

- heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction*, 32, 22–36.
- Krauss, S., Lindl, A., Schilcher, A., Fricke, M., Göhring, A., Hofmann, B., Kirchhoff, P., Mulder, R.H., Baumert, J. (Hrsg.) (2017). *Falko: Fachspezifische Lehrerkompetenzen. Konzeption von Professionswissenstests in den Fächern Deutsch, Englisch, Latein, Physik, Musik, Evangelische Religion und Pädagogik*. Münster: Waxmann.
- Loibl, K., Roll, I., Rummel, N. (2017). Towards a theory of when and how problem solving followed by instruction supports learning. *Educational Psychology Review*, 29(4), 693–715.
- Loibl, K., Rummel, N. (2014). Knowing what you don't know makes failure productive. *Learning and Instruction*, 34, 74–85.
- Lowe, R., Ploetzner, R. (Hrsg.) (2017). *Learning from dynamic visualization*. Cham: Springer.
- Mayer, R.E. (2009). *Multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pierce, R., Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1), 1–20.
- Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: Francke.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3–17.
- Prediger, S. (2011). Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Strategien zur Weiterarbeit mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(40), 8–13.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78.
- Roschelle, J., Teasley, S.D. (1995). The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. In C.E. O'Malley (Ed.), *Computer-Supported Collaborative Learning* (S. 69–197). Berlin: Springer.
- Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. Münster: Waxmann.
- Van Essen, G., Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301–312.

Anke Lindmeier, IPN Kiel  
Email: lindmeier@ipn.uni-kiel.de

## Arbeitskreis: Stochastik

Herbsttagung in Frankfurt am Main, 10.–12. 11. 2017

---

Philipp Ullmann

Zur Herbsttagung 2017 lud der Arbeitskreis Stochastik erstmals nach Frankfurt am Main ein. Über vierzig KollegInnen folgten dem Ruf in die Mainmetropole, um über *Guten Stochastikunterricht von der Grundschule bis zum Abitur* zu diskutieren.

Nach einem gemeinsamen Abendessen im Café Albatros wurde die Tagung am Abend mit dem traditionellen Freitagsvortrag eröffnet.

Katharina Böcherer-Linder, Andreas Eichler und Markus Vogel präsentierten und diskutierten unter dem Titel *Empirische und theoretische Argumente für einen Unterrichtsvorschlag zum Satz von Bayes* aktuelle Ergebnisse aus der eigenen Forschung. Ausgangspunkt war ein in der Stochastikdidaktik einschlägiges Beispiel aus dem Umfeld des sogenannten Prävalenz- bzw. Basisratenfehlers: Gegeben etwa ein medizinischer Test, der Kranke und Gesunde jeweils mit hoher Wahrscheinlichkeit als solche erkennt; wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, bei

positivem Testergebnis tatsächlich krank zu sein, wenn die Krankheit in der Grundpopulation sehr selten auftritt? Erfahrungsgemäß wird diese Wahrscheinlichkeit, die man mit dem Satz von Bayes berechnen kann, oft dramatisch überschätzt – was z. B. im Kontext von Massenscreenings zu schwerwiegenden Fehlurteilen führen kann. Gerade wegen der Authentizität dieses Problems gehört es inzwischen zum Standard-Repertoire in Schule und Hochschule.

Gegenstand der Forschung war nun die Frage, welche Veranschaulichungen in diesem Kontext verständnisfördernd sind. Ein übliches (weit verbreitetes, tragfähiges und verallgemeinerbares) Format stellt das Baumdiagramm dar, das aber – zumindest in seiner sparsamsten Art – die Zahlenverhältnisse nur auf der symbolischen Ebene codiert. Das von Böcherer-Lindner, Eichler und Vogel propagierte Modell des Einheitsquadrates erwies sich – wohl

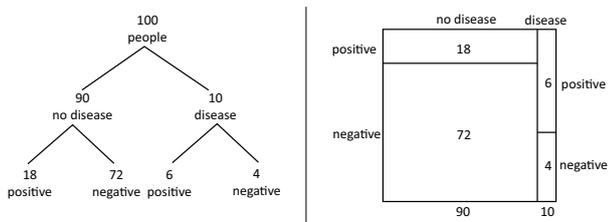


Abbildung 1. Baum vs. Einheitsquadrat (aus Böcherer-Linder & Eichler (2017), S. 3; vgl. Fußnote 1)

durch die strukturierte Visualisierung der natürlichen Häufigkeiten als Flächen(anteile) – als dem Baumdiagramm überlegen.

Das führte zu einer regen Diskussion, in deren Verlauf das Baumdiagramm, ggf. in modifizierter Form, aus dem Auditorium vehement verteidigt wurde, auch angesichts der mangelnden Anschlussfähigkeit des Einheitsquadrates an andere Schulkontexte, ein Argument, dem Katharina Böcherer-Lindner mit Verweis auf das Rechteckmodell im Kontext von Bruchzahlen widersprach. Die lebhaft Diskussions wird hoffentlich ihre Fortsetzung finden, wenn weitere Daten ausgewertet sind, die den genaueren Vergleich unterschiedlicher Repräsentationsformate ermöglichen, neben Bäumen und Einheitsquadraten etwa Vierfeldertafeln und Doppelbäume.<sup>1</sup>

Der Abend schloss mit einer Nachsitzung in der stimmungsvollen Bar Casablanca.

Am Samstagvormittag präsentierte Joachim Engel in seinem Vortrag *Zivilstatistik – Lehren und Lernen mit gesellschaftlich relevanten Daten* das EU-Projekt *ProCivicStat*. In einer internationalen strategischen Partnerschaft (Großbritannien, Israel, Portugal, Ungarn und Deutschland) werden neue Methoden und Konzepte entwickelt, um ein breit(er)es Bewusstsein dafür zu schaffen, dass (beschreibende) Statistik ein sehr mächtiges Werkzeug darstellt, um Welt zu verstehen und faktenbasiert zu urteilen. Statistik in Form der ‚Zivilstatistik‘ kann und will so zum Empowerment von Staatsbürgern beitragen. Ein Schwerpunkt der Projektarbeit ist die Entwicklung von konkreten Unterrichtsmaterialien (mit Schwerpunkt auf Oberstufe und Universität), die im Internet unter [www.procivicstat.org](http://www.procivicstat.org) kostenlos heruntergeladen werden können.

Anschließend unternahm Renate Motzer unter dem Titel *Stochastikunterricht in der Grundschule – Beobachtungen in bayerischen Grundschulklassen* eine Bestandsaufnahme, wie viel Stochastik und in wel-

cher Form diese inzwischen in bayerischen Grundschulbüchern angekommen ist, und berichtete über einige Unterrichtsbeobachtungen aus Praktikumsklassen. Als vorläufiges Resümee lässt sich vielleicht festhalten, dass Stochastik in Grundschulbüchern inzwischen weit über kombinatorische Vorübungen hinausgeht bzw. diese erfreulicherweise weitgehend abgelöst hat, dass aber durchaus Bedarf bei der Qualifikation von (angehenden und praktizierenden) Lehrkräften besteht, die mit dem Thema Stochastik oft noch unvertraut sind.

In der Mittagspause folgte ein kurzer Stadtrundgang durch das Frankfurter Westend mit den Stationen Senckenbergmuseum, Heinrich-Hoffmann- und Struwwelpeter-Museum, Palmengarten, Westend Synagoge und Alte Oper – Orte, an denen deutlich wurde, wie sehr Frankfurt seit dem 19. Jahrhundert durch bürgerschaftliches Engagement, aber auch durch Antisemitismus geprägt wurde. Der Besuch der Dachterrasse des Maintowers auf 192 m Höhe fiel aufgrund des Wetters leider aus.

Den Samstagnachmittag eröffnete Norbert Christmann mit seinem Vortrag *Jazz-Improvisation – ein Gegenstand für den Stochastikunterricht?* Mit instrumentalem Einsatz stellte er Ideen vor, den Zufall mit der Kunst der musikalischen Improvisation in Verbindung zu bringen. Vorläufer lassen sich in der Musikgeschichte seit dem ausgehenden Mittelalter finden, konsequent verfolgt wurde das Prinzip des Würfelwurfs in der Musik aber erst in der sogenannten Aleatorik etwa eines Karlheinz Stockhausen oder John Cage im 20. Jahrhundert. So einfach das Prinzip, so schnell wurde durch Spiel- und Notenproben deutlich, dass der zum Klingen gebrachte Würfelwurf als Einstieg in das Thema Zufall zwar eine oft ungenutzte Erfahrungs- und Wahrnehmungsebene anspricht, als Modellierung der freien (Jazz-)Improvisation aber nicht ausreicht. Die sich anbietenden Vertiefungen werden allerdings schnell musikalisch anspruchsvoll und eignen sich wohl vor allem für SchülerInnen mit einschlägigem Vorwissen.

Anschließend folgte eine ausgedehnte Arbeitsphase in drei Arbeitsgruppen, in denen schulstufenbezogene Unterrichtsvorschläge zum Themenfeld Mittelwert/Erwartungswert diskutiert wurden. Dieses im Rahmen einer Herbsttagung relativ neue Format wurde gerne angenommen und führte zu angeregten Diskussionen, deren Zusammenführung in einer Plenumsphase sich allerdings als schwierig

<sup>1</sup> Für eine ausführliche Diskussion der Forschungsergebnisse vgl. Böcherer-Linder, Katharina & Andreas Eichler (2017): The Impact of Visualizing Nested Sets. An Empirical Study on Tree Diagrams and Unit Squares. *Frontiers in Psychology* 7, Aufsatz 2026, sowie Böcherer-Linder, Katharina, Andreas Eichler & Markus Vogel (2017): The impact of visualization on flexible Bayesian reasoning. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 11, S. 25–46.

gestaltete. Den Versuch einer Synopse werde ich am Ende des Berichts unternehmen.

Nach der Sitzung des AK Stochastik wurde der Abend in kleineren Gruppen beim Abendessen beschlossen.

Der Sonntagvormittag begann mit dem Vortrag *Verständnisfördernder Stochastikunterricht im Gymnasium – quo vadis?* von Norbert Henze, der Auszüge aus Stochastikbüchern der Oberstufe mit den Inhalten seiner Stochastikvorlesung für Lehramtsstudierende kontrastierte. Dabei wurde deutlich, dass in Oberstufenbüchern die Strategie nahe liegt, den Schulstoff algorithmisch abzupacken und abzuarbeiten, anstatt ihn auf einer mathematisch einfachen, aber tragfähigen Grundlage verständnisorientiert zu entwickeln. Das Dilemma eines kompetenzorientierten Stochastikunterrichts ist also nach wie vor ungelöst: Eine abgespeckte Anfängervorlesung im Sinne der Reformansätze der 1970er Jahre kann und will er nicht sein, läuft aber gerade durch sein Bemühen um Verständnis Gefahr, ins Gegenteil eines unverstandenen Abarbeitens von Rezepten abzugleiten.

Zum Abschluss zeigte Wolfgang Riemer in seinem Experimental-Vortrag *Statistik verstehen* auf, wie viel (schließende) Statistik mit einfachen Mitteln bereits in der Sekundarstufe I möglich ist. Aus seinem reichen Ideenschatz, mit dem er seit drei Jahrzehnten den Stochastikunterricht bereichert und ihn nachhaltig zum Besseren verändert hat – wer kennt nicht die Riemer-Würfel oder den Geschmackstest? – stellte er diesmal zwei neue Vorschläge vor, den Zufall erfahrbar zu machen. Mittels eines Vorzeichentests wurden ‚gewichtige‘ Zweifel an der Füllmenge kleiner Gummibärchentüten laut, während das ‚schiefe‘ Glücksrad zur Hypothesenbildung einlud und durch seinen großen Aufforderungscharakter zum Experimentieren einlud. Die Materialien zu seinen neuen Ideen stellt Wolfgang Riemer kostenlos über seine Internetseite [www.riemer-koeln.de](http://www.riemer-koeln.de) zur Verfügung, auf die ich – auch für weitere Informationen – sehr gerne verweise.

*Guter Stochastikunterricht von der Grundschule bis zum Abitur* – obwohl das Tagungsthema sehr weit und umfassend formuliert war, zeichnete sich in der Summe der Vorträge und Aktivitäten der Herbsttagung ein wenn auch grobes Bild ab, das ich im Folgenden versuche zu skizzieren.

Das Thema Stochastik hat sich inzwischen unter dem Label *Leitidee Daten und Zufall* in allen Schulstufen etabliert. In der Primarstufe werden – so die

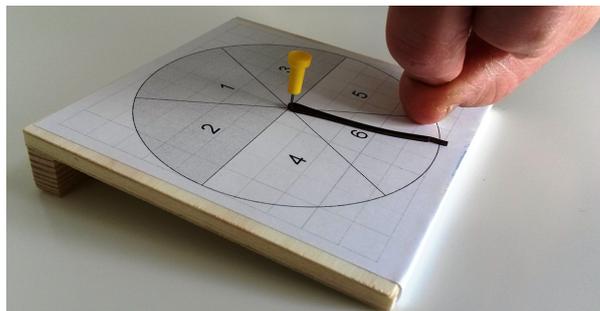


Abbildung 2. Das ‚schiefe‘ Glücksrad von Wolfgang Riemer (Foto: Wolfgang Riemer)

Lehrkräfte das unterstützen – vielfältige Erfahrungen im Kontext der Leitidee Daten und Zufall angeht, sowohl hinsichtlich des Erlebens von Zufallsschwankungen als auch hinsichtlich des Gebrauchs stochastischer Fachbegriffe (im Sinne einer behutsamen Begriffsschärfung). Inhaltlichen Schwächen, wie das Beharren auf dem Begriff des ‚Unwahrscheinlichen‘, der einer Quantifizierung des Zufalls wohl nicht förderlich ist, oder die Überstrapazierung des empirischen Gesetzes der großen Zahl, lässt sich am ehesten durch eine (noch) bessere Qualifizierung der Lehrkräfte gegensteuern.

In der Sekundarstufe II ist im Stochastikunterricht – wie im Mathematikunterricht allgemein – eine deutliche Abkehr von abstraktem Denken festzustellen. Fachliche, fachsprachliche und fachsystematische Anforderungen werden zugunsten einer (vermeintlichen) Anschaulichkeit und eines (vermeintlichen) Praxisbezugs reduziert. Diese Entwicklung ist nicht erst der Kompetenzorientierung geschuldet, wird durch sie aber gefördert: Ihr Mantra – den Winterschen Grunderfahrungen entlehnt, die inzwischen aller substantiellen Gehalte beraubt sind, die Heinrich Winter ursprünglich mit ihnen verband<sup>2</sup> – verkürzt den Mathematikunterricht als Schule der Abstraktion bekanntlich auf eine (unter vielen?) „deduktive Welt eigener Art“, deren Relevanz für die Alltagswelt durch schiefe Modellierungen nur noch weiter infrage gestellt wird.

Entsprechend ambivalent stellt sich die Situation in der Sekundarstufe I dar, die die Vorerfahrungen der Primarstufe aufgreifen soll und will, mit hervorragenden und vielfach erprobten Unterrichtsvorschlägen aufwarten kann, aber dann nicht recht weiß, in welche Richtung die Mathematisierung voranschreiten soll, weil erst – und viel zu spät – an der Universität der Anspruch und auch

<sup>2</sup> Vgl. Winter, Heinrich (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3, S. 106–116, ein Aufsatz, der im Vergleich zu dem späteren Winter, Heinrich (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61, S. 37–46 viel zu wenig zitiert und vor allem – gelesen wird.

der Wert einer abstrakten Begriffsbildung zutage tritt.

Verbindet man diese Beobachtungen des Stochastikunterrichts mit allgemeinen gesellschaftlichen Entwicklungen – namentlich den großen Schwierigkeiten, die sich im rationalen (!) Umgang mit abstrakten und der unmittelbaren eigenen Erfahrung enthobenen (!) Themen wie Klimawandel oder Migration ergeben –, kommt man wohl nicht umhin, die (möglichen) Ziele eines zukünftigen Stochastikunterrichts neu zu überdenken.

Dies war dann auch mit großer Mehrheit das Wunschthema für die kommende Herbsttagung, zumal die letzte bildungspolitische Stellungnahme des AK Stochastik nunmehr eineinhalb Jahrzehnte alt ist und dringend einer Aktualisierung bedarf.

Doch am Ende waren es nicht die ‚großen‘ Themen, die der Herbsttagung in Frankfurt ihr Gesicht gaben, sondern die Vorträge und Vortragen-

den, die für anregende Diskussionen sorgten, die zahlreichen Gespräche in den Kaffeepausen und Nachsitzungen und die vielen Kontakte, die neu geknüpft oder gefestigt wurden. Daher möchte ich noch einmal die Gelegenheit nutzen, mich bei allen TeilnehmerInnen für ihr Interesse und Engagement herzlich zu bedanken, und hoffe, dass wir im kommenden Jahr in Würzburg vom 2.–4. November 2018 ebenso zahlreich sein und ebenso lebhaft diskutieren werden.

Alle interessierten LeserInnen sind selbstverständlich ebenso herzlich eingeladen, an der Sitzung des AK Stochastik auf der GDMV-Jahrestagung am Donnerstag, dem 8. März, um 14.15 Uhr teilzunehmen.

Philipp Ullmann, Universität Frankfurt  
Email: ullmann@math.uni-frankfurt.de

## Arbeitskreis: Ungarn

### Herbsttagung in Budapest, 30. 8.–1. 9. 2017

Gabriella Ambrus

Die diesjährige Herbsttagung des AK Ungarn fand vom 30. 8. bis zum 1. 9. zusammen mit der ProMath-Tagung an der ELTE Universität in Budapest statt. Das Thema der gemeinsamen Tagung lautete: „Problem Solving Teaching – Research and Practice“. Die zahlreichen Teilnehmer aus Ungarn, Deutschland, Finnland, Griechenland, Israel, aus der Slowakei und aus der Türkei konnten ein breites Spektrum an Vorträgen und Diskussionsbeiträgen erleben. Unter den vielfältigen Vorträgen, deren Brandbreite von der Grundschule bis zur gymnasialen Lehrerbildung reichte, hatte der Vortrag von Frau Dr. Éva Vásárhelyi „Imaginary Report with András Ambrus“ einen besonderen Reiz. Frau Dr. Vásárhelyi widmete ihr „imaginäres Gespräch“ Herrn Dr. András Ambrus, dem ehemaligen Leiter des mathematikdidaktischen Instituts der ELTE Universität, zu seinem 75. Geburtstag. Im Rahmen dieses „Gesprächs“ gab sie einen Überblick über die lange und erfolgreiche Tätigkeit von Herrn Ambrus.

Der internationale Charakter der Tagung bot den Teilnehmern nicht nur eine ausgezeichnete Gelegenheit, aktuelle und eigene Ergebnisse des

Forschungsbereichs „Problemlösen im Mathematikunterricht“ vorzustellen, sondern auch eine gute Möglichkeit, bestehende Kooperationen mit Didaktikern aus anderen Ländern zu vertiefen und neue Kontakte zu knüpfen. Das Programm umfasste sowohl stoffdidaktische Vorträge als auch Vorträge aus dem Bereich der empirischen Unterrichtsforschung und bestand der Reihe nach aus den folgenden Beiträgen:

- *Friedlander, Alex (Tel Aviv): Criteria for “Good Problems”*
- *Scharnberg, Sarina (Lüneburg): Qualities of Successful Problem-solving Teachers*
- *Aktas, Fatma Nur & Yakici-Topbas, Esra Selcen (Ankara): Cognitive-Metacognitive Process through Mathematical Problem Solving in a Small Group: Dynamic Geometry Systems or Paper-Pencil Environments?*
- *Ambrus, Gabriella & Kónya, Eszter (Budapest, Debrecen): Solving of Real Situations Based Problem – Experience with Teacher Training Students*
- *Katona, Dániel (Budapest): Web of Problem Threads in the Pósa Method in Hungary*
- *Rott, Benjamin (Köln): Problem Solving in the Class-*