

# Arbeitskreis ‚Vergleichsuntersuchungen zum Mathematikunterricht‘

Soest, 25.–26. 4. 2008

Gabriele Kaiser und Norbert Knoche

Am 25. und 26. April 2008 fand die diesjährige Frühjahrstagung des Arbeitskreises „Vergleichsuntersuchungen zum Mathematikunterricht“ statt. Tagungsort war das „Tagungshaus Soest“ des Schulministeriums NRW in Soest. Im Mittelpunkt der Tagung stand die Diskussion von Kompetenzmodellen für den mittleren Bildungsabschluss und für die Grundschule.

Zu beiden Modellen wurden von Herrn Köller (IQB, Berlin) zunächst die Rahmenbedingungen und Vorgaben bei der Entwicklung dieser Modelle präsentiert.

- ▷ Enge Orientierung an den 2003 und 2004 verabschiedeten Bildungsstandards der KMK, dabei aber zusätzliche Berücksichtigung des gesamten Kompetenzspektrums,
- ▷ Anbindung der Kompetenzstufenmodelle an internationale Vorarbeiten, wie sie in PISA und IGLU realisiert wurden,
- ▷ 5 Kompetenzstufen für die Grundschule und die Sekundarstufe I,
- ▷ annähernd gleich breite Kompetenzstufen,
- ▷ fachdidaktisch gut interpretierbare und vertretbare Grenzen zwischen den Kompetenzstufen,
- ▷ Festlegung von Minimal-, Regel- und Optimalstandards,
- ▷ Erarbeitung eines globalen Kompetenzstufenmodells, das für alle Leitideen gilt, und das mit Hilfe der allgemeinen mathematischen Kompetenzen beschrieben werden kann,
- ▷ ergänzend leitideenspezifische Beschreibungen der Kompetenzstufen.

Das konkrete Vorgehen bei der Setzung von Stufen variierte nach Schulstufe etwas, cum grano salis sah es aber folgendermaßen aus:

- ▷ Modifizierte Bookmarkmethode (computerbasiert) mit der Software „Criterion Map“ (Wilson et al.).
- ▷ Aufgaben werden zunächst skaliert (Raschmodell, Analysen mit ConQuest) und der Schwierigkeit nach angeordnet.
- ▷ Experten setzen Bookmarks bei denjenigen Aufgaben, die zwei Kompetenzstufen voneinander abgrenzen.

- ▷ Ein Proband mit einem Fähigkeitswert  $x$  löst eine Aufgabe mit dem Schwierigkeitsgrad  $x$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 62,5%.
- ▷ Anschließend wurde die Personenverteilung in den Stufen geplottet. Es folgte eine kritische Reflexion der Grenzen, eventuell Neudefinition. Eine Abstimmung mit der Politik fand am 18. 4. 2008 statt. Die Abstimmung mit den Verbänden steht noch aus.

Es folgte dann zunächst eine detaillierte Beschreibung des *Kompetenzmodell für den mittleren Schulabschluss*. Vorgestellt wurde das Modell von Herrn Blum (Kassel) und Herrn Köller. In ihren Arbeitsgruppen wurde dieses Modell erarbeitet.

Das *Modell für das Ende der Grundschulzeit* wurde von Herrn Ufer aus der Arbeitsgruppe von Frau Reiss (LMU München) und Herrn Köller vorgestellt. In ihren Arbeitsgruppen wurde dieses Modell aufbauend auf dem aus der IGLU-Studie entstandenen Modell erarbeitet.

Dieses Modell wurde in der Arbeitsgruppe von Frau Reiss aufgrund theoretischer Überlegungen für die gesamte Grundschulzeit formuliert und auf die verschiedenen Jahrgangsstufen spezifiziert. Zum *Kompetenzmodell für den mittleren Schulabschluss*: Das Modell enthält wie schon gesagt 5 Stufen, wobei die Stufen 2–4 äquidistant sein sollen. Die Stufe 1 ist nach unten offen, die Stufe 5 nach oben.

Schüler(innen), die die Stufe 1 nicht überschreiten, werden wie in PISA als „Risikogruppe“ bezeichnet, Schüler(innen), die die Stufe 5 erreichen, werden als Spitzengruppe bezeichnet. Der Normierungsprozess ergab die folgende Aufteilung der bekannten Leistungsskala ( $M = 500$ ,  $SD = 100$ ):

Kompetenzstufe 1:	< 410
Kompetenzstufe 2:	410–490
Kompetenzstufe 3:	490–570
Kompetenzstufe 4:	570–650
Kompetenzstufe 5:	> 650

Die Kompetenzstufen wurden inhaltlich wie folgt beschrieben:

*Kompetenzstufe 1 (<410):* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können höchstens

- ▷ einfache, direkt umsetzbare Rechnungen mit Zahlen, Größen und Prozenten ausführen,
- ▷ routinemäßige Arbeitsschritte entsprechend direkter Instruktionen ausführen,
- ▷ aus einer gegebenen Darstellung eine Information direkt ablesen,
- ▷ geometrisches Basiswissen reaktivieren und einfache Zeichnungen ausführen,
- ▷ mit einfachsten proportionalen und antiproportionalen Realkontexten umgehen,
- ▷ Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsversuchen berechnen.

*Kompetenzstufe 2 (410–489):* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ Wenig-schrittige Berechnungen linear (vorwärts) durchführen,
- ▷ einer gegebenen Darstellung, die mehrere Informationen enthält, die relevante Information direkt entnehmen,
- ▷ elementares begriffliches Wissen wiedergeben,
- ▷ einfache geometrische Konstruktionen durchführen und direkte Implikationen in geometrischen Kontexten vornehmen,
- ▷ einfache lineare Zusammenhänge beschreiben,
- ▷ aus gegebenen elementaren Begründungen die richtige auswählen,
- ▷ einfache Beziehungen zwischen Mathematik und Realität herstellen.

*Kompetenzstufe 3 (490–569):* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ wenig-schrittige Berechnungen, die nicht ausschließlich „vorwärts“ gerichtet sind, im linearen Kontext durchführen,
- ▷ auch zwei-schrittige Prozentberechnungen realisieren,
- ▷ einfache geometrische Konstellationen analysieren, reale Kontexte linearen Charakters inhaltlich interpretieren und einfache lineare Algebraisierungen vornehmen,
- ▷ einfache Begründungen geben.

*Kompetenzstufe 4 (570–650):* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ einfache Berechnungen nach einer selbst entwickelten Strategie durchführen,
- ▷ selbst Darstellungen erzeugen,
- ▷ überschaubare Algebraisierungen vornehmen,
- ▷ inhaltliche Begründungen in überschaubaren Kontexten geben,
- ▷ reale Kontexte nicht-linearen Charakters inhaltlich interpretieren,

- ▷ Wahrscheinlichkeiten mehrschrittiger Zufallsversuche berechnen.

*Kompetenzstufe 5 (>650):* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ komplexe Algebraisierungen durchführen,
- ▷ mit nicht-linearen Termen umgehen,
- ▷ komplexe Begründungen, die tieferes inhaltliches Verständnis erfordern, geben,
- ▷ selbst erkundete Informationen begrifflich erfassen, verallgemeinern und anwenden,
- ▷ komplexe Problemsituationen modellieren,
- ▷ flexibel zwischen verschiedenen Informationsquellen auswählen,
- ▷ flexibel zwischen Darstellungen übersetzen.

Wie realisieren sich diese Kompetenzstufen in den einzelnen *Leitideen*? Herr Blum wählte zur Beantwortung dieser Frage exemplarisch die Leitidee „Funktionale Zusammenhänge“. Für diese Leitidee haben die Kompetenzstufen folgende inhaltliche Beschreibung:

*Kompetenzstufe 1:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können höchstens

- ▷ einfache lineare Gleichungen lösen,
- ▷ einzelne Werte aus Graphen, Diagrammen und Tabellen ablesen und ggf. interpretieren,
- ▷ einzelne Werte innerhalb von einfachen proportionalen Realkontexten bestimmen,
- ▷ bei inhaltlich gegebenen einfachen Folgen die unmittelbar nächsten Folgenglieder ermitteln.

*Kompetenzstufe 2:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ bei Darstellungen funktionaler Zusammenhänge eine relevante Information direkt entnehmen,
- ▷ anhand einer verbal beschriebenen (realitätsbezogenen) Zuordnungsvorschrift konkrete  $x$ - und  $y$ -Werte bestimmen,
- ▷ gegebene einfache Behälter und Füllgraphen einander zuordnen,
- ▷ lineare Gleichungen den entsprechenden realen Kontexten zuordnen,
- ▷ bekannte geometrische Sachverhalte den entsprechenden Termen zuordnen,
- ▷ einfache Realsituationen den passenden Funktionstypen zuordnen,
- ▷ bei inhaltlich gegebenen Folgen konkrete Folgenglieder ermitteln.

*Kompetenzstufe 3:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ graphisch/verbal dargestellte überschaubare funktionale Zusammenhänge den passenden

- realen Kontexten zuordnen,
- ▷ einfachen Realsituationen die passende lineare (Un)Gleichung zuordnen,
- ▷ eine durch eine einfache Gleichung beschriebene realitätsbezogene Zuordnungsvorschrift inhaltlich interpretieren,
- ▷ bei einer durch eine einfache Gleichung beschriebenen Zuordnungsvorschrift konkrete  $x$ - und  $y$ -Werte berechnen,
- ▷ gegebene Behälter und Füllgraphen einander zuordnen,
- ▷ bei tabellarisch dargestellten Folgen zu gegebenen Gliedern die dazugehörige Platznummer bestimmen.

*Kompetenzstufe 4:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ anhand gegebener Weg-Zeit-Graphen linearer Funktionen die Geschwindigkeit bestimmen,
- ▷ verbal oder tabellarisch beschriebene lineare Beziehungen in Realkontexten erkennen, aufstellen sowie  $x$ - und  $y$ -Werte berechnen,
- ▷ dem Graphen einer quadratischen Funktion die passende Funktionsgleichung zuordnen.

*Kompetenzstufe 5:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.

- ▷ zu realitätsbezogenen linearen Sachverhalten begründet Stellung nehmen,
- ▷ zu inhaltlich gegebenen Folgen einen Term aufstellen,
- ▷ aus graphisch gegebenen linearen Modellen realitätsbezogene Folgerungen ziehen,
- ▷ Auswirkungen von Änderungen des Graphen quadratischer Funktionen auf die entsprechenden Funktionsterme beschreiben,
- ▷ komplexere Modellierungen in einem funktionalen Kontext durchführen,
- ▷ in nicht-linearen innermathematischen Kontexten Argumentationen durchführen.

In den Ausführungen von Herrn Köller zu den Vorgaben bei der Entwicklung der Kompetenzmodelle waren die Begriffe Minimal-, Regel- und Optimalstandards gefallen. Wie lassen sich diese Begriffe im Rahmen dieses Modell für die Sek I inhaltlich beschreiben?

Zu dieser Frage wurden im Vortrag folgende *Arbeitsdefinitionen* gegeben und im Plenum diskutiert:

- ▷ *Mindeststandard:* Wer den Mindeststandard erfüllt, besitzt basale mathematische Kompetenzen, die in einfachen Fällen für das Zurechtkommen in Alltagssituationen oder in der beruflichen Ausbildung ausreichen. Wer ihn nicht

erfüllt, gehört zur Risikogruppe, d. h. es besteht die Gefahr, dass diese Schüler nicht hinreichend in der Lage sind, selbst in einfachen mathemathhaltigen alltäglichen oder beruflichen Situationen ohne Hilfe zurechtkommen. Den Mindeststandard sollen alle Schüler des Bildungsgangs erfüllen. Er ist im o. g. Kompetenzmodell bei 410 Punkten lokalisiert. Schüler, die den Mindeststandard erfüllen, würden also in diesem Kompetenzmodell mindestens die Stufe 2 erreichen.

- ▷ *Regelstandard:* Wer den Regelstandard erfüllt, besitzt Sek.I-typische mathematische Kompetenzen, die sowohl einen Beitrag dazu leisten, in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger“ zu handeln, als auch eine mathematische Grundbildung konstituieren, die u.a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen mit einschließt. Der Regelstandard ist im o. g. Kompetenzmodell in der Mitte von Kompetenzstufe 3, d. h. bei 530 Punkten lokalisiert.
- ▷ *Optimalstandard:* Wer diesen Standard erfüllt, besitzt über die Regel hinausgehende mathematische Kompetenzen, wie sie von einem Schüler, der den mittleren Schulabschluss hat, normativ als Ergebnis eines verstehensorientierten Mathematikunterrichts erwartet werden. Das schließt u. a. eigenständige Begründungen, Algebräisierungen und Modellierungen mit ein. Der Optimalstandard ist im o. g. Kompetenzmodell etwa in der Mitte von Kompetenzstufe 4, also etwa bei 610 Punkten lokalisiert.

Im Anschluss an den Vortrag erhielten die Teilnehmer und Teilnehmerinnen Einsicht in einige der Items, die bedeutsame Grenzen (Mindest-, Regel- und Optimalstandard) markieren. Es wurden Arbeitsgruppen gebildet, in denen nach den Protokollen ähnliche Fragestellungen diskutiert wurden, darunter insbesondere die Frage nach dem Verhältnis des empirisch ermittelten Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe und ihrer Zuordnung zu den genannten Standards. Die Frage war, ob bei einer Aufgabe nicht vor einer Überprüfung des empirischen Schwierigkeitsgrades unter inhaltlichem Aspekt festgelegt werden muss, welchem der o. g. Standards sie zuzuordnen ist? Herr Blum führte dazu aus, dass die Festlegung der Grenzen für die verschiedenen Standards in einem Wechselspiel zwischen Theorie und Empirie erfolgt ist.

## Zum Kompetenzmodell am Ende der Grundschulzeit

Herr Ufer ging zunächst auf allgemeinere Überlegungen der Arbeitsgruppe zur Entwicklung eines Kompetenzmodells zur Beschreibung der Struktur mathematischer Kompetenzen zu verschiedenen Zeitpunkten des Lernprozesses von Kindern in der Grundschule ein. Dieses Modell umfasst Kompetenzniveaus, die zunächst mathematisch inhaltlich beschrieben wurden.

*Kompetenzniveau 1: Numerisches und begriffliches Grundlagenwissen*

*Kompetenzniveau 2: Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Zehnersystem, der ebenen Geometrie und Größen*

*Kompetenzniveau 3: Sicheres Rechnen in curricularem Umfang und einfaches Modellieren*

*Kompetenzniveau 4: Beherrschung der Grundrechenarten unter Nutzung der Dezimalstruktur und begriffliche Modellierung*

*Kompetenzniveau 5: Anspruchsvolles Problemlösen im mathematischen Kontext*

Am Beispiel der Niveaus 1, 3 und 5 wurde exemplarisch eine inhaltspezifische Beschreibung der einzelnen Niveaus gegeben.

*Kompetenzniveau 1 (Grundlagenwissen)*

- ▷ Einfaches Wissen zum Umgang mit Zahlen. Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie nur Grundkenntnisse zu den jeweiligen, im Lehrplan definierten Zahlenräumen und den dort vorgegebenen Operationen voraussetzen. Sie erfordern in allen Jahrgangsstufen das Beherrschen des kleinen Einspluseins.
- ▷ Die Aufgaben beschränken sich auf einfaches Zahlenmaterial.
- ▷ Die zugrunde liegende mathematische Struktur ist leicht erkennbar und die Aufgaben berücksichtigen keinerlei Anwendungen in Sachzusammenhängen.

*Kompetenzniveau 3 (Verknüpfung von Operationen und Prozessen)*

- ▷ Hier werden sicheres Beherrschen der Grundrechenarten sowie der sichere Umgang mit Größen im curricularen Umgang verlangt.
- ▷ Im Bereich Geometrie wird Basiswissen in Aufgaben angewandt.
- ▷ Einfache Sachzusammenhänge werden mathematisch interpretiert und rechnerisch gelöst.
- ▷ Darüber hinaus erfordern die Aufgaben die Verknüpfung von Operationen.

*Kompetenzniveau 5 (Kreatives Problemlösen)*

- ▷ Auf diesem Niveau werden anspruchsvolle Pro-

blemstellungen bearbeitet, die eigenes Denken, flexibles Kombinieren und einem systematischen Umgang mit Informationen erfordern. Diese werden gegebenenfalls aus unterschiedlichen Darstellungen entnommen

- ▷ Für die Lösung einer Aufgabe ist oftmals das Entwickeln individueller Lösungsstrategien erforderlich.
- ▷ Insgesamt handelt es sich um Aufgabenstellungen mit erhöhter Komplexität, bei denen der Weg zur Lösung unbekannt oder ungeübt ist und die Kreativität der Schülerinnen und Schüler fordert.

Die Bedeutung von Begriffen wie „begriffliches Verstehen“ bzw. „einfaches Modellieren“ etc. ist relativ zum Stand der Ausbildung zu verstehen. Die Kompetenzniveaus erfordern also Spezifikationen für die Referenzpunkte der Entwicklung. Das geschieht auf der Basis fachdidaktischer Theorien über Denkprozesse beim Lösen mathematischer Probleme *zum jeweiligen Zeitpunkt*.

Für das Ende der Jahrgangsstufe 1 würden die Kompetenzniveaus dann etwa die folgende Beschreibung erhalten:

*Kompetenzniveau 1: Numerisches und begriffliches Grundlagenwissen. Zählfertigkeiten bis etwa 20.*

*Kompetenzniveau 2: Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Zehnersystem, der ebenen Geometrie und Größen. Grundlagen des kleinen Einspluseins (z. B. mit kleinen Summanden).*

*Kompetenzniveau 3: Sicheres Rechnen in curricularem Umfang und einfaches Modellieren. Zählfertigkeiten über 30 hinaus und sicheres Rechnen im Zahlenraum bis 20.*

*Kompetenzniveau 4: Beherrschung der Grundrechenarten unter Nutzung der Dezimalstruktur und begriffliche Modellierung. Addition und Subtraktion mit Zehnerzahlen.*

*Kompetenzniveau 5: Anspruchsvolles Problemlösen im mathematischen Kontext. Additionen im Zahlenraum jenseits der 20, z. B. ZE+E (mit oder ohne Zehnerübergang).*

Herr Ufer sprach dann Ergebnisse aus Validierungsstudien in den Jahrgangsstufen 2 und 3 an und bemerkte dazu, dass die zugeordneten Kompetenzniveaus relativ gut den empirischen Lösungsraten entsprachen. Er notierte aber auch, dass eine spezifische Niveaustuktur im Sinne einer hierarchischen Anordnung der Items entsprechend den Lösungsraten mit den allgemeinen Niveaubeschreibungen nicht zu erreichen war, wenn die Inhalte komplexer wurden (Jahrgangstu-

fe 3). Eine offene Frage ist also, ob eine Definition von Niveaus möglich (und erstrebenswert) ist, die sich auch in einer hierarchischen Anordnung der Itemschwierigkeiten widerspiegeln.

Herr Köller stellte die von der Arbeitsgruppe Reiss und dem IQB gemeinsam erarbeitete Spezifizierung des allgemeinen Modells für das Ende der Jahrgangsstufe 4 vor.

Das Modell ist durch die folgende Skala und Kompetenzstufen gekennzeichnet:

*Kompetenzstufen im Fach Mathematik in der Grundschule bei  $M = 500$  und  $SD = 100$*

*Kompetenzstufe 1: <390 Routineprozeduren auf der Grundlage einfachen begrifflichen Wissens*

*Kompetenzstufe 2: 390–460 Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Mindeststandard)*

*Kompetenzstufe 3: 460–530 Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext (Regelstandard)*

*Kompetenzstufe 4: 530–600 Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang (Optimalstandard)*

*Kompetenzstufe 5: > 600 Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien.*

Die Stufen wurden wie folgt inhaltlich spezifiziert:

*Kompetenzstufe 1:* Einfache mathematische Begriffe und Prozeduren sind bekannt und können in einem innermathematischen Kontext bzw. in einem aus dem Alltag vertrauten oder gut geübten Kontext korrekt reproduziert werden. Insbesondere werden grundlegende Begriffe der ebenen Geometrie und gängige Repräsentanten standardisierter Einheiten richtig verwendet. Kleinere Zahlen können in Bezug auf ihre Größe verglichen werden, Zahldarstellungen in Stellentafeln werden sicher gelesen. Die Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins werden beherrscht und bei halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren genutzt, wenn die Aufgabenstellungen keine besonderen Schwierigkeiten aufweisen. Klar strukturierten Diagrammen, Schaubildern und Tabellen mit Bezug zur Lebenswirklichkeit können relevante Daten entnommen werden.

*Kompetenzstufe 2:* Die Struktur des Dezimalsystems wird genutzt, Gesetzmäßigkeiten werden erkannt und bei der Fortsetzung einfacher Zahlenfolgen, beim strukturierten Zählen und systematischen Probieren berücksichtigt. Aufgaben zur

Addition, Subtraktion und Multiplikation werden halbschriftlich und schriftlich durchgeführt, Überschlagsrechnungen werden durchgeführt. Insbesondere können in diesem Zusammenhang einfache Sachaufgaben gelöst werden. Aus dem Alltag vertraute proportionale Zuordnungen werden erkannt und angewendet. Bei einfachem Zahlenmaterial wird das Umwandeln von Größen in gegebene Einheiten auch bei gemischten Größenangaben durchgeführt. Grundbegriffe der räumlichen Geometrie werden korrekt verwendet, wenn diese einen Bezug zum Alltag haben. Räumliche Beziehungen werden zur Lösung einfacher Probleme genutzt. Wesentliche Grundbegriffe aus dem Umfeld von Zufall und Wahrscheinlichkeit werden korrekt verwendet („sicher“, „unmöglich“, „wahrscheinlich“).

*Kompetenzstufe 3:* Das erlernte Wissen kann flexibel in unterschiedlichen Problemstellungen genutzt werden, die einem vertrauten Kontext zuzuordnen sind. Insbesondere wird mit Zahlen und Operationen im curricularen Umfang sicher umgegangen, Überschlagsrechnungen werden auch bei großen Zahlen sicher durchgeführt. Strukturelle Aspekte werden bei gut geübten Inhalten gesehen und können kommuniziert werden. Das betrifft auch Inhalte der Geometrie, wobei etwa zwischen verschiedenen Darstellungsformen einer Figur vermittelt werden kann. Einfache Sachsituationen werden modelliert und die damit verbundenen Problemstellungen gelöst. Daten und Informationen können in bekanntem Kontext flexibel dargestellt werden. Bei nicht allzu komplexen Zufallsexperimenten werden Gewinnchancen korrekt eingeschätzt und begründet.

*Kompetenzstufe 4:* Auch in einem wenig vertrauten Kontext wird mathematisches Wissen sicher angewendet. Eigene Vorgehensweisen werden korrekt beschrieben, die Lösungswege anderer Kinder werden verstanden und reflektiert. Das Rechnen wird im curricularen Umfang in allen Varianten sicher beherrscht. Begriffe der ebenen und räumlichen Geometrie werden flexibel verwendet. Zahldarstellungen und Stellenwerttafeln können auch bei sehr großen Zahlen nach Vorschrift selbstständig manipuliert und systematisch verändert werden. Das Rechnen mit Größen ist sicher und flexibel und umfasst insbesondere Näherungsrechnungen und Überschlagsrechnungen. Informationen aus unterschiedlichen Quellen können in einen Zusammenhang gestellt und in Modellierungsaufgaben selbstständig verwendet und manipuliert werden.

*Kompetenzstufe 5:* Mathematische Problemstellungen werden auch in einem unbekanntem Kontext angemessen, sicher und flexibel bearbeitet. Dabei werden geeignete Strategien, sinnvolle Bewertungen oder Verallgemeinerungen auf hohem Niveau geleistet. Umfangreiches curricular verankertes Wissen wird in ungewohnten Situationen flexibel genutzt. Das Vorgehen kann sicher und nachvollziehbar kommuniziert und begründet werden. Komplexe Sachsituationen werden modelliert und bearbeitet, wobei besondere Schwierigkeiten wie die Verwendung von Tabellen, der Umgang mit zusammengesetzten Größen oder das Rechnen mit Zahlen in Kommaschreibweise auftreten können. Es können auch ungewohnte funktionale Zusammenhänge analysiert und genutzt werden. Die Lösung von Aufgaben kann ein hohes Maß an räumlichem Denken oder entsprechende analytische Fähigkeiten voraussetzen.

Am Samstag stellten Gabriele Kaiser und Björn Schwarz ein Kompetenzmodell für angehende Lehrerinnen und Lehrer vor, das aus Ergebnissen der Studie „Mathematics Teaching in the 21st Century“ (MT21) hervorgeht. Der Vortrag basiert auf einem Kapitel aus dem zu MT21 erschienen Buch<sup>1</sup>.

Ausgehend von massiver Kritik an der Lehrerbildung führt die IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievements) zur Zeit (2007–2009) eine internationale Vergleichsstudie zur Wirksamkeit der Lehrerbildung durch, TEDS-M (Teacher Education Development Study – Learning to teach mathematics). Aufgrund fehlender theoretischer Konzepte und Instrumente wurde zur Itementwicklung und -testung eine Vorbereitungsstudie vorgeschaltet, MT21. Diese begann 2002 und wurde in insgesamt sieben Ländern, unter anderem Deutschland und die USA, durchgeführt. Die Studie teilt sich allgemein in drei Ebenen (Individuum, Institution, System), Zielpopulation sind angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer für die Sekundarstufe I. Auf der individuellen Ebene von MT21, deren Ergebnisse im Folgenden im Vordergrund stehen, wird dabei im Anschluß an Weinert (1999) und mit theoretischer Bezugnahme auf unter anderem Shulman (1986) und Bromme (1995) auf die erworbene Kompetenz fokussiert.

Die Daten wurden an vier Universitäten und 22 Studienseminaren erhoben ( $N = 849$ , verteilt auf drei Kohorten: Grundstudium:  $n_1 = 368$ , Hauptstudium:  $n_2 = 195$ , Referendariat:  $n_3 = 286$ ). Die Ausschöpfungsquote variiert zwischen 16 % und 80 % (Durchschnitt 31 %), so dass viele Ergebnisse vorsichtig interpretiert werden müssen.

Die Itementwicklung von MT21 geschah dabei unter Berücksichtigung mehrerer Kriterien. Zum Einen wurde hinsichtlich inhaltlicher Gesichtspunkte unterschieden, wobei zwischen Arithmetik, Algebra, Funktionen, Geometrie und Statistik differenziert wurde. Daneben wurde zwischen vier mathematischen Tätigkeiten, dem Algorithmisieren, dem Problemlösen, dem Begründen und dem Modellieren unterschieden. Darüber hinaus wurden jedoch einerseits unter Bezugnahme auf das zugrunde liegende Kompetenzmodell und andererseits unter Bezugnahme auf andere Studien auch weitere Kriterien im Rahmen der Itementwicklung berücksichtigt, die für die folgenden Ergebnisse relevant sind. Dies waren insbesondere:

*Das Niveau des mathematischen Wissens.* Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Mathematik der Sekundarstufe I
- ▷ Mathematik der Sekundarstufe II
- ▷ „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ (Kirsch, 1977)
- ▷ Universitäre Mathematik

*Die Verknüpfung des mathematischen Wissens mit anderen Dimensionen.* Dies können beispielsweise Verknüpfungen von mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen oder Verknüpfungen von verbalen und graphischen Aussagen sein.

Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Keine Verknüpfung erforderlich
- ▷ Eine einfache Verknüpfung erforderlich
- ▷ Eine anspruchsvolle Verknüpfung erforderlich
- ▷ Mehrere Verknüpfungen erforderlich

*Zur Itembearbeitung nötige kognitive Anstrengungen.* Diese ergeben sich beispielsweise aus der Zahl der aufeinanderfolgenden Bearbeitungsschritte, dem Abstraktionsgrad eines Problems oder den notwendigen Transferleistungen.

Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Keine besonderen kognitiven Anstrengungen

<sup>1</sup> Blömeke, Sigrid; Lehmann, Rainer; Seeber, Susan; Schwarz, Björn; Kaiser, Gabriele; Felbrich, Anja; Müller, Christiane (2008). *Niveau- und institutionenbezogene Modellierung des fachbezogenen Wissens.* in: Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerbildung.*

▷ Einfache kognitive Anstrengungen  
 ▷ Komplexe kognitive Anstrengungen  
 Es war das nahe liegende Ziel der Itementwicklung, ein möglichst breites Spektrum bezüglich der Kriterien abzudecken. Eine formale Klassifizierung der Items bezüglich dieser Kriterien geschah, im Gegensatz zu den vorher geschilderten Kriterien, nicht, da Uneinheitlichkeiten auf internationaler Ebene dem entgegenstanden. Daher ist die folgende Modellierung auf die deutsche Stichprobe beschränkt. Hierbei wurde die Reliabilität durch 3 Rater gesichert, bei Uneinheitlichkeit wurden externe Experten hinzugezogen. Die folgenden Ergebnisse basieren dann auf der eindimensionalen Rasch-Skalierung. Gebildet wurde dabei ein Gesamtttestwert von mathematischem und mathematikdidaktischem Wissen (latente Korrelation der Gebiete .81), was sich inhaltlich mit dem Zusammenhang dieser Wissensgebiete im Unterricht begründen lässt. Generell zeigt sich dann zuerst, dass mit der jeweils nächsten Stufe eines Merkmals (bezüglich der drei oben beschriebenen Kriterien, also Niveau des mathematischen Wissens, Verknüpfung von mathematischem Wissen mit anderen Dimensionen und den nötigen kognitiven Anstrengungen) generell ein Anstieg der Itemschwierigkeit verbunden ist. Eine Regressionsanalyse ergibt, dass die Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit zu großen Teilen durch vier Merkmale möglich ist (69 % Varianz erklärt). Die folgende Tabelle liefert einen Überblick über diese Merkmale und die zugehörigen unstandardisierten Regressionsgewichte:

Merkmale	Regressionsgewicht	Standardfehler	Irrtumswahrscheinlichkeit
Konstante	-.90	.16	p<.001
universitäre Mathematik	1.67	.20	p<.001
eine anspruchsvolle Verknüpfungsleistung	.45	.18	p<.05
mehrere Verknüpfungsleistungen	1.54	.19	p<.001
komplexe kognitive Anstrengungen	.93	.15	p<.001

Ein Item, das eines der vier Merkmale aufweist, ist also um den Betrag des entsprechenden Regressionsgewichtes, gemessen in Logits, schwe-

rer als ein Item, das das entsprechende Merkmal nicht aufweist. Die „Konstante“ bezeichnet dabei die Basisschwierigkeit eines Items, das keines der vier Merkmale enthält. Aus diesen Daten lässt sich die theoretische zu erwartende Schwierigkeit jedes Items berechnen, indem ausgehend von der Konstante die Summe der Logits derjenigen Merkmale, die das betreffende Item aufweist, gebildet wird.

Auf Basis dieser Ergebnisse kann dann ein Kompetenzmodell bestimmt werden, indem aus den Ergebnissen der Regressionsanalyse die Schwellenwerte des Modells abgeleitet werden. Als Beginn einer neuen Kompetenzstufe wird dabei derjenige Schwellenwert definiert, ab dem ein bestimmtes Merkmal erstmalig auftritt. Dabei wurden drei Voraussetzungen festgelegt:

- ▷ Es handelt sich um keine Ausnahme, das heißt, mehrere Items weisen die erwartete Schwierigkeit auf.
- ▷ Die jeweilige Merkmalskombination muss im Test wirklich realisiert sein.
- ▷ Die jeweilige Merkmalskombination muss konzeptionell überzeugen.

Dies führt zu einem Kompetenzmodell mit vier Stufen, das sich wie folgt zusammenfassend darstellen lässt:

Kompetenzniveau	erwartete Aufgabenschwierigkeit in Logits	universitäre Mathematik	eine anspruchsvolle Verknüpfung	mehrere Verknüpfungen	komplexe kognitive Anstrengungen
unter A	-0.90	0	0	0	0
A	-0.45	0	1	0	0
B	0.03	0	0	0	1
C	0.64	0	0	1	0
		1	0	0	0
D	1.60	0	0	1	1
		1	0	0	1

„Unter Kompetenzniveau A“ bedeutet dabei, dass Aufgaben, die eines der vier Merkmale enthalten, auf diesem Niveau nicht sicher beherrscht werden können. Die vier Kompetenzstufen lassen sich dann wie folgt charakterisieren:

**Kompetenzniveau A:**

- ▷ Testpersonen können Aufgaben lösen, die eine anspruchsvolle Verknüpfungsleistung erfordern (in MT21 häufig: mathematisches und mathema-

tikdidaktisches Wissen verknüpft)

- ▷ Mathematisches Wissen unterhalb Universitätsniveau
- ▷ Kognitive Anstrengungen nicht zu komplex, das heißt, nicht zu viele gedankliche Bearbeitungsschritte

*Kompetenzniveau B:*

- ▷ Testpersonen können Aufgaben lösen, die komplexe kognitive Anstrengungen erfordern
- ▷ Mathematisches Niveau weiterhin unter Universitätsniveau
- ▷ Es darf höchstens eine einfache Verknüpfungsleistung gefordert sein

*Kompetenzniveau C:*

- ▷ Testpersonen beherrschen universitäres mathematisches Wissen
- ▷ Testpersonen sind in der Lage, mehrere Verknüpfungsleistungen zu erbringen
- ▷ Keine zusätzlichen komplexen kognitiven Anstrengungen, das heißt begrenzte Anzahl notwendiger gedanklicher Bearbeitungsschritte

*Kompetenzniveau D:*

- ▷ Gekennzeichnet durch das Beherrschen komplexer kognitiver Anstrengungen, das heißt mehrerer gedanklicher Bearbeitungsschritte
- ▷ Zusätzlich Beherrschen von universitärem mathematischem Niveau beziehungsweise mehreren Verknüpfungsleistungen

Abschließend sollen auf Basis der Daten von MT21 noch die Verteilungen der Referendarinnen und Referendare auf die einzelnen Kompetenzstufen dargestellt werden. Für die Gesamtgruppe der Referendarinnen und Referendare ( $n = 286$ ) ergibt sich dann folgende Verteilung:

---

unter Kompetenzniveau A	11.2 %
Kompetenzniveau A	23.6 %
Kompetenzniveau B	26.1 %
Kompetenzniveau C	26.7 %
Kompetenzniveau D	12.3 %

---

Man erkennt, dass gut 10 % der Referendarinnen und Referendare unter Kompetenzniveau A liegen, und andererseits knapp zwei Fünftel den beiden höchsten Kompetenzniveaus zuzuordnen sind. Erwartungsgemäß überdeckt diese Darstellung Effekte und Unterschiede, die in den unterschiedlichen Schulstufen bedingt sind (also GHR und GyGS). Daher soll abschließend die Verteilung der Referendarinnen und Referendare auf die Kompetenzniveaus getrennt nach Schulstufen dargestellt werden:

*Gruppe der angehenden GHR-Lehrerinnen und Lehrer (n = 133):*

---

unter Kompetenzniveau A	20.2 %
Kompetenzniveau A	35.5 %
Kompetenzniveau B	27.5 %
Kompetenzniveau C	11.4 %
Kompetenzniveau D	5.3 %

---

*Gruppe der angehenden GyGS-Lehrerinnen und Lehrer (n = 153):*

---

unter Kompetenzniveau A	3.4 %
Kompetenzniveau A	13.2 %
Kompetenzniveau B	24.9 %
Kompetenzniveau C	40.1 %
Kompetenzniveau D	18.4 %

---