Mathematikgeschichte und Analysis

Ein Erfahrungsbericht

Thomas Sonar

Im vergangenen Wintersemester 2006/07 habe ich zum zweiten Mal einen Kurs „Analysis I" für Studierende der Mathematik (und der Physik) gehalten, wie sie an unseren Universitäten üblich ist. Wie landläufig bekannt, sind die mathematischen Vorkenntnisse der Studienanfänger im Laufe der letzten Jahre stetig schlechter geworden; bei einigen unserer Anfänger möchte ich sogar von einer Katastrophe sprechen. An unserem Vorkurs im Winter 2006/07 nahmen ca. 1000 Studierende teil, die sämtlich in mathematiklastige Studiengänge wollten (Ingenieurwesen, Mathematik, Physik).
Am Ende des Vorkurses wurde ein anonymer Test geschrieben, in dem es nur um einfache Aufgaben aus der Elementarmathematik ging. Von 1000 hatten 300 Teilnehmer Null Punkte erreicht!
Die Ausdünnung des niedersächsischen Lehrplans (keine Ungleichungen, kein Konvergenzbegriff, etc.) und der weit verbreitete Glaube, man könne elementare Umformungen der neuen Taschenrechnergeneration überlassen, haben zu beklagenswerten Wissenslücken geführt.
Aus diesen Gründen sollte eine Analysis-Vorlesung die Studienanfänger bei ihrem Schulwissen abholen, aber eine Absenkung des universitären Niveaus sollte unter allen Umständen verhindert werden, was eine besondere Motivation und Gliederung des Stoffes erfordert. Eine genetisch orientierte Vorlesung erschien mir daher angemessen.

Gedanken zur genetischen Methode

Die genetische Methode wurde durch Otto Toeplitz in den 1920er Jahren bekannt gemacht.[1] Toeplitz unterscheidet die direkte genetische Methode, in der Studierende die Genese der Analysis nachvollziehen, und die indirekte Methode, in der der Lehrende die Genese nachvollzieht und seine Erfahrungen in die Vorlesung einfließen lässt. Die direkte Methode ist für eine heutige Vorlesung zu langwierig und daher nicht machbar, die indirekte Methode endet zu oft in nicht mehr als der Umstellung der Reihenfolge des Stoffes, was mir zu wenig war. Ich werde in kürze auf die von mir bevorzugte „Methode", die jeweils nur Teile der direkten und indirekten beinhaltet, zurückkommen.
Schon Erich Wittmann hat in seinen *Grundfragen des Mathematikunterrichts*[2] die Vorteile der genetischen Methode herausgearbeitet: Anschluss an das Vorverständnis der Addressaten, Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik, Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze, durchgehende Motivation und Kontinuität, allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises. Will man alle diese Vorzüge tatsächlich in einer Vorlesung implementieren, dann wird die Frage nach einem geeigneten Lehrbuch wichtig, an dem sich die Vorlesung nicht nur orientiert, sondern in dem sich auch die Studierenden mit Interesse und Freude zurecht finden können. Das klassische Toeplitzsche Buch[3] ist unseren Anforderungen leider nicht mehr gewachsen. Jahnke, Knoche und Otte mahnen noch 1992 in *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*[4] an: „We need much more written materials than are presently available." Heute ist ein solches Lehrbuch jedoch endlich vorhanden, und zwar *Analysis by Its History*[5] der Autoren Hairer und Wanner. In diesem Buch verfolgen die Autoren eine „pragmatisch genetische Methode", die ich im Sinne noch pragmatischerer Überlegungen dessen, der für eine

1 O. Toeplitz – Das Problem der Universitätsvorleung über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht der DMV, 1927.
2 E. Ch. Wittmann – Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6te Aufl., Vieweg Verlag, 1981.
3 O. Toeplitz – Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Erster Band (mehr nicht erschienen). Springer Verlag 1949.
4 H. N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (Hrsg.) – History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences. Vandenhoeck & Ruprecht, 1997.
5 E. Hairer, G. Wanner – Analysis by Its History. 3te Aufl., Springer Verlag 2000.

Vorlesung und seine jungen Erstsemester verantwortlich ist, modifiziert habe.

Der Ablauf der Vorlesung

In der Vorlesung „Analysis I“ habe ich mich in den ersten ca. 4 Wochen (4 Semesterwochenstunden Vorlesung) an eine eher direkte genetische Methode gehalten. Zu Beginn stehen Polynome ganz im Vordergrund, da die Studierenden diese Funktionsklasse noch aus der Schule kennen. Das Newtonsche Interpolationspolynom und das Binomialtheorem nach Pascal werden hergeleitet, was schließlich in Newtons Binomialtheorem mündet. Dieses Binomialtheorem agiert nun als „Arbeitspferd“ im weiteren Aufbau der Theorie.
Sehr interessant bei dieser Vorgehensweise ist die Bedeutung der heuristischen Motivation, die ich gerne am Beispiel der Exponentialfunktion deutlich machen möchte. Mit Hife des Binomialtheorems berechnet man auf Eulers Spuren

$$\left(1+\tfrac{1}{N}\right)^N = 1+1+\tfrac{1(1-\frac{1}{N})}{1\cdot 2}+\tfrac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

Aus $N \to \infty$ schließt nun Euler, dass

$$e := 1+1+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

Ein verwegener Schluss, denn auch die Anzahl der Summanden wächst und mit dem gleichen Recht würde natürlich auch

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots = 0$$

folgen! Eine wunderbare Gelegenheit, um in der Vorlesung die Bedeutung einer rigorosen Schlussweite klar zu legen.
In der Vorlesungen stehen dann „unendliche Polynome“, also Potenzreihen, im Mittelpunkt. Die Reihen der transzendenten Funktionen stehen so bereits am Anfang der Vorlesung zur Verfügung und mit ihnen kann gerechnet werden. Die komplexen Zahlen werden aus der *Ars Magna* von Cardano motiviert und der Zusammenhang mit den Potenzreihen ergibt sich ganz zwanglos über $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Die Ableitungsregeln werden aus Differenzenquotienten und Vernachlässigung von höheren Potenzen „kleiner“ Differenzen gewonnen; die Taylor-Reihe und auch die Integration als Summenbildung infinitesimaler Flächenstreifen folgen ganz natürlich.

Nun sind wir bereits im 19ten Jahrhundert angekommen! Hier setze ich nun (mit Hairer und Wanner) zu einem „ganz normalen“ Analysis-Kurs ein: Folgen, Reihen, Konstruktion der reellen Zahlen, Stetigkeit, etc. Die Genese beschränkt sich in diesem Teil der Vorlesung auf eine begleitende Vorstellung der Mathematiker und die Nennung der Quellen von Sätzen und Beweisen. In diesem Teil schöpfen wir natürlich aus dem einführenden genetischen Teil: Die Beispiele sind alle schon da, und verbliebene Unsauberkeiten und Lücken (siehe oben!) werden nun nach und nach geschlossen, was einen schönen Rückgriff auf das bereits Gehörte ermöglicht.

Abschließende Bemerkungen

In einer anonymen Befragung am Ende des ersten Semesters konnte ich feststellen, dass eine große Zahl meiner Hörer mit dem Konzept der Vorlesung sehr zufrieden war und sich auch für die Geschichte der Mathematik begeistern konnte. Entsprechend positiv war auch das Klausurergebnis: Nach der Wiederholungsklausur hatten 80 % der Hörer bestanden; eine für unsere Verhältnisse erstaunlich hohe Zahl.
Über das Lehrbuch von Hairer und Wanner kann ich nach nun zweimaliger Durcharbeitung nur das Beste berichten und kann es jedem Dozenten empfehlen. Es ist fehlerfrei, d. h. die Beweise sind alle richtig und bei den Beweisen sind nie diejenigen mit einem besonders schönen „Trick“ ausgewählt worden, sondern diejenigen, denen einfach zu folgen ist. Inzwischen haben wir 100 Exemplare für die Bibliothek angeschafft, so dass jeder Hörer über ein Exemplar zur Nacharbeit der Vorlesung verfügen kann. Meine nächste Analysis-Vorlesung für Anfänger wird ganz sicher wieder nach diesem Buch geschehen.

O. Toeplitz – Das Problem der Universitätsvorleung über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht der DMV, 1927.
E. Ch. Wittmann – Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6te Aufl., Vieweg Verlag, 1981.
O. Toeplitz – Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Erster Band (mehr nicht erschienen). Springer Verlag 1949.
H. N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (Hrsg.) – History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences. Vandenhoeck & Ruprecht, 1997.
E. Hairer, G. Wanner – Analysis by Its History. 3te Aufl., Springer Verlag 2000.