Herbert Möller:

Elementare Zahlentheorie und Problemlösen

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/mollerh/

Rezensiert von Jürgen Maaß

Veröffentlichungen im Internet haben mehrere Vorteile, obwohl sie in universitären Erfolgsstatistiken derzeit noch wenig wert sind. Ein Buch bei Springer zählt halt mehr …

Ein großer Vorteil ist der Preis: Null Euro Kaufpreis – das kann sich jeder leisten. Ein zweiter Vorteil ist die Hypertextstruktur. Kein Blättern, kein Suchen, nur ein Mausklick – und schon finde ich direkt den „Satz über den kleinsten Primteiler“ oder das „Theorem über die Riemannsche Funktionalgleichung“, wenn der Name, der außerdem bei allen Sätzen suggestiv gewählt ist, irgendwo im Buch wiedererscheint. Durch die generelle Rücksprungmöglichkeit sind auch Beweise, die einen solchen Satz verwenden, einfacher nachzuvollziehen.

Dies ist eines von vielen Details, die für Möllers Art, Mathematik darzustellen, typisch sind: Alles ist oft und sehr gründlich durchdacht, bevor es andere lesen können. Zu den zahlreichen Besonderheiten gehört auch die Einführung der natürlichen Zahlen mit Hilfe von erfahrungsnahen Postulaten, was unter anderem zur Folge hat, dass das wichtige „Induktionsprinzip“ als einprägsamer „Induktionssatz“ auftritt.

Kommen wir zum Inhalt: Das Buch deckt die typischen Teile von Vorlesungen zur elementaren Zahlentheorie ohne Zweifel ab, wie schon die Kapitelüberschriften andeuten: 1 Die natürlichen Zahlen, 2 Teilbarkeit, 3 Elementare Primzahltheorie, 4 Kongruenzen, 5 Ergänzungen und 6 Problemlösestrategien in der Zahlentheorie.

Was findet sich als Ergänzung? Die Faltung zahlentheoretischer Funktionen, die Darstellung als Summe von Quadraten, binäre quadratische Formen und die Klassengruppe sowie quadratische Zahlkörper. Aha – auch das gehört im Prinzip seit Carl Friedrich Gauß zur Zahlentheorie. Tatsächlich ist das Buch aus einer „Jubiläumsvorlesung“ 200 Jahre nach dem Erscheinen der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß hervorgegangen.

Viel ungewöhnlicher ist hingegen das sechste Kapitel, in dem das didaktische Anliegen von Möller besonders zum Tragen kommt. Zunächst fasst er auf einigen Seiten viel Wissenswertes zum Problemlösen und zu heuristischen Strategien zusammen, dann wird dieses Wissen auf Probleme aus der Zahlentheorie angewendet. Wer als Studierende(r) die im Buch vorgestellten Probleme löst und dabei bewusst Strategien nutzt, hat nicht „nur“ elementare Zahlentheorie gelernt, sondern ist auch auf dem besten Weg, sich die wichtige Fähigkeit des Problemlösens anzueignen.

Dazu ein abschließenden Beispiel, Problem 79 von S. 228:

Problem 79

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}_1$, für die $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl darstellt.

Aus der Mathematisierung $2^8 + 2^{11} + 2^n = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}_1$ folgt wegen $2^8 + 2^{11} = 2^8(1 + 2^3) = 48^2$, dass $2^n = (m - 48)(m + 48)$ gilt. Aufgrund des *Hauptsatzes* gibt es also Exponenten $s, t \in \mathbb{N}$, so dass $m - 48 = 2^s$, $m + 48 = 2^t$ und $s + t = n$ erfüllt ist. Durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten erhalten wir

$$2^s\left(2^{t-s} - 1\right) = 2^5 3.$$

Da $2^{t-s} - 1$ ungerade ist, ergibt der auf dem *Hauptsatz* beruhende *Exponentenvergleich* $s = 5$ und $t = 7$. Damit ist $n = 12$ der einzige Exponent, der zu einer Quadratzahl (nämlich $m^2 = 80^2$) führt.

Herbert Möller: Elementare Zahlentheorie und Problemlösen
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/mollerh/ (Die Webseite hat den Namen „Mathkompass“), 254 S., 1,6 MB, (kostenlos, aber nicht wertlos!)