mathematischen Beweisen – Ergebnisse zur Rolle individueller Ressourcen

Wiederholt zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler sowie Studierende Schwierigkeiten beim Umgang mit mathematischen Argumentationen und insbesondere mathematischen Beweisen haben (z.B. Weber, 2003). Spätestens zu Beginn eines mathematischen Studiums führt dies zu Problemen, da Beweise als wissenschaftliche Methode eingeführt werden und besonderer Wert auf den Umgang mit Beweisen gelegt wird. Um diese Probleme und entsprechende Leistungsunterschiede zwischen den Studierenden besser erklären zu können, ist Wissen über den Einfluss von individuellen Ressourcen der Studierenden auf die erfolgreiche Konstruktion und Bewertung von Beweisen hilfreich.

Im Rahmen der auf der Herbsttagung vorgestellten Studie wurde untersucht, inwiefern Kompetenzen im Konstruieren und Validieren von mathematischen Beweisen mit individuellen kognitiven Ressourcen von Studierenden zusammenhängen. Dabei wurden nur solche Ressourcen berücksichtigt, die bereits als Voraussetzungen für den erfolgreichen Umgang mit mathematischen Beweisen bekannt sind (vgl. auch Sommerhoff, Ufer, & Kollar, 2015). In einer querschnittlichen Studie mit Studierenden der Mathematik aus den ersten Semestern wurde die individuelle Ausprägung von sechs verschiedenen kognitiven Ressourcen (mathematisches Basiswissen, mathematisches Fachwissen, mathematisch-strategisches Wissen, Problemlösen, schlussfolgerndes Denken, metakognitives Bewusstsein) sowie die Leistung beim Konstruieren und Validieren von Beweisen erhoben. Es zeigt sich, dass sowohl auf Leistungen beim Konstruieren als auch Validieren von Beweisen das zugrundeliegende inhaltliche Wissen und das mathematisch-strategische Wissen einen Einfluss haben, bei den anderen Ressourcen ergibt sich hingegen ein komplexeres Bild.

Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven

Entsprechend dem fortgeschrittenen Stadium der vorgestellten Studie wurden in der Diskussion zunächst mögliche Implikationen der Ergebnisse für die Lehre thematisiert. Dabei wurde insbesondere diskutiert, welche Art von Aussagen aus den ent-

standenen (Struktur-)Modellen zum Einfluss der Ressourcen gewonnen werden können und ob sich aus den Modellen bereits Lernempfehlungen für Studierende ableiten lassen. Dabei wurde deutlich, dass aufbauend auf den Modellen Interventionsstudien benötigt werden, um kausale Zusammenhänge zu untersuchen. Weiter wurde diskutiert, inwieweit sich die Ressource „mathematisch-strategisches Wissen“ (Weber, 2001) prinzipiell von anderen Konstrukten wie der Kompetenz zum Konstruieren von Beweisen bzw. auch dem Problemlösen trennen lässt. Obwohl die vorliegenden Ergebnisse dies partiell stützen, liegt für eine endgültige Aussage mit dieser Studie noch nicht genug Evidenz vor, auch da das mathematisch-strategische Wissen in der vorgestellten Studie erstmals quantitativ erfasst wurde. Perspektivisch wurde entsprechend eine größer angelegte Studie thematisiert, um zu zeigen, dass sich die Konstrukte auch empirisch ausreichend abgrenzen lassen. Insgesamt bestätigte die Diskussion, dass der differenzierte Blick auf individuelle Ressourcen ein interessanter Ansatzpunkt für das Verständnis von Argumentationsfähigkeiten zu Studienbeginn ist.

Organisatorisches und Ausblick

Im Jahr 2017 werden sich die Mitglieder des AKs Psychologie und Mathematikdidaktik voraussichtlich vom 20. bis 21. Oktober im Schloss Rauischholzhausen einfinden, um bis zu vier neue Projekte rege zu diskutieren. Dabei soll das Forum wieder für fortgeschrittene oder kurz vor dem Abschluss stehende Arbeiten – die nicht notwendigerweise Promotionsarbeiten sein müssen – offen stehen. Sie sollten dazu bereit sein, die Arbeiten im Sinne eines Werkstattberichts zur Diskussion zu stellen. Ihr Interesse an einer aktiven Tagungsteilnahme können Sie bei einer der beiden Sprecherinnen Silke Ruwisch (ruwisch@uni.leuphana.de) oder Anke Lindmeier (lindmeier@ipn.uni-kiel.de) bekunden.

Auf der GDM 2017 wird der AK Psychologie und Mathematikdidaktik keine planmäßige Aktivität anbieten, es besteht aber jederzeit die Möglichkeit, sich unter www.leuphana.de/gdm_psychologie über unsere Ziele und Aktivitäten zu informieren. Möchten Sie in den Mailverteiler aufgenommen werden, so kontaktieren Sie uns einfach!

Gemeinsames Literaturverzeichnis

Allen, G. L. (1999). Spatial abilities, cognitive maps, and wayfinding. In R.G. Golledge (Hrsg.), *Wayfinding behavior: Cognitive mapping and other spatial processes* (Kap. 2). Baltimore: JHU Press.

- Barbey, A. K., & Sloman, S. A. (2007). Base-rate respect: From ecological rationality to dual processes. *The Behavioral and brain sciences*, 30(3), 241–254.
- Büchter, A. (2011). *Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung*. Dortmund: TU Dortmund.
- Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704.
- Häder, M. (2014). *Delphi-Befragungen: Ein Arbeitsbuch* (3. Aufl.). Wiesbaden: Springer.
- Hegarty, M., Montello, D. R., Richardson, A. E., Ishikawa, T., & Lovelace, K. (2006). Spatial abilities at different scales: Individual differences in aptitude-test performance and spatial-layout learning. *Intelligence*, 34(2), 151–176.
- Heldmann, W. (1984). *Studierfähigkeit: Ergebnisse einer Umfrage. Thesen zur Studierfähigkeit und zum Hochschulzugang*. Schriften des Hochschulverbandes (Heft 29). Göttingen: Hochschulverband.
- Johnson, E. D. & Tubau, E. (2015). Comprehension and computation in Bayesian problem solving. *Frontiers in psychology*, 6, 938.
- SEFI (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. A Report of the Mathematics Working Group*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).
- Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2015). Research on mathematical argumentation: A descriptive review of PME proceedings. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 193–200). Hobart, Australia: PME.
- Sutherland, R. & Dewhurst, H. (1999). *Mathematics Education Framework for Progression from 16–19 to HE*. Bristol: University of Bristol, Graduate School of Education.
- Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. In A. Selden & J. Selden (Hrsg.), *Research Sampler (Vol. 8)*. Washington: The Mathematical Association of America. <http://tinyurl.com/owof2sc> (27. 11. 2016)

Anke Lindmeier, IPN Kiel, Olshausenstraße 62, 24118 Kiel. Email: lindmeier@ipn.uni-kiel.de