Meike Akveld

Knoten in der Mathematik – Themenheft Topologie

Rezensiert von Christian Bär

Die Autorin möchte mit dem vorliegenden Themenheft Knotentheorie, ein Teilgebiet der Topologie, an Schulen bekannt und populär machen. Dies ist sehr begrüßenswert, denn Knotentheorie kann sehr elementar, d. h. ohne größere mathematische Vorkenntnisse, behandelt werden, ist sehr anschaulich und kann sehr schön verdeutlichen, dass Mathematik viel mehr ist als der sonst unterrichtete Schulstoff. Bemerkenswerterweise ist Knotentheorie auch in der mathematischen Forschung sehr aktuell, natürlich auf einem weit höheren technischen Niveau. Am Ende dieses ganz elementar gehaltenen Kurses versteht der Schüler einige natürliche Fragen, die bis heute offen sind, etwa ob es nichttriviale Knoten mit trivialem Jones-Polynom gibt. In wenigen mathematischen Disziplinen kann man so schnell und elementar an die Front aktueller Forschung geführt werden.

Worum geht es inhaltlich? Ein Knoten ist eine geschlossene Raumkurve ohne Selbstdurchdringungen, wobei wir zwei Knoten als gleich betrachten, wenn sie ineinander deformiert werden können. Am besten stellen wir uns einen Knoten als ein Stück Schnur vor, dessen Enden miteinander verbunden sind. Solche Knoten können sehr kompliziert sein; sind zwei Knoten gegeben, ist es in der Regel alles andere als offensichtlich, ob sie gleich sind, d. h. ineinander verbogen werden können. Man kann nun versuchen, eine Deformation durch Probieren zu finden. Gelingt dies, weiß man, die Knoten sind gleich. Gelingt es, nach sagen wir zwei Stunden, noch immer nicht, besagt dies natürlich nichts. Die Knoten könnten verschieden sein, aber vielleicht haben wir uns auch einfach zu dumm angestellt. Wie kann man sicher nachweisen, dass zwei Knoten tatsächlich verschieden sind?

Derartige Fragen treten in der Mathematik häufig auf und werden in der Regel durch die Einführung geeigneter Invarianten beantwortet. Wir wollen daher geschlossenen Raumkurven Invarianten zuordnen, die sich bei Deformation nicht ändern. Haben wir dann die Invarianten zweier Knoten berechnet und festgestellt, dass sie verschieden sind, müssen auch die beiden Knoten verschieden sein. Die Suche nach einer Deformation können wir uns dann also sparen. Diese Invarianten können als Werte Zahlen annehmen oder Polynome oder etwas ganz anderes. Sie sollten nicht zu kompliziert sein, damit sie praktisch berechenbar bleiben, aber auch nicht zu einfach, damit sie möglichst viele verschiedene Knoten unterscheiden können.

Da sich schlecht mit Raumkurven praktisch rechnen lässt, arbeitet man statt dessen mit Knotendiagrammen, d. h. mit dem Schatten des Knotens unter einer geeigneten Projektion in die Ebene. Wann zwei Knotendiagramme zum selben Knoten gehören, ist seit langem bekannt und führt auf die so genannten Reidemeister-Schritte, wie im ersten Kapitel des Buches erklärt. Man kann daher Knoteninvarianten dadurch konstruieren, dass man Knotendiagrammen Objekte zuordnet und dann überprüfen muss, dass diese sich nicht nur bei Deformationen des Diagramms, sondern auch bei Reidemeister-Schritten nicht ändern. Dieses Verfahren wird im Themenheft erstmals in Kapitel 5 am Konzept der Dreifärbbarkeit erläutert. Die Invariante nimmt in diesem Fall nur zwei mögliche Werte an, nämlich „ja" oder „nein", je nachdem ob das Diagramm dreifärbbar ist oder nicht. Mit dieser noch recht schwachen Invariante kann man immerhin schon sehen, dass das Kleeblatt ein nichttrivialer Knoten ist und auch nicht mit dem Achterknoten übereinstimmt. Auf ähnliche Weise werden in den Kapiteln 6 und 7 stärkere Invarianten auf elementare Weise konstruiert und an Beispielen erläutert, nämlich die Verschlingungszahl und das Jones-Polynom. Des Weiteren gibt es je ein Kapitel über Kreuzungszahlen, über Spiegelbilder von Knoten sowie über Primknoten. Ähnlich wie natürliche Zahlen in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden können, kann jeder Knoten eindeutig aus so genannten Primknoten zusammengesetzt werden, so dass man sich auf deren Studium beschränken kann.

An mathematischen Vorkenntnissen wird vom Schüler wenig verlangt. Erst im letzten Kapitel ist eine gewisse Sicherheit bei algebraischen Umformungen erforderlich. Der Text wurde in Schweizer Schulen erprobt. Die ersten fünf Kapitel eignen sich durchaus für die gymnasiale Mittelstufe, die beiden letzten Kapitel sollten erst in der Oberstufe eingesetzt werden.

Die meisten der hier benutzten Konzepte lassen sich am besten anhand von Beispielen erklären. Der Lehrer sollte z. B. die Modifikation von Knotendiagrammen mittels Reidemeister-Schritten an einigen Beispielen vorführen und dann die Schüler selbst andere Beispiele probieren lassen und dabei Hilfestellung leisten. Für das Selbststudium dagegen eignet sich der Text meiner Einschätzung nach weniger; die Gefahr, dass ein Schüler eine Definition nicht richtig auffasst und dann ohne fachliche Anleitung nicht mehr weiterkommt, scheint mir doch sehr groß.

Es finden sich 76 Aufgaben von angemessenem Schwierigkeitsgrad mit Lösungshinweisen. Zahlreiche, meist recht schlichte Abbildungen illustrieren den Text.

Im ersten Kapitel werden sowohl Knoten als auch Knotendiagramme eingeführt. Dieser begriffliche Unterschied ist wichtig und führt, wie bereits erwähnt, zu den Reidemeister-Schritten.

Um so ärgerlicher fand ich, dass später im Text dort, wo von Knotendiagrammen die Rede sein müsste, häufig von Knoten gesprochen wird. Im 7. Kapitel werden Knoten ihre Klammerpolynome zugeordnet, um dann festzustellen, dass das gar nicht möglich ist, da das Klammerpolynom nicht unter allen Reidemeister-Schritten invariant ist. Man hätte das Klammerpolynom einem Knoten*diagramm* zuordnen müssen, um diese unnötige Verwirrung zu vermeiden. Es gibt weitere vermeidbare Ungenauigkeiten. So wird beispielsweise beim Lösungshinweis zu Aufgabe 37 übersehen, dass man begründen muss, warum die in einem Fall verloren gegangene dritte Farbe irgendwo anders im Diagramm wieder auftauchen muss. Das macht die Aufgabe weit schwieriger als von der Autorin wohl geplant.

Trotz dieser kleineren Mängel halte ich das Buch für einen sehr willkommenen Beitrag. Es kann dem Lehrer als gute Grundlage zur Konzeption einer AG zur Knotentheorie dienen. Die Knotentheorie kann eine wunderbare Bereicherung des Mathematikunterrichts sein. Insofern war dieses Buch überfällig.

Meike Akveld: *Knoten in der Mathematik – Themenheft Topologie*, DMK, Orell Füssli, Zürich 2007, ISBN 978-3-280-04050-8