Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen

Reinhard Oldenburg

In den letzten Ausgaben der GDM-Mitteilungen gab es zahlreiche Aufsätze, die sich mit dem Begriff der Stoffdidaktik, seiner Definition und seiner Bedeutung beschäftigt haben. Viele Ausführungen können den Eindruck erwecken, in der Stoffdidaktik seien die wesentlichen Fragen geklärt. Dem ist aber nicht so, wie dieser kleine Beitrag zeigt.

Ausgangspunkt ist die folgende Frage: Sind die beiden Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ äquivalent? Äquivalenz von Gleichungen ist ein zentraler Begriff in der Mathematik der Sekundarstufe I und deswegen könnte man annehmen, er sei geklärt. Gegen diese Einschätzung spricht aber eine kleine Befragung im Kollegenkreis: 10 Kollegen sagten „ja“, 7 „nein“, einige weitere waren unentschieden. Fachwissenschaftliche Kollegen tendieren zu „nein“. Diese kleine Befragung erhebt keinen Anspruch auf Repräsentativität, sie beweist aber zweifelsfrei: Es gibt kein geteiltes Verständnis der Äquivalenz von Gleichungen.

Welche Definitionen des Begriffs Äquivalenz von Gleichungen findet man in der Literatur?

- Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Kirsch formuliert das so: „Äquivalenz zweier Aussageformen bedeutet nichts anderes als Gleichheit ihrer Erfüllungsmengen“ (Kirsch, 1997, S. 108). In dieser Sichtweise sind beide Gleichungen äquivalent, da jeweils $\{0\}$ Erfüllungsmenge ist.
- Variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen in der gleichen Variablen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Kirsch vertritt auch diese Position: „Man kann ein- und dieselbe Menge durch verschiedene Aussageformen mit derselben freien Variablen beschreiben. Das sind dann ‚äquivalen-

te' Aussageformen" (Kirsch, 1997, S. 107).[1] Mit dieser Auffassung sind die beiden Gleichungen nicht äquivalent.

Versionen der ersten Fassung dominieren in den Schulbüchern. Allerdings wird die Umbenennung der Variablen in keinem Fall betrachtet, insbesondere wird nirgends die dann mögliche Äquivalenztransformation der Variablenumbenennung thematisiert.

Da die deutliche Mehrheit der Schulbücher und die knappe Mehrheit der Kollegen, die beiden Gleichungen als äquivalent betrachten, stellt sich die Frage, ob das Problem nicht einfach dadurch gelöst werden kann, dass die variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz als Fehlvorstellung klassifiziert wird. Ich bin aber nicht dieser Auffassung. Grund ist das Substitutionsprinzip: Objekte und Ausdrücke können durch dazu äquivalente Objekte und Ausdrücke ersetzt werden.

Wendet man dieses Prinzip unter der Annahme, die beiden Gleichungen seien äquivalent, auf das Gleichungssystem $x = 0, y + 1 = 2$ an, erhält man $y = 0, y + 1 = 2$. Die korrekte Formulierung des Substitutionsprinzips muss dann lauten: Äquivalente Objekte darf man manchmal, je nach Kontext, durcheinander ersetzen, manchmal auch nicht.

Ein weiteres Problem der Lösungsmengenäquivalenz ist, dass sie sich auf Gleichungen und Gleichungssysteme mit mehr als einer Variablen nur mit Zusatzinformationen (etwa einer Variablenordnung, die die Lösungstupel eindeutig interpretierbar macht) anwenden lässt.

Eine stoffdidaktische Analyse ist einfach und erklärt nebenbei den oben angedeuteten Befund, warum Fachwissenschaftler zur Nichtäquivalenz tendieren.

In der Logik wird die Bedeutung eines Terms oder einer Gleichung (dass man dazwischen nicht unterscheiden muss, ist ein großer Vorteil!) gegeben durch Interpretationen: Eine Interpretation ist eine Belegung von Variablen mit Werten. Zwei Terme oder Gleichungen definiert man sinnvollerweise als einsetzungsäquivalent, wenn sie unter jeder Interpretation jeweils den gleichen Wert haben. Betrachtet man etwa die Interpretation $\{x = 0, y = 1\}$ dann hat unter dieser Interpretation $x = 0$ den Wert „wahr", $y = 0$ dagegen den Wert „falsch", weil sich durch das Einsetzen einmal $0 = 0$, das andere mal $1 = 0$ ergibt. Daher sind die Gleichungen nicht äquivalent.

Es gibt noch einen zweiten Äquivalenzbegriff, den man davon abgrenzen kann: Zwei Gleichungen (oder Terme) sind umformungsäquivalent, wenn sie durch eine Kette zulässiger Äquivalenzumformungen ineinander umgeformt werden können. Dieser Umformungskalkül ist korrekt, wenn alle umformungsäquivalenten Gleichungen auch einsetzungsäquivalent sind, und vollständig, wenn alle einsetzungsäquivalenten Gleichungen auch umformungsäquivalent sind. Beide Ziele kann man nicht erreichen, wie ein klassisches Resultat der Logik zeigt, und Korrektheit ist wichtiger: Man wählt und legitimiert Umformungsregeln gemäß der Bewahrung der Einsetzungsäquivalenz. Auch für den Unterricht interessante Beispiele sind (über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$) die Gleichungen $x^2 + 1 = 0, x^2 + 2 = 0, \sin(x) = 2$, die paarweise einsetzungsäquivalent, aber nicht umformungsäquivalent sind.

Auch in der Schulbuchliteratur könnte man diese Sicht verwenden. Statt Interpretation bietet es sich vielleicht an, von Belegung zu sprechen. Eine Möglichkeit zur Einführung von Variablen ist, dass man statt vieler baugleicher Zahlterme einen Term mit einer Variablen betrachtet (z. B. $3 \cdot x + 4$ als vereinfachten Term für den Preis einer Taxifahrt von x Kilometern) und dann den Wert unter verschiedenen Belegungen $x = 1$, $x = 2$, u.s.w. berechnen lässt. Das Konzept der Belegung dehnt sich dann systematisch auf mehrere Variablen aus und kann im ganzen Verlauf der Algebra verwendet werden. Insbesondere klärt dies auch, was man unter dem Veränderlichenaspekt versteht: Weder das Symbol x ändert sich, noch ändert sich die Zahl, auf die x verweist, sondern man ändert die Belegung. Das Lösen einer Gleichung ist die Suche nach einer Belegung, unter der die Gleichung den Wert „wahr" ergibt.

Nachdem diese Klärung erfolgt ist, sollte man noch einen kritischen Blick zurück werfen – wieso sind so viele Kollegen Anhänger der problematischen Ansicht, die beiden Gleichungen seien äquivalent? Dies dürfte daran liegen, dass wir bei Gleichungen traditionell eine bei Funktionen verbreitete Unterscheidung nicht machen. Bei Funktionen unterscheiden wir zwischen der Funktion und dem Funktionsterm. Die Terme $x + 1$ und $y + 1$ sind selbstverständlich verschieden, die Funktionen mit den Definitionen $f(x) = x + 1, g(y) = y + 1$ sind aber gleich. Das liegt daran, dass hier ein impliziter Allquantor steht, gemeint ist ja $\forall x : f(x) = x + 1$, und durch Quantoren gebundene Variablen können selbstverständlich umbenannt

[1] Ich lese dabei den Teil „in derselben freien Variablen" als Anforderung für die Äquivalenz. Es könnte auch sein, dass Kirsch das verstanden haben wollte als Einschränkung der Definition und dass über Aussageformen mit verschiedenen Variablen gar keine Aussage gemacht werden soll. Dies erscheint mir aber eher wenig plausibel.

werden. Wir haben in der obigen Analyse Gleichungen als analoge Objekte zu Termen verstanden: Eine Gleichung besteht aus zwei Termen und einem Gleichheitszeichen. Anhänger der Äquivalenz könnten diese Sicht zurückweisen und statt dessen Gleichung und Gleichungsfunktion identifizieren (so wie einige, aber wenige, Term und Funktion identifizieren). Die zur Gleichung $x + 1 = 2$ gehörige Gleichungsfunktion ist eine Abbildung $\mathbb{R} -? \{\mathit{wahr}, \mathit{falsch}\}$. Die Gleichungsfunktionen zu den Gleichungen $x = 0, y = 0$ sind gleich, beides sind die Funktionen, die 0 auf *wahr* und alle anderen Zahlen auf *falsch* abbilden. Die Lage wäre also übersichtlicher, wenn man zwischen Gleichung und Gleichungsfunktion ebenso unterscheiden würde, wie zwischen Funktionsterm und Funktion.

Auf Basis dieser stoffdidaktischen Analyse kann man also den Begriff der Äquivalenz klären, leicht zugänglich machen und das Substitutionsprinzip bewahren. Stoffdidaktik wäre überflüssig, wenn nicht in fast allen Schulbüchern eine ungeeignete Definition der Gleichungsäquivalenz stünde.

Literatur

Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis.

Reinhard Oldenburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg,
Email: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de