„Auch arbeitet man entspannter in der Diskreten Mathematik und ist experimentierfreudig“

Nachlese einer Vorlesung

Brigitte Lutz-Westphal

Im Sommersemester 2007 fand an der TU Berlin eine vierstündige Vorlesung „Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen“ für Studierende des Lehramts statt.[1] Anstelle einer klassischen Vorlesung sollte diese Veranstaltung ein Konzept verwirklichen, das sich an der Theorie des authentischen Lehrens und Lernens von Mathematik[2] orientiert und zudem Anregungen für eine unterrichtliche Umsetzung des Vorlesungsstoffes gibt.[3, 4]

Ein Blick in den Vorlesungsraum in der ersten Semesterwoche zeigt 30 Studierende, die sich über den Netzplan der Berliner U- und S-Bahn beugen und angeregt in Kleingruppen diskutieren: Wie kommt man am schnellsten von der TU zum Bahnhof Hermannplatz? Welche Bahnhöfe sind schnell oder unkompliziert zu erreichen? Für die konkreten Fragen finden sich schnell Lösungsvorschläge. Aber es wird weiter hinterfragt: Wie findet man solche optimalen Wege im allgemeinen Fall? Was verstehen wir unter optimalen Wegen? Welche mathematischen Werkzeuge werden benötigt?

Ein wesentlicher Punkt der authentischen Vermittlung von Mathematik ist eine konsequente Problemorientierung des Stoffes. Daraus ergibt es sich, dass die Vorlesung nicht mit der Bereitstellung von Grundlagen beginnt. Die einzelnen Themenbereiche der Vorlesung[5] wurden ohne lange Vorrede anhand realer oder realistischer Anwendungen vorgestellt und jeweils in Form von Fragestellungen an die Studierenden weitergegeben. Sie hatten dann die Aufgabe, sich in einer Zeitspanne von ca. 15–30 Minuten zunächst ohne weitere fachliche Hinweise in Kleingruppen mit der Problematik zu beschäftigten.

Begriffe und Definitionen wurden erst dann erarbeitet, wenn eine inhaltliche Notwendigkeit dafür deutlich wurde. Leider war es aus organisatorischen Gründen nicht möglich, Vorlesung und Übung als integrierte Veranstaltung anzubieten, was sicherlich ideal für eine durchgängige aktive Erarbeitung des Stoffes durch die Studierenden wäre. Aber auch mit der klassischen Organisationsform war es möglich, das hier skizzierte Konzept durchzuführen.

Bei einigen (wenigen) Studierenden löste das Vorgehen zunächst Irritationen aus: „Wir sind doch hier nicht im Kindergarten!“ war ein empörter Ausruf eines Studenten während der ersten Erarbeitungsphase in der zweiten Vorlesungsstunde. Dahinter stand die Erwartung, dass eine Vorlesung sehr kompakt schwierigen Stoff frontal zu vermitteln habe.

Auf die Erarbeitungsphasen folgte dann auch stets eine durch die Dozentin moderierte Phase der Sammlung der unterschiedlichen Lösungsideen und -ansätze, um anschließend auf eine fachlich angemessene formale Ebene überzuleiten und den inhaltlichen Anspruch einer universitären Hauptstudiums-Vorlesung zu erfüllen. Die „handfeste“ Hochschulmathematik sollte unter keinen Umständen zu kurz kommen. Es wurde allerdings versucht, sie so in die Erarbeitung einzubeziehen,

[1] Assistenten waren Andrea Hoffkamp und Andreas Fest.
[2] Vgl. Kapitel 1 in [4]
[3] In Anlehnung an das Buchkonzept von Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal in [3].
[4] Vgl. auch: Hußmann/Leuders in [2].
[5] Die Vorlesung orientierte sich an [3], Kapitel 1–5.

dass sie nicht als abschreckend und unzugänglich empfunden wird,[6] sondern als folgerichtige Vertiefung und Systematisierung der im ersten Ansatz gefundenen Ideen. Die inhaltliche Abfolge wurde dabei flexibel gehandhabt, als Reaktion darauf, welche Ansätze und Fragestellungen die Studierenden in den Phasen selbstständiger Arbeit gefunden hatten.

Die Idee, zunächst mit individuellen Lösungsideen zu beginnen, um dann im gemeinschaftlichen Austausch die fachlich-formale Ebene zu erreichen, ist dem Konzept des dialogischen Lernens entlehnt[7] und erwies sich auch hier als sehr fruchtbar.[8]

In diesem Rahmen wurden auch während des gesamten Semesters immer wieder unterschiedliche Definitionen desselben Objekts diskutiert. Beispielsweise existieren etliche unterschiedliche Graphen-Definitionen. Das erscheint zunächst sehr verwirrend, wenn man sich die Fachliteratur ansieht. Ergründet man allerdings zu welchem Zweck jeweils Graphen definiert wurden, so erschließt sich relativ schnell, dass jede Definition für ihren Zweck passend gewählt wurde und je einen bestimmten Aspekt besonders hervorhebt. Diese (für jeden praktizierenden Mathematiker banale, aber leider üblicherweise selten ausformulierte) Erkenntnis ist für Studierende enorm hilfreich, um angemessen mit Definitionen umgehen zu können und ggf. selbst eigene Definitionen entwickeln und begründen zu können. Insbesondere für zukünftige Lehrerinnen und Lehrer, die im Rahmen von offeneren Unterrichtskonzepten mit verschiedenen Schülerlösungen und -vorschlägen umgehen müssen, ist dieser reflektierte Umgang mit gegebenen Formulierungen ein wichtiger Schritt, um individuelle Lernprozesse angemessen begleiten zu können.

Der geschilderte Umgang mit Definitionen, die problemorientierte Herangehensweise und die Phasen selbständiger Erarbeitung heben den prozesshaften Charakter von Mathematik hervor. Auch bei Beweisen wurde darauf geachtet, sie in eben diesem Sinne zu entwickeln. Hier wurde stets (ganz klassisch) mit Kreide und Tafel gearbeitet, nie mit vorgefertigten Folien, um die Gedankengänge in angemessenem Tempo darstellen zu können. Im Gegensatz zum Einstieg in die Themengebiete wurden größerer Beweise wie z. B. für den Fünffarbensatz oder Korrektheitsbeweise für die elementaren Graphenalgorithmen nicht durch die Studierenden erarbeitet, sondern in der Regel im Plenum präsentiert. Diese Beweise in der Vorlesung sollten dazu dienen, typische Arbeitstechniken und Ideen zu zeigen und diese Methoden auch als solche typische Werkzeuge des Fachgebietes zu thematisieren (als Beispiele: das Schubfachprinzip oder Kempeketten als geeignete Untergraphen bei Färbeproblemen). Häufig ergaben sich lebhafte Dialoge, insbesondere dann, wenn Beweisideen bereits in der selbstständigen Erarbeitung angelegt worden waren. Eine selbständige Erarbeitung von Beweisen im Rahmen der Vorlesungszeit wäre nur mit dem Einsatz von Lerntagebüchern möglich gewesen,[9] was im konkreten Fall organisatorisch nicht möglich war. Daher gab es zum selbstständigen Beweisen – ebenfalls ganz klassisch – Übungsaufgaben.

Es wurde den Studierenden regelmäßig verdeutlicht, warum die Vorlesung wie hier beschrieben aufgebaut ist, und auf methodisch-didaktische Möglichkeiten des Stoffes für die Unterrichtsgestaltung hingewiesen. Dabei ging es nicht darum, in einer Mathematikvorlesung konkret auf die unterrichtliche Umsetzung des gelehrten Stoffes hinzuarbeiten, sondern darum, exemplarisch zu zeigen und zu diskutieren, wie aus dem Stoff heraus Ideen für Unterricht entstehen können.

An geeigneten Stellen konnten handlungsorientierte Elemente eingebaut werden. Eine Aktion war so auffällig und ungewöhnlich, dass der Hausmeister sie prompt verbieten wollte: Die Erarbeitung eines Algorithmus zur Konstruktion von Euler-Touren wurde an einem großen Bodengraphen im Foyer des Mathematikgebäudes diskutiert und erarbeitet (siehe Abbildung S. 8).[10]

Nach gut der Hälfte des Semesters wurde anhand von Fragebögen eine Rückmeldung der Studierenden eingeholt und dort zeigt sich ein sehr interessanter, sicherlich noch genauer zu untersuchender Effekt: Die Studierenden verwechseln Inhalt und Methode bzw. können das eine nicht vom

6 In dem auf die Vorlesung folgenden Seminar zur diskreten Optimerung zeigte sich in Gesprächen mit den Studierenden, dass sie sich nach dieser Vorlesung gut darauf vorbereitet fühlten, sich nun selbstständig mit sehr kondensiert verfassten mathematischen Lehrbuchkapiteln auseinanderzusetzen.

7 Vgl. [5].

8 Diese Aussage ist nicht mit empirischen Methoden „bewiesen" worden, sondern eine Vermutung, die sich auf mündliche Äusserungen von Studierenden bezieht.

9 Vgl. [2]

10 Dies ist eine Realisierung der „Froschperspektive": S. 90 in [4].

Momentaufnahme aus der Vorlesung: Algorithmen erfinden und verstehen mit Hilfe der „Froschperspektive", Juni 2007 (Foto: BLW)

anderen trennen. Sie wurden gebeten, das Fachgebiet der Diskreten Mathematik zu beschreiben, und antworteten fast durchgängig mit methodisch durchsetzten Beschreibungen.
Hier einige Auszüge aus den Fragebögen:

Frage 5: Versuchen Sie, das Fachgebiet der Diskreten Mathematik (soweit Sie es bisher kennengelernt haben), in Abgrenzung zu den anderen Fachgebieten, die Sie in Ihrem Studium kennengelernt haben (wie z. B. Analysis), zu beschreiben. Was ist ähnlich oder gleich, was ist anders als in den anderen Fachgebieten? Denken Sie dabei nicht nur an die Inhalte, sondern auch an jeweils typische Tätigkeiten oder die Strukturierung des Stoffes.

> — männlich, 24:
> [...] Auch arbeitet man entspannter in der Diskr. MA und ist experimentierfreudig, anstatt sich über eine Doppelsumme in einem Doppelintegral aufzuregen, die keinen Grenzwert hat, da man einen Satz falsch angewandt hat
> — weiblich, 23:
> 1. Diskrete M ist viel praktischer orientiert [...] 3. Diskrete Mathematik ist nicht nur „frontale Vermittlung" wie in allen anderen Fächern. Man muss und darf selber mitdenken, sich beteiligen etc. [daraus folgt] man kommt viel besser mit dem Stoff mit.
> — weiblich, 23:
> [...] bei diskr. Mathe ist alles viel anschaulicher!
> [...] bei diskr. Mathe entdeckt man vieles selbst!
> — männlich, 37:
> [...] Mir gefällt es gut, die Algorithmen anzuwenden und dabei zu verstehen und dabei auch den Sinn der notwendigen Definitionen und Sätze zu erkennen
> — weiblich, 25:
> Begriffe, Zusammenhänge etc. werden erst dann erarbeitet, wenn sie gebraucht werden [...]
> — weiblich, 32:
> Erste Gedanken waren, „wir sind hier wie im Kindergarten". (Sorry) Aber [in] Wirklichkeit ist diese Vorlesung mit Übung sehr gut. Man ist einfach nicht gewöhnt, selber die Lösungswege zu finden. Mit Ana, LinA [Analysis, Lineare Algebra] kann man das gar nicht vergleichen. Da wird nur reingestopft, ohne dass man überhaupt etwas verstanden hat. Man steht ziemlich alleine da. [...]
> — weiblich, 32:
> Diskrete Mathem. ist viel praxisbezogener als alle anderen Veranstaltungen [...]

Die folgende Frage sollte ergründen, ob die Thematik geschlechtsspezifisch unterschiedlich wahrgenommen wird. Diese Frage taucht immer wieder in fachdidaktischen Diskussionen auf, weil die technologisch orientierten Anwendungen die Vermutung nahelegen, dass Mädchen sich nicht so stark angesprochen fühlen könnten. Die Fragenbogenantworten ergaben keine erkennbaren geschlechtsspezifischen Unterschiede, aber auch hier wurde wieder verstärkt auf die Methodik und Didaktik der Vorlesung Bezug genommen. Daher noch einige Auszüge aus den Antworten.

Frage 6: Stellen Sie sich vor, Sie würden eine Unterrichtseinheit zu kürzesten Wege oder Minimalen aufspannenden Bäumen in der Schule (Mittelstufe/Oberstufe) unterrichten. Was vermuten Sie: Spricht der Unterricht die Mädchen oder die Jungen in der Klasse stärker an? Begründen Sie Ihre Antwort.

> — männlich, 32:
> Hier kann der Schüler seine Denkweise mit einbringen, ohne in ein „Korsett von Strukturen" hineingepresst zu werden. Es gibt verschiedene „Lösungsstrategien" und damit wird es für die Schüler interessanter, da jeder seinen Weg sucht.
> — weiblich, 23:
> Da dieses Thema nicht „so viel" mit dem „typischen" Mathematikunterricht [zu tun hat](nicht so viel rechnen, schön anschaulich, schnell zum Selberausprobieren und viele Alltagsbezüge), glaube ich, könnten sich Jungs und Mädchen gleich stark angesprochen fühlen.
> — männlich, 37:
> Außerdem eignet sich die Thematik nicht (so

gut) für schlechten Mathematikunterricht à la ich geb' euch das Lösungsschema vor und ihr rechnet Beispiele, bei dem Jungen meiner Ansicht nach besser abschneiden als Mädchen.

Diese Rückmeldungen motivieren nun natürlich dazu, der Frage nachzugehen, wie dieses methodisch-didaktische Konzept auch für andere mathematische Fachgebiete nutzbar gemacht werden kann, um auch hier besser vermitteln zu können, dass Mathematik eine Wissenschaft ist, die vom selbständigen Nachdenken und Experimentieren lebt.[11]
Vielleicht könnte dies ein kleiner Beitrag dazu sein, dass angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer ihr Fach in der Schule stärker als bislang üblich als experimentierfreundliches und kreatives Fach vermitteln können.

Literatur

[1] Rainer Danckwerts: Webseite zum Siegener Teilprojekt des Projekts „MathematikNeuDenken" der Telekom-Stiftung, http://www.uni-siegen.de/fb6/didaktik/tkprojekt/index.html?lang=de

[2] Stephan Hußmann und Timo Leuders: Mathematik treiben, authentisch und diskret – eine Perspektive für die Lehrerausbildung, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker Hildesheim und Berlin, 2006 (CD-ROM), S. 37–44

[3] Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal: Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht, Vieweg Braunschweig, 2007

[4] Brigitte Lutz-Westphal: Kombinatorische Optimierung erleben – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht, Dissertation TU Berlin, 2006

[5] Urs Ruf und Peter Gallin: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1, Kallmeyer Seelze, 2003

[11] Mit ähnlicher Zielrichtung arbeiten Albrecht Beutelspacher und Rainer Danckwerts (Gießen/Siegen) im Rahmen des Telekom-Stiftung-Projekts „MathematikNeuDenken" [1].